

APLICACIÓN DE UN MODELO PARA CÁSCARAS PIEZOELÉCTRICAS AL ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO DE ESTRUCTURAS ACTIVAS

Ahmad E. Guennam y Bibiana M. Luccioni

*CONICET, Instituto de Estructuras "Ing. Arturo M. Guzmán", Universidad Nacional de Tucumán, Av.
Roca 1800, T4000ACR San Miguel de Tucumán, Argentina, eguennam@herrera.unt.edu.ar,
<http://www.herrera.unt.edu.ar/ies>*

Palabras Clave: cáscara, material activo, compuesto piezoeléctrico, No-linealidad material.

Resumen. En las últimas décadas, numerosas ramas de la Ciencia y la Tecnología se han abocado al desarrollo de cierto tipo particular de sistemas capaces de evaluar una determinada situación y responder de manera conveniente a su funcionamiento. Uno de los avances recientes más notables en las ramas mecánica, aeronáutica y civil de la ingeniería estructural yace en el campo de las estructuras y sistemas construidos con materiales activos. Por sus características, los materiales activos basados en compuestos reforzados con fibras piezoeléctricas han despertado un creciente interés para las aplicaciones mencionadas.

En este trabajo se utiliza un modelo de cáscara piezoeléctrica combinado con un modelo material no lineal para compuestos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales para estudiar numéricamente la respuesta estática y dinámica de estructuras dotadas con actuadores constituidos por este tipo de materiales.

A partir de los análisis estáticos y dinámicos considerados se identifican diferentes aspectos del comportamiento y rangos de trabajo de los materiales activos, incidencia de los fenómenos no lineales en la respuesta y maneras de alimentar los actuadores para lograr la actuación deseada sin incursionar en zonas de trabajo críticas para su funcionamiento e integridad.

1. INTRODUCCIÓN

Las estructuras activas poseen características de desempeño que las hacen muy atractivas en numerosos campos tecnológicos. La gran cantidad de trabajos de investigación realizados durante la última década refleja el gran potencial que poseen este tipo de estructuras (Bhattacharya et al. (2002), Choi et al. (2007), Bilgen et al. (2010)).

Las cualidades exhibidas por los materiales compuestos piezoeléctricos-ferroeléctricos los hacen potencialmente aptos para este tipo de aplicaciones (Guennam, 2010). Numerosas aplicaciones de interés práctico involucran, además, estructuras de paredes delgadas, campos electromecánicos no uniformes y comportamiento no lineal del material. Ciertas configuraciones tales como apilados de múltiples discos o capas, electrodos interdigitales y otras formas complejas generan tensiones mecánicas y gradientes de potencial eléctrico elevados en zonas de discontinuidades, bordes, esquinas y puntas de electrodos. Allí, los fenómenos asociados al comportamiento no lineal del material cobran marcada importancia (Muliana, 2010).

En las ramas aeroespaciales, es muy popular el uso de estructuras de paredes delgadas. Las alas de aviones, las palas de helicópteros, las superficies de control y los brazos robóticos son algunos ejemplos de estructuras del tipo mencionado. En este ámbito, resultan de gran utilidad las herramientas de diseño, cálculo, y predicción del comportamiento capaces de reflejar los aspectos relevantes del sistema considerado y que sean eficientes en cuanto al esfuerzo de cálculo en relación a la precisión de los resultados.

En el presente trabajo se estudia numéricamente la respuesta estática y dinámica de estructuras dotadas con actuadores construidos con compuestos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales. El estudio se realiza utilizando un modelo de cáscara piezoeléctrica combinado con un modelo material no lineal para este tipo de compuestos, combinados en una subrutina de usuario (UEL) para el programa de elementos finitos ABAQUS (SIMULIA, 2005), (Guennam, 2010).

Se describe, en primer lugar, el elemento utilizado, luego el modelo material y ,finalmente, se presentan los ejemplos de aplicación estudiados.

2. ELEMENTO FINITO DE CÁSCARA PIEZOELÉCTRICA UTILIZADO

El elemento finito utilizado en este trabajo fué especialmente formulado para modelar estructuras fabricadas con compuestos piezoeléctricos, en particular, del tipo de compuestos polarizados con electrodos interdigitales (EI) (Guennam y Luccioni (2006) y Guennam (2010)). El elemento admite la inclusión de un apilado de capas y una combinación arbitraria de materiales, es decir, monolíticos, compuestos, piezoeléctricos, etc. Este apilado o laminado en la estructura puede construirse de manera general. La posición de cada material en el espesor y la orientación del mismo dependerá de las características deseadas para cada aplicación particular. Para las variables cinemáticas, el modelo para el multilaminado se basa en una formulación de capa simple. Sin embargo, para el campo eléctrico, la situación es diferente, ya que cada capa activa puede funcionar como sensor o como actuador y controlarse independientemente. Por lo tanto, la relación entre el campo eléctrico en cada capa no se conoce a priori y, en consecuencia, se considera una variación tipo “zig-zag” en el espesor para el potencial eléctrico. Cada capa piezoeléctrica introduce un nodo eléctrico y un vector director del campo eléctrico.

Esta posibilidad de modelar los laminados de múltiples capas de diferentes tipos de materiales, permite no sólo analizar laminados piezoeléctricos propiamente dichos sino también estructuras de materiales monolíticos a las que se les adhieren parches piezoeléctricos como, por ejemplo, una viga o placa de aluminio (Balamurugan y Narayanan, 2008), o un cajón cerrado

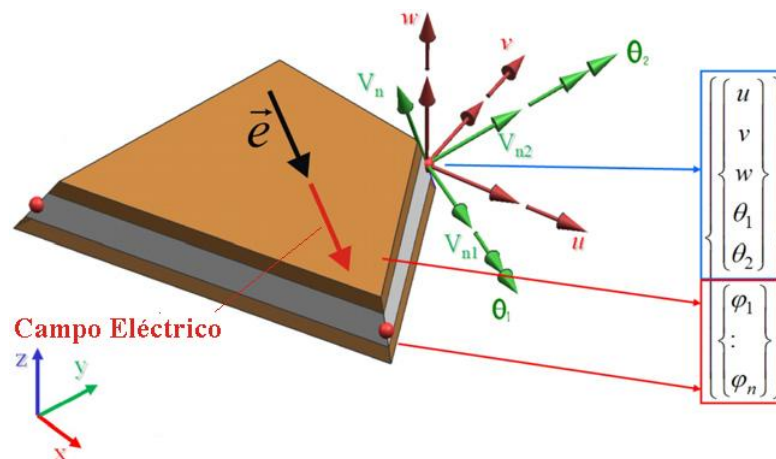


Figura 1: Esquema del elemento de cáscara piezoeléctrica utilizado.

metálico con actuadores y sensores dispuestos en direcciones oblicuas respecto del eje longitudinal, para conferir capacidad de control de vibraciones torsionales (Guennam y Luccioni, 2006).

El comportamiento mecánico del elemento se describe mediante las consideraciones de sólido degenerado propuestas por Ahmad et al. (1970). Los problemas de bloqueo por corte se alivian utilizando interpolación mixta de componentes tensoriales (MITC) (Bathe y Dvorkin (1986). La Figura 1 muestra un esquema del elemento finito de cáscara piezoeléctrica utilizado, con los grados de libertad nodales y el vector director del campo eléctrico definido por la orientación de las fibras piezoeléctricas-ferroeléctricas. La formulación mecánica del elemento está extensamente estudiada en la bibliografía especializada ((Bathe, 1996), Bathe y Dvorkin (1986), Kögl y Bucalem (2005a), Kögl y Bucalem (2005b)). Por lo tanto, a continuación, sólo se presentan los puntos más relevantes del aspecto eléctrico y mayores detalles del mismo se pueden encontrar en Guennam y Luccioni (2009) y Guennam (2010).

En los dispositivos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales (DPEI) el campo eléctrico no es uniforme a lo largo de las fibras piezoeléctricas, sino que se registran variaciones importantes de esta cantidad. En algunos sectores las variaciones son moderadas, sin embargo, entre dos electrodos consecutivos, se registran cambios de 180° en la dirección del campo eléctrico. La Figura 2 muestra dicha variación obtenida con un análisis detallado, usando el MEF (Guennam, 2005). Sin embargo, para el análisis macroelectromecánico de una estructura activa, usando un modelo homogéneo equivalente para el dispositivo, puede emplearse, un modelo más simple para representar el campo eléctrico. El elemento finito propuesto por Guennam y Luccioni (2009) y utilizado en este trabajo considera un campo eléctrico uniforme y constante en cada lámina del laminado cuando se polarizan los electrodos. Resulta, por lo tanto, adecuado para ser usado en combinación con un modelo de homogeneización de las propiedades y comportamiento material. El elemento soporta la inclusión de varias capas de diferentes materiales y orientaciones definidas para cada uno de ellos en el caso de medios no isotrópicos. En particular, cada capa piezoeléctrica admite una orientación determinada que, a su vez, define la dirección del campo eléctrico basada en la dirección de máximo acoplamiento piezoeléctrico longitudinal.

En términos generales, para el campo eléctrico se tiene la siguiente expresión:

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (1)$$

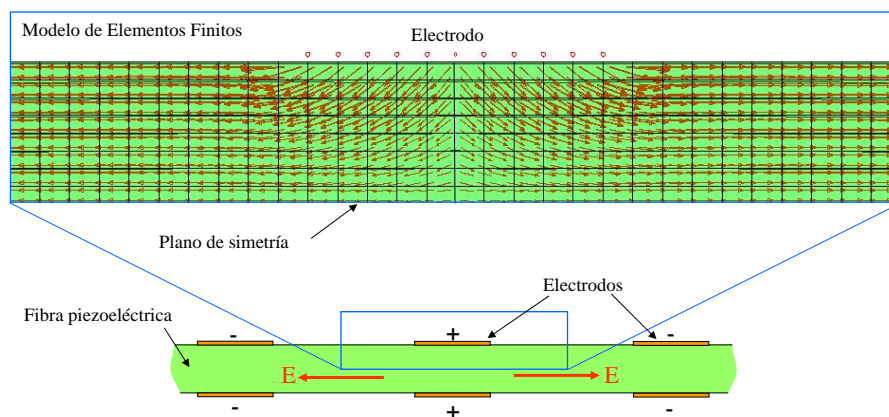


Figura 2: Variación del campo eléctrico en una porción de fibra piezoeléctrica entre dos electrodos, análisis detallado con MEF. (Guennam, 2005)

Para cada capa piezoeléctrica, se introduce un nodo con un solo grado de libertad. El mismo es solamente eléctrico y corresponde al potencial eléctrico aplicado. Esto representa la aplicación del potencial eléctrico a uno de los electrodos mientras el otro electrodo se considera conectado al potencial de tierra o masa. Dentro de cada capa piezoeléctrica, la Ecuación 1 puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{E} = -\frac{\varphi}{p}\vec{e} \quad (2)$$

donde \vec{e} es un vector unitario que representa la dirección de la fibra (Fig. 1) y p es la distancia entre los dedos o ramas de electrodos (Fig. 3).

En general, en el contexto del método de elementos finitos, el campo eléctrico se calcula en términos de los potenciales eléctricos nodales, introduciendo una matriz B_e :

$$\vec{E} = B_e U_e \quad (3)$$

En este sentido, el campo eléctrico dentro de cada capa piezoeléctrica, considerado constante, puede ser expresado en términos de los potenciales eléctricos aplicados a los electrodos correspondientes, de la siguiente manera (Guennam y Luccioni, 2009):

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}_{\text{capa } j} = -\frac{1}{p_{\text{capa } j}} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_{\text{capa } j} \{\varphi\}_{\text{capa } j} \quad (4)$$

Usando (4) se puede representar, mediante una única expresión, el campo eléctrico dentro de cada capa de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}_{\text{capa } j} = - \left[f_1 \frac{1}{p_1} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_1 \cdots f_k \frac{1}{p_k} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_k \cdots f_n \frac{1}{p_n} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_n \right] \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix} \quad (5)$$

donde se ha incluido la variable f_k . La misma se define como:

$$f_k = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \end{cases} \quad (6)$$

La matriz $[B_e]$ resulta:

$$[B_e] = - \left[f_1 \frac{1}{p_1} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_1 \cdots f_k \frac{1}{p_k} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_k \cdots f_n \frac{1}{p_n} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}_n \right] \quad (7)$$

3. MODELO MATERIAL

Uno de los principales objetivos del modelado de compuestos reforzados con fibras es predecir la respuesta de los mismos en forma de relaciones macroscópicas que eviten la necesidad de realizar una discretización explícita de los componentes. Con este fin, [Guennam \(2010\)](#) propone un modelo material no lineal para compuestos piezoeléctricos polarizados con electrodos interdigitales. El modelo permite captar los fenómenos de repolarización, saturación e histéresis del compuesto y surge de combinar y extender una serie de enfoques y modelos existentes en la bibliografía, para obtener un método sistemático que permite determinar las variables y las propiedades macroscópicas del compuesto ferroeléctrico polarizado con electrodos interdigitales, dentro de un marco de comportamiento material no lineal de las fibras y en vistas de incluir el mismo en un código de elementos finitos.

El modelo usado para las fibras está basado en la propuesta de ([Huber y Fleck, 2001](#)). El modelo de homogeneización está basado en las teorías de Reuss y Voigt y en las ideas de [Bent \(1997\)](#) para compuestos piezoeléctricos bajo hipótesis de comportamiento material lineal. El modelo de homogeneización ([Guennam, 2010](#)) representa una extensión electromecánica del desarrollo formal y sistemático para hacer combinaciones serie-paralelo de modelos mecánicos no lineales propuesto por [Luccioni \(2006\)](#).

Para cada incremento de carga se debe efectuar una *descomposición* a fin de realizar los cálculos necesarios en cada componente y llevar cuenta de los fenómenos que se desarrollan en la misma y luego *componer* para obtener las nuevas propiedades macroscópicas. El modelo desarrollado presenta la ventaja de ser relativamente sencillo de programar y ser incluido en un programa de elementos finitos.

Una lámina de material compuesto polarizado con electrodos interdigitales tiene un aspecto como el que se muestra en la Figura 3, donde se puede observar la presencia de fibras continuas inmersas en la matriz polimérica y dispuestas entre las capas de electrodos.

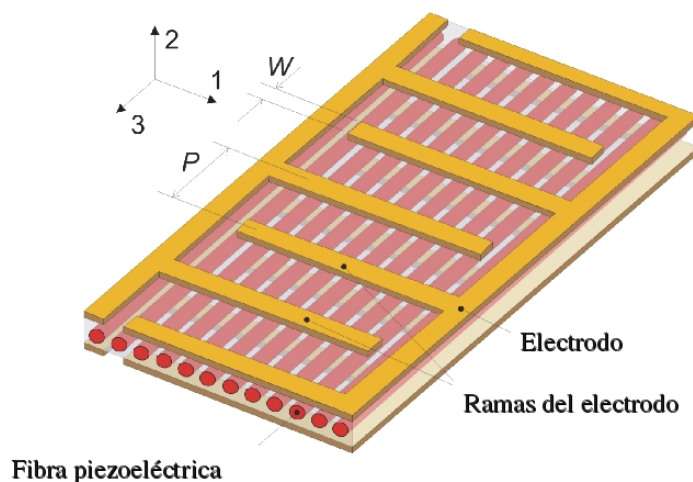


Figura 3: Compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales.

El comportamiento del laminado queda determinado por una serie de fenómenos y procesos que tienen lugar en distintas escalas en el interior del mismo. Por una parte, las fibras piezoeléctricas presentan comportamientos propios de este tipo de materiales que pueden ser analizados mediante un enfoque caracterizado por una escala denominada "micromecánica". Las fibras piezoeléctricas se combinan con la matriz polimérica para formar así el laminado. El análisis de las láminas con fibras piezoeléctricas corresponde a la "mesoescala". Finalmente, se distingue una escala "macromecánica", que está relacionada con los fenómenos a nivel de la disposición del laminado piezoeléctrico para dar lugar a los actuadores o sensores.

3.1. Representación idealizada del compuesto piezoeléctrico

Observando detenidamente el compuesto en estudio (laminado con fibras piezoeléctricas y electrodos interdigitales), se distingue una estructura que se repite periódicamente y presenta iguales características que el compuesto. Esta estructura se denomina celda unitaria y la misma puede construirse mediante un ensamblaje de subcomponentes en tres etapas, esto se esquematiza en la Figura 4, en donde se muestra, además, la idealización de la misma y las tres etapas (A, B, C) utilizadas para su obtención.

En cada etapa se identifica la presencia de dos fases que, al combinarse, dan lugar a un material homogéneo equivalente. En la próxima etapa, este material homogéneo equivalente se combina con una porción de matriz polimérica. Para mayor claridad, en la Figura 4, la fibra se representa en color rojo y la matriz en amarillo, distintos tonos de color naranja se utilizan para representar el material equivalente a medida que se avanza en el proceso de combinación.

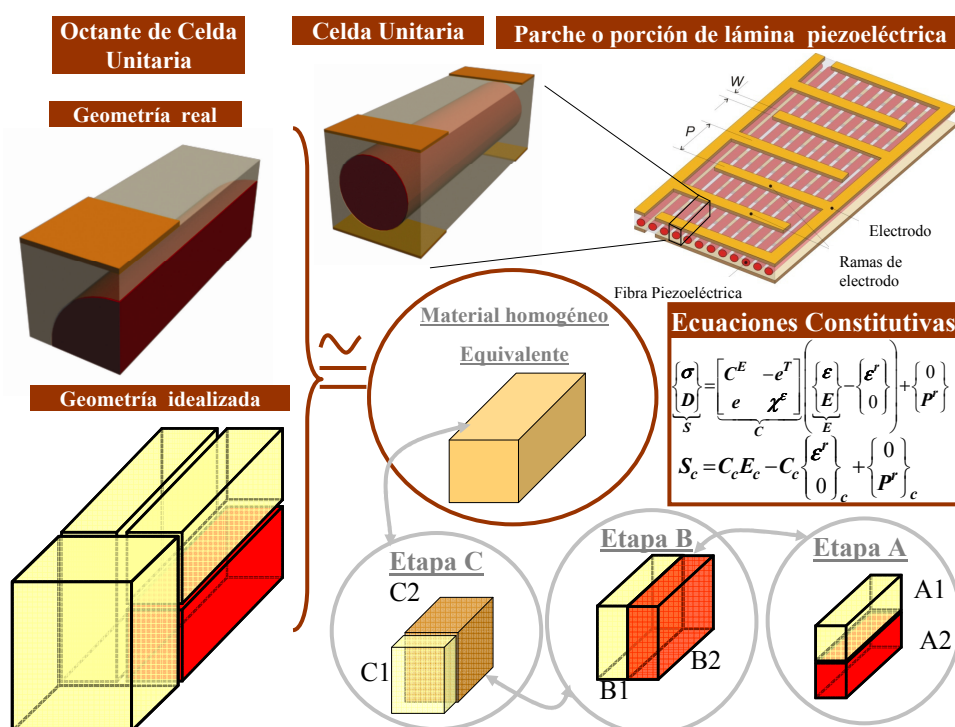


Figura 4: Esquema del modelo de campos uniformes.

Cada etapa de composición introduce en el modelo un aspecto particular que se puede identificar en el comportamiento del compuesto. Por una parte, la disposición de matriz en dirección paralela a la fibra introduce los efectos de distribución de los esfuerzos y deformaciones, longitudinales y transversales, en función de la disposición y proporción volumétrica de las

componentes. Estas etapas (A y B) captan la respuesta electromecánica predominante en zonas alejadas de los electrodos. Por otra parte, la tercer etapa, en la que se agrega una porción de matriz en serie con el material equivalente obtenido de las dos etapas anteriores, incluye en el modelo efectos netamente eléctricos. El potencial eléctrico aplicado a los electrodos genera un campo eléctrico que “recorre” una porción de matriz hasta alcanzar la fibra. La adición de una porción de matriz en serie contempla los efectos de la diferencia de rigidez dieléctrica entre fibra y matriz, separación entre electrodos y distancia entre electrodos y fibra.

3.2. Modelo de homogeneización para el compuesto piezoeléctrico

Para tener en cuenta los fenómenos no lineales de repolarización, saturación y variación del acoplamiento electromecánico en el modelo para el compuesto piezoeléctrico, es necesario realizar, en cada paso de carga, cálculos para determinar las deformaciones y campo eléctrico a que están sometidas las fibras. Con estos valores se integran las ecuaciones constitutivas correspondientes. Una vez realizado esto, es necesario determinar el comportamiento del compuesto con las nuevas propiedades y variables electromecánicas actualizadas.

En relación a cada componente de deformación, campo eléctrico, tensión mecánica y desplazamiento eléctrico, el material puede trabajar en serie o en paralelo en función de la disposición relativa de cada fase. La relación entre los valores de estas cantidades, correspondientes a cada fase y las del compuesto, se establece en virtud de la naturaleza física de las mismas. En este sentido, se señala que, por un lado, las tensiones mecánicas y el desplazamiento eléctrico se comportan de manera similar, por otro lado, las deformaciones y campo eléctrico mantienen un comportamiento análogo.

En las direcciones en que las fases se disponen en serie, las tensiones mecánicas y desplazamiento eléctrico mantienen el valor en ambas fases. En las direcciones en que las fases se disponen en paralelo, las tensiones y desplazamiento eléctrico correspondientes al compuesto se obtienen como superposición de los correspondientes a cada fase multiplicados por su fracción de volumen. De manera similar, las deformaciones mecánicas y campo eléctrico en las direcciones en que las fases se disponen en paralelo, mantienen el valor en ambas fases y en las direcciones en que las fases se disponen en serie, sus valores se obtienen por superposición de la contribución de cada fase multiplicada por su correspondiente proporción de volumen. En la Tabla 1 se presenta, en forma resumida, el comportamiento de las variables involucradas explicado anteriormente y la manera de calcularlas.

Variable	Paralelo	Serie
σ	$\sum k_c \sigma_c$	<i>Iguales</i>
D	$\sum k_c D_c$	<i>Iguales</i>
ε	<i>Iguales</i>	$\sum k_c \varepsilon_c$
\vec{E}	<i>Iguales</i>	$\sum k_c \vec{E}_c$

Tabla 1: Modo de combinación de variables.

En los desarrollos siguientes se ordenan las componentes de los tensores en forma matricial/vectorial y se utilizan las componentes ingenieriles del tensor de deformaciones.

Se agrupan las componentes de tensión y desplazamiento eléctrico en el vector S y las de deformación y campo eléctrico en E , mientras que en la matriz C se agrupan las propiedades

constitutivas electromecánicas.

$$S = \begin{Bmatrix} \sigma \\ D \end{Bmatrix}; \quad E = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \vec{E} \end{Bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C^E & -e^T \\ e & \chi^\varepsilon \end{bmatrix} \quad (8)$$

La ecuación constitutiva se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^E & -e^T \\ e & \chi^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \vec{E} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C^E & -e^T \\ e & \chi^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P^r \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$S = CE - C \begin{Bmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P^r \end{Bmatrix} = C\hat{E} - \begin{Bmatrix} 0 \\ P^r \end{Bmatrix} \quad (10)$$

donde se introduce el siguiente cambio de variables:

$$\hat{E} = E - \begin{Bmatrix} \varepsilon^r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Se ordenan las componentes de S y E de la siguiente manera:

$$S^* = \alpha^S S + \alpha^E E \quad (12)$$

$$E^* = \alpha^E S + \alpha^S E \quad (13)$$

donde α^S es un tensor diagonal que tiene 1 ó 0 en la diagonal principal según la componente de tensión (deformación) o desplazamiento eléctrico (campo eléctrico) correspondiente trabaje en paralelo o en serie respectivamente. El tensor α^E es diagonal con 1 ó 0 en su diagonal principal, según la componente de tensión (deformación) o desplazamiento eléctrico (campo eléctrico) trabaje en serie o paralelo respectivamente. Se cumple $\alpha^S + \alpha^E = I$.

De este modo, se separan las variables que mantienen igual valor en ambas fases de aquellas que se obtienen por combinación de la contribución de cada fase.

En S^* se agrupan las componentes de tensión y desplazamiento eléctrico que trabajan en paralelo y las componentes de deformación y campo eléctrico que trabajan en serie. De manera análoga, en E^* se agrupan las componentes de deformación y campo eléctrico que trabajan en paralelo y las componentes de tensión y desplazamiento eléctrico que trabajan en serie.

De manera similar vale que:

$$S = \alpha^S S^* + \alpha^E E^* \quad (14)$$

$$E = \alpha^E S^* + \alpha^S E^* \quad (15)$$

La ecuación constitutiva del compuesto se escribe de la siguiente manera:

$$S = CE - S^r \quad (16)$$

El tensor C correspondiente al compuesto se calcula con la siguiente expresión:

$$C = (\alpha^S C^* + \alpha^E) (\alpha^E C^* + \alpha^S)^{-1} \quad (17)$$

donde C^* del compuesto, en función de los C_c^* correspondientes a cada componente, se calcula de la siguiente manera:

$$C^* = \sum_{c=1} k_c C_c^* \quad (18)$$

donde:

$$C_c^* = (\alpha^S C_c + \alpha^E) (\alpha^E C_c + \alpha^S)^{-1} \quad (19)$$

Las cantidades remanentes del compuesto se calculan con:

$$S^r = (\alpha^S - C + \alpha^E) S^{*r} \quad (20)$$

donde S^{*r} se determina, en función de las deformaciones y polarización remanentes correspondientes a cada componente, de la siguiente manera:

$$S^{*r} = \sum_{c=1} k_c \left([C_c^* \alpha^E - \alpha^S] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ P^r \end{array} \right\}_c + [C_c^* \alpha^S - \alpha^E] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^r \\ 0 \end{array} \right\}_c \right) \quad (21)$$

Para el análisis del compuesto piezoeléctrico en presencia de no linealidades del comportamiento material, tales como conmutación de la polarización y saturación, es necesario conocer las deformaciones y campo eléctrico de las componentes en términos de las deformaciones y campo eléctrico del compuesto. A partir de la condición $E_c^* = E^*$ y de las expresiones 14 y 15, se puede escribir para cada componente:

$$E_c = \phi_c E + \tilde{E}_c^r \quad (22)$$

donde:

$$\phi_c = (\alpha^E C_c^* + \alpha^S) (\alpha^E C_c^* + \alpha^S)^{-1} \quad (23)$$

y

$$\tilde{E}_c^r = \phi_c \alpha^E S^{*r} - \alpha^E S_c^{*r} \quad (24)$$

3.2.1. Esquema de cálculo

En la sucesión de cálculos correspondientes al compuesto, se identifican claramente un proceso de descomposición y otro de composición.

A partir de las variables nodales (desplazamientos mecánicos y potencial eléctrico) se determinan las deformaciones y campo eléctrico a que está sometido el compuesto. A partir de allí, se debe descomponer estas cantidades hasta determinar los correspondientes valores que solicitan a las fibras piezoeléctricas. Con estos valores se procede a la integración de las ecuaciones constitutivas. Luego de actualizar las propiedades materiales y las cantidades remanentes, se determinan los nuevos valores de tensiones y desplazamiento eléctrico. Esto se utiliza como punto de partida para realizar la recomposición para determinar los valores correspondientes al compuesto. Este proceso se esquematiza en la Figura 5, usando los mismos colores que en la Figura 4.

Tratándose de un modelo no lineal (el término \tilde{E}_c^r de la Ecuación 22 no se conoce a priori) el proceso de descomposición se puede hacer mediante un procedimiento iterativo (Luccioni, 2006), o mediante un avance explícito, enfoque utilizado en este trabajo.

Dentro del esquema de cálculo juega un papel importante la integración de la ecuación constitutiva de los materiales constituyentes. En el caso de los compuestos piezoeléctricos estudiados en este trabajo la matriz se considera lineal elástica, por cuanto su ecuación constitutiva no requiere proceso de integración numérica. A continuación se describe el algoritmo desarrollado para la integración numérica del modelo fenomenológico utilizado para las fibras.

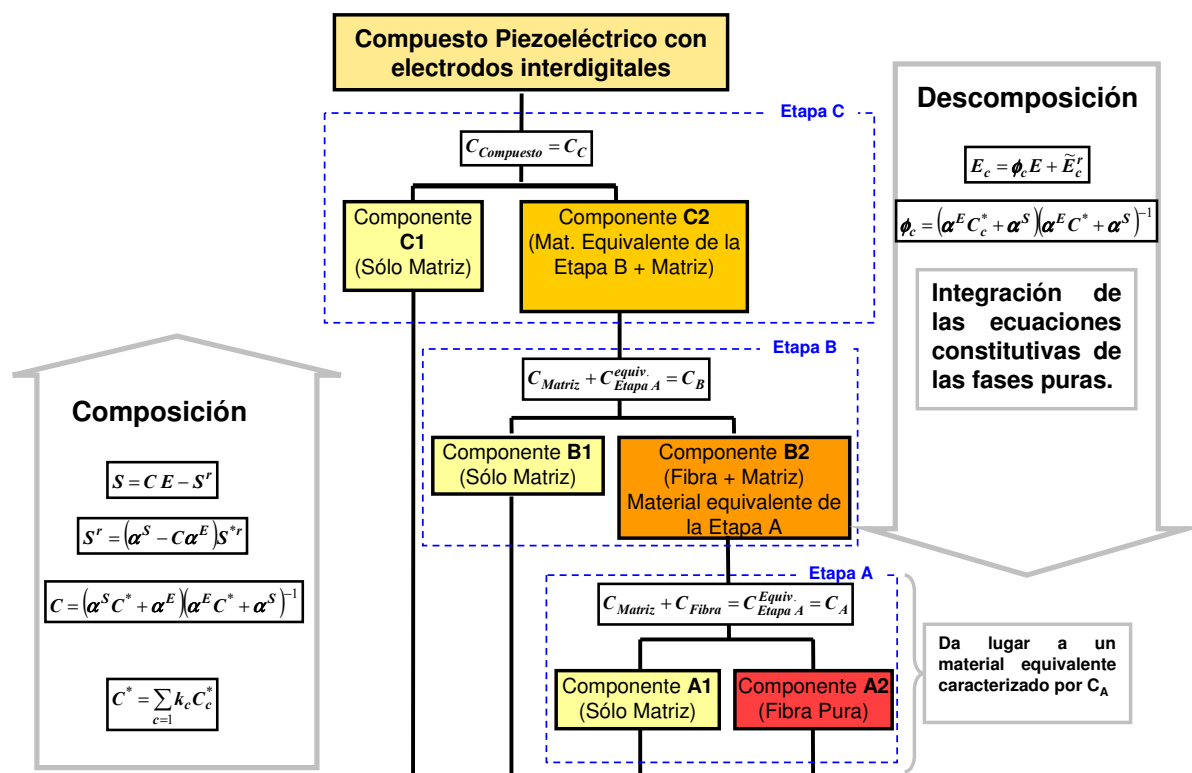


Figura 5: Esquema de composición y descomposición.

3.2.2. Integración de la ecuación constitutiva de las fibras

La integración de la ecuación constitutiva consiste en reemplazar la ecuación diferencial por una regla que permita realizar cálculos para incrementos finitos de carga. Durante el cálculo, se deben actualizar las deformaciones, la polarización, el campo eléctrico, las tensiones, el desplazamiento eléctrico y las variables internas (ϵ_{ij}^r y P_i^r).

En el contexto del método de elementos finitos, en cada punto de cuadratura (punto de Gauss) se lleva a cabo la integración numérica temporal de la ecuación constitutiva. Esta *integración incremental* del modelo de conmutación se considera como un proceso impulsado por la deformación total y por el campo eléctrico aplicado, que constituyen las variables básicas independientes de la formulación de elementos finitos.

Los algoritmos de retorno mapeado son muy efectivos y por lo tanto se usan extensamente para integrar ecuaciones constitutivas no lineales (Simo y Taylor (1985), Simo y Hughes (1998), Semenov et al. (2010)).

En este trabajo se utiliza un algoritmo de retorno mapeado de tipo *cutting plane* para integrar el modelo constitutivo fenomenológico empleado para describir el comportamiento de las fibras ferroeléctricas.

Se considera conocido, el estado del continuo en el punto x y tiempo actual t_n y está completamente definido por:

$$\{\epsilon(x)_{(t_n)}, \mathbf{E}(x)_{(t_n)}, \epsilon^r(x)_{(t_n)}, \mathbf{P}^r(x)_{(t_n)}, \mathbf{S}_c(x)_{(t_n)}, \mathbf{E}_c(x)_{(t_n)}\} \quad (25)$$

Un incremento dado de la deformación total y/o del campo eléctrico aplicado conduce al continuo a un nuevo estado en el instante de tiempo $t_n + \Delta t$.

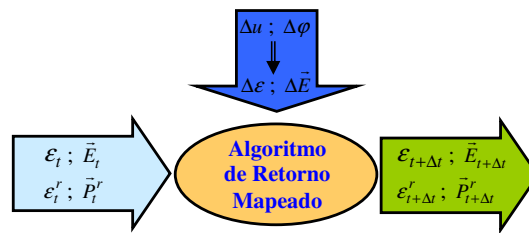


Figura 6: Entradas y salidas del algoritmo de retorno mapeado.

Se considera el problema de actualizar las variables básicas al nuevo instante de tiempo $t_n + \Delta t$ para valores prescriptos de deformaciones y campo eléctrico en una manera consistente con el modelo constitutivo considerado. Como se trata de un modelo no lineal, se utiliza para ello un procedimiento iterativo.

En cada iteración $k + 1$ se plantea el cumplimiento de la condición de conmutación,

$$G_{t+\Delta t}^{k+1} - G_c = 0 \quad (26)$$

donde la forma particular de la función de conmutación G se define para cada modelo y G_c es el valor umbral de conmutación. En este trabajo se utiliza el modelo fenomenológico de [Huber y Fleck \(2001\)](#) y aspectos particulares de su implementación pueden encontrarse en [Guennam \(2010\)](#).

4. ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO BAJO COMPORTAMIENTO NO LINEAL MATERIAL

En esta sección se utilizan el elemento finito y el modelo material descriptos en los apartados anteriores para estudiar los efectos del comportamiento no lineal del material en la respuesta estructural. Se utiliza el programa de elementos finitos de uso general ABAQUS ([SIMULIA, 2005](#)) donde se incluye el elemento finito formulado combinado con el modelo material en una subrutina de usuario (UEL) ([Guennam, 2010](#)).

Se considera, primero, un actuador en dos condiciones diferentes, por un lado, funcionando libremente y, por otro lado, adherido entre dos placas de aluminio, en ambos casos, bajo la aplicación de potenciales eléctricos. Para estos dos casos se considera solo la respuesta estática.

Luego, se estudia el comportamiento estático y dinámico de una viga de aluminio en voladizo, con actuadores adheridos en la mitad más próxima al empotramiento.

4.1. Actuador solo

El actuador está construido con un compuesto piezoeléctrico polarizado con electrodos interdigitales. Las propiedades materiales y las características del compuesto se detallan en la [Tabla 2](#)

La geometría analizada corresponde a un actuador rectangular de 10mm de ancho, 15mm de longitud y $0,3\text{mm}$ de espesor. Se utiliza, para el análisis, un solo elemento de cáscara piezoeléctrica, ya que el modo de operación consiste simplemente en deformaciones en el plano del actuador. Se introducen condiciones de borde mecánicas para permitir deformaciones libres en el plano del elemento.

Se considera una etapa inicial de polarización del dispositivo, para lo cual se impone, en el nodo eléctrico, un potencial eléctrico de valor máximo 3600 Volts. Luego se considera una etapa de trabajo y, finalmente, la despolarización originada por exceso de voltaje.

Propiedad	Valor
Fibra	
Módulo de Young E_f (GPa)	48.8
Módulo de Poisson ν_f	0.3
Permitividad dieléctrica κ_f^σ ($10^{-8} F/m$)	4.2
Acoplamiento Piezoeléctrico	
d_{33} ($10^{-12} mV^{-1}$)	450.2
d_{31} ($10^{-12} mV^{-1}$)	-225.1
d_{15} ($10^{-12} mV^{-1}$)	563.3
Matriz	
Módulo de Young E_m (GPa)	3.0
Módulo de Poisson ν_m	0.25
Permitividad dieléctrica κ_m^σ ($10^{-9} F/m$)	2.1
Construcción del compuesto	
Proporción de fibra	80 %
Separación de electrodos (mm)	1,8

Tabla 2: Propiedades materiales para el actuador piezoeléctrico.

La Figura 7 muestra la deformación longitudinal del extremo libre del actuador piezoeléctrico. En la misma figura se presenta la variación del potencial eléctrico aplicado. En la primera parte de la simulación, entre 0 y 1400 *Volts* aproximadamente, el desplazamiento es nulo. Luego, al alcanzarse el umbral para el cual comienza la orientación de los dipolos, empieza a manifestarse el acoplamiento electromecánico. Se observa que rápidamente se alcanza un valor considerable de desplazamiento y, a partir de allí, éste empieza a saturarse, hasta llegar al valor máximo (punto A).

El comportamiento durante la descarga es prácticamente lineal. En el punto B, para un valor nulo del potencial eléctrico, se registra una deformación remanente de 650 *ppm*. El potencial eléctrico sigue bajando hasta llegar a cierto valor de campo eléctrico de repolarización durante el cual se intensifica el comportamiento no lineal. En el punto B comienza a aumentar el potencial eléctrico hasta llegar a un punto en el cual se producen nuevas conmutaciones y, finalmente, se alcanza el máximo valor en el punto C.

Luego de la etapa de polarización inicial, el dispositivo queda con polarización y deformaciones remanentes. Como consecuencia de esto, se manifiesta un acoplamiento electromecánico que puede ser aprovechado en etapas posteriores de funcionamiento. Estas etapas de funcionamiento se muestran en la Figura 7 en color azul.

La Figura 7 muestra que excesivos valores de campo eléctrico reverso producen inversión del sentido del acoplamiento electromecánico, aspecto muy importante en el diseño. La Figura 7 muestra que, al excederse cierto límite de voltaje (punto D'), el acoplamiento electromecánico logrado con el proceso de polarización inicial se pierde. A partir de este punto, el comportamiento del dispositivo sigue el camino marcado en color rojo.

Una vez polarizado el dispositivo y retirado el campo eléctrico, punto B de la Figura 7, se puede considerar este estado como la nueva condición inicial para la operación posterior del dispositivo. Bajo estas circunstancias, las deformaciones totales se pueden medir respecto de este nuevo punto y como se muestra en la Figura 7, los módulos de las deformaciones máximas bajo potenciales positivos, son mayores a los correspondientes a valores negativos a lo largo de la trayectoria entre los puntos D y C en color azul. Es decir, para evitar repolarización y pérdida del

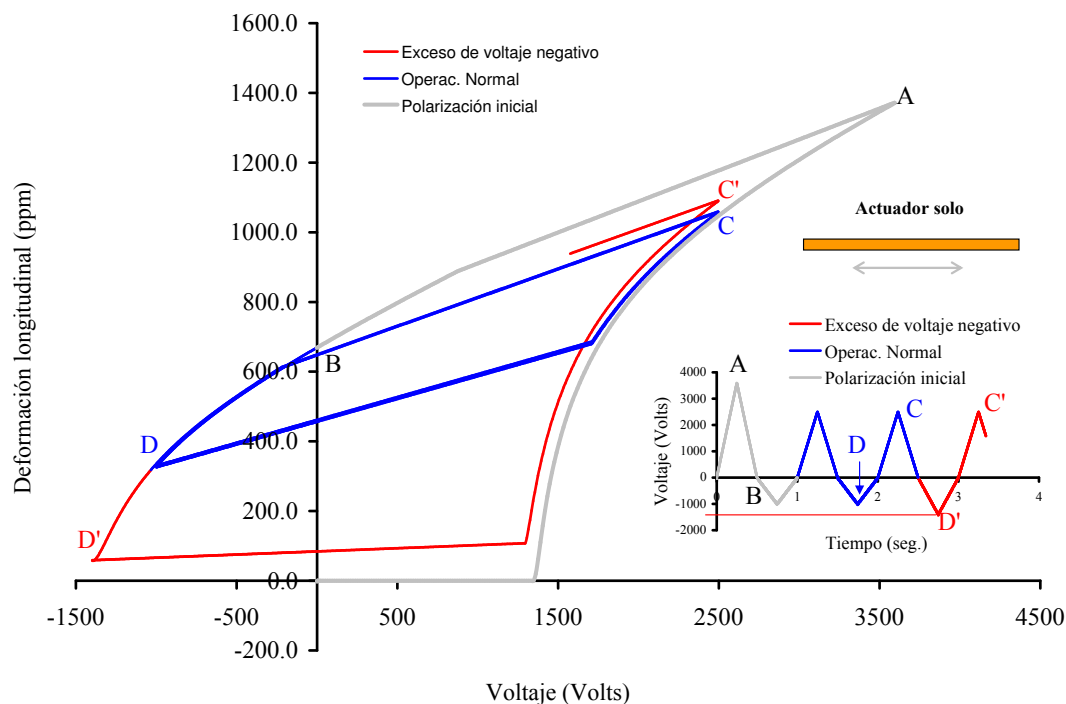


Figura 7: Respuesta de un actuador solo. Deformación longitudinal.

acoplamiento electromecánico, se deben limitar los voltajes negativos. Los positivos se limitan por cuestiones operativas relacionadas al manejo de altas tensiones eléctricas.

La carga eléctrica acumulada en los electrodos se muestra en la Figura 8, donde se observa la variación de esta cantidad en función del potencial eléctrico aplicado y la correspondencia con los puntos que marcan las distintas etapas de los procesos de polarización inicial, operación y despolarización destacados en la Figura 7.

4.2. Actuador adherido a una placa de aluminio

A continuación se analiza el mismo actuador del ejemplo anterior, sometido a la misma excitación, pero adherido a placas de aluminio de $0,5\text{mm}$ de espesor cada una, formando un sandwich con el actuador en el centro. Para el aluminio se usa un módulo de elasticidad $E = 71\text{GPa}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$. El proceso de polarización se realiza luego de adherir el dispositivo a la estructura pasiva. La deformación longitudinal del conjunto se presenta en la Figura 9, donde se incluye, además, un esquema de la sección transversal del sandwich analizado.

En la Figura 9 se refleja la influencia de la estructura pasiva sobre la respuesta del actuador. La deformación máxima es sensiblemente menor que en el caso libre y las deformaciones remanentes son prácticamente nulas en este caso. Sin embargo al igual que en el caso anterior, al disminuir el voltaje más allá de los -1000 Volts, aproximadamente, se produce la despolarización del dispositivo y la consiguiente pérdida de acoplamiento electromecánico.

Los ejemplos presentados reflejan que, ante la aplicación de voltajes negativos de elevado valor absoluto, un dispositivo ya polarizado y en condiciones de ser utilizado puede sufrir despolarización y pérdida del acoplamiento electromecánico. Para evitar esto, es necesario conocer

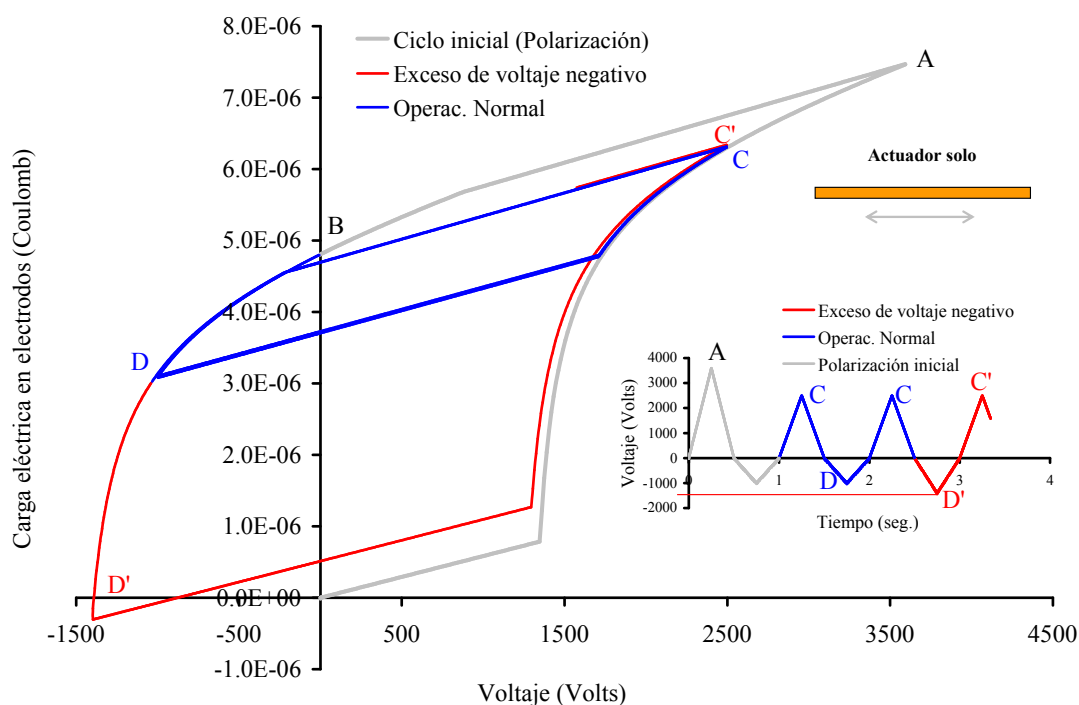


Figura 8: Respuesta de un actuador solo. Carga eléctrica en los electrodos.

estos límites de operación y disponer de herramientas para determinar si los mismos son suficientes para cumplir los objetivos en una aplicación tecnológica determinada.

4.3. Viga de aluminio con actuadores piezoeléctricos - Análisis estático no lineal

En esta sección se utilizan las herramientas propuestas, para estudiar los efectos del comportamiento no lineal del material en la respuesta de una estructura activa. Se presenta el análisis de una viga de aluminio en voladizo con actuadores piezoeléctricos adheridos a la parte superior e inferior en la mitad más próxima al empotramiento.

En la Figura 10 se presenta la geometría analizada. En la misma figura se muestra además, la malla de elementos finitos. En la zona activa se usa el elemento formulado, mientras que la zona pasiva se discretiza con el elemento nativo de cáscara (S4) de ABAQUS (SIMULIA, 2005). La Figura 11 muestra la sección transversal de la viga y sus dimensiones.

Las propiedades materiales para el compuesto piezoeléctrico se detallan en la Tabla 2. Para el aluminio se usa un módulo de elasticidad $E = 71\text{GPa}$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$.

Se considera que los actuadores piezoeléctricos están adheridos sobre la viga, en estado no polarizados. Por lo tanto, se realiza un proceso de polarización inicial similar a los casos analizados anteriormente. Como se muestra en los apartados 4.1 y 4.2, para evitar repolarización del material y pérdida del acoplamiento, se limitan los valores negativos de potenciales eléctricos. Es posible, combinar adecuadas señales de excitación de los distintos dispositivos para que los mismos operen en conjunto y, al mismo tiempo, asegurar que lo hagan dentro de límites aceptables para mantener su integridad.

La polarización inicial se lleva a cabo sometiendo los actuadores inferiores y superiores a

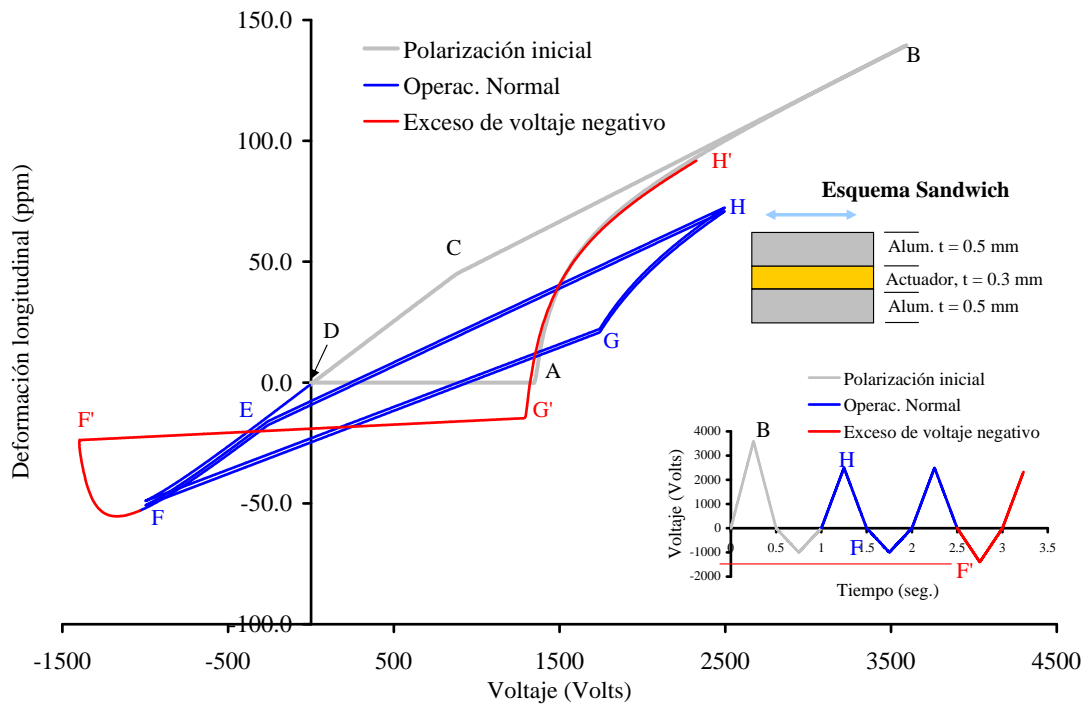


Figura 9: Respuesta de un actuador adherido a dos placas de aluminio de 0,5mm de espesor cada una. Deformación longitudinal.

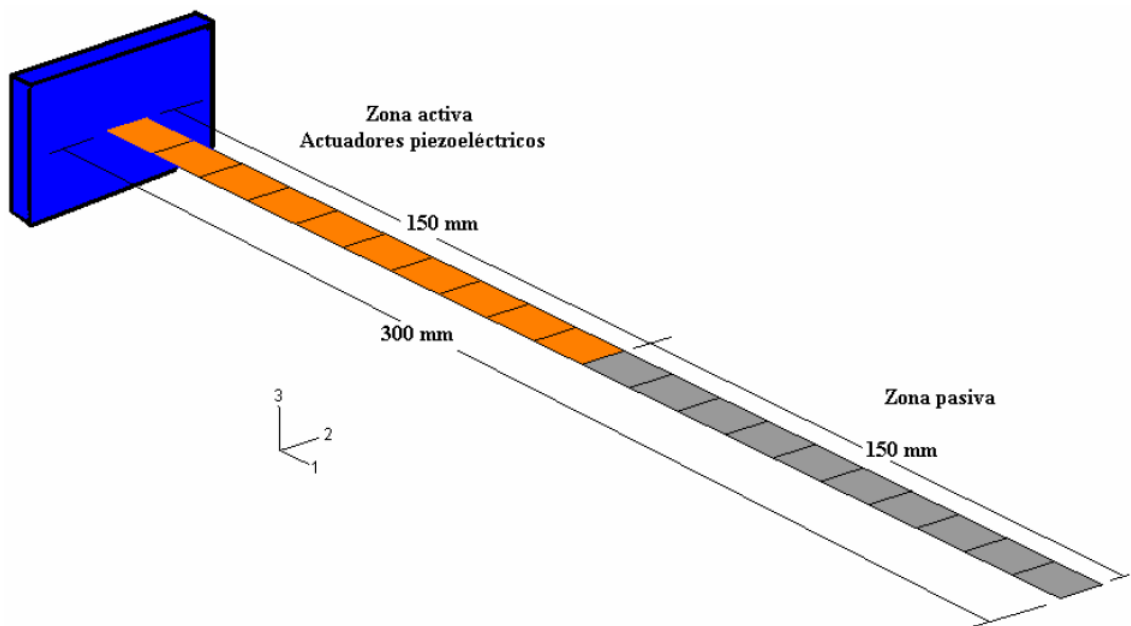


Figura 10: Viga voladizo. Geometría y malla de elementos finitos

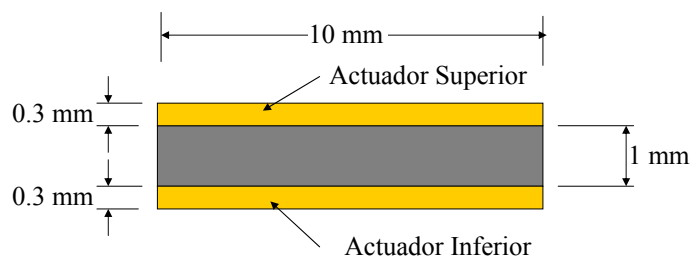


Figura 11: Sección transversal de la viga voladizo con actuadores en la cara superior e inferior

idénticos potenciales eléctricos modulados con una señal sinusoidal de valor medio igual a la amplitud, para asegurar voltajes positivos. Ambos actuadores se polarizan simultáneamente, por lo tanto la respuesta inicial de la viga es una elongación en la dirección del eje x_1 . A partir de este punto, los voltajes introducidos en los nodos eléctricos de los actuadores superiores e inferiores se modulan con señales sinusoidales desfasadas 180° , también de valor medio igual a la amplitud. El desfase produce una respuesta simétrica en flexión, que se observa en la Figura 12.

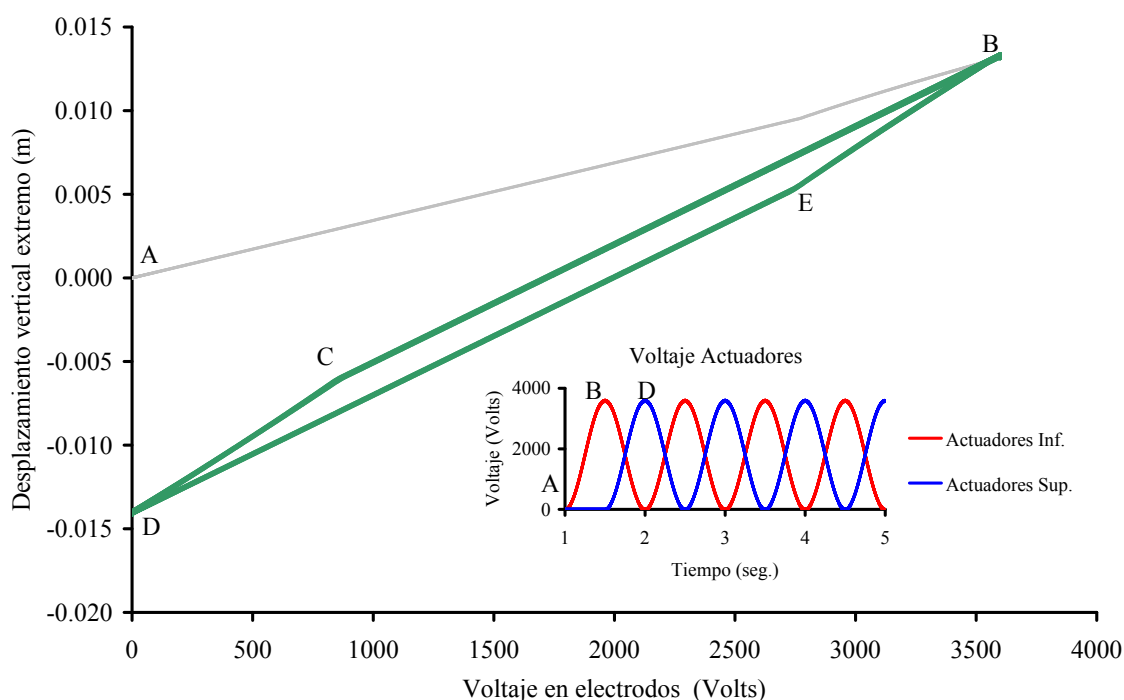


Figura 12: Viga voladizo. Desplazamiento vertical del extremo libre.

En la Figura 12 se presenta, también, la variación temporal de los voltajes de alimentación de los actuadores. Allí se grafica el desplazamiento vertical del extremo libre en función del voltaje aplicado a los actuadores inferiores. A pesar de manifestarse algunos efectos de repolarización para potenciales de 800 y 2700 *Volts*, el acoplamiento electromecánico no presenta grandes variaciones. Sin embargo, aparece una especie de lazo de carga y descarga. Como se señala en los apartados anteriores, utilizando estos resultados pueden cuantificarse los efectos del comportamiento no lineal para cada aplicación particular.

Limitando los voltajes de alimentación, es posible reducir el lazo que se forma durante la

carga y descarga para obtener así una respuesta prácticamente lineal. Con frecuencia es de gran utilidad conocer dicho rango, ya sea para la extrapolación de resultados o para el diseño del sistema de control.

4.4. Viga de aluminio con actuadores piezoeléctricos - Análisis dinámico no lineal

A continuación, se considera el análisis dinámico de la viga analizada en el apartado anterior pero con actuadores piezoeléctricos adheridos sólo a la cara superior de la zona más cercana al empotramiento. Los electrodos de los actuadores piezoeléctricos se someten a un potencial de alimentación de valor máximo 2000 *Volts* y modulados por una señal sinusoidal de frecuencia 2 *Hz* y valor medio nulo.

La Figura 13 muestra el desplazamiento vertical del extremo libre de la viga en función del tiempo. A efectos comparativos, se incluye en la misma figura, la respuesta del mismo modelo pero bajo comportamiento lineal de los actuadores piezoeléctricos, con los valores de acoplamiento correspondientes al estado de máxima polarización remanente.

Debido a que en este caso no se limita el potencial eléctrico, durante la operación de los dispositivos piezoeléctricos, se manifiestan los fenómenos de conmutación de la polarización. Como consecuencia, se observa que la respuesta de la viga bajo comportamiento no lineal, contiene contribuciones de estos fenómenos. Una simple inspección de la Figura 13 refleja que los actuadores siempre tienden a flexionar la estructura hacia arriba, los desplazamientos negativos se dan por efectos dinámicos. Comparando los resultados obtenidos con el modelo lineal con los correspondientes a la respuesta material no lineal, se observa que la respuesta lineal es, naturalmente, *más pura* en cuanto al contenido de frecuencias.

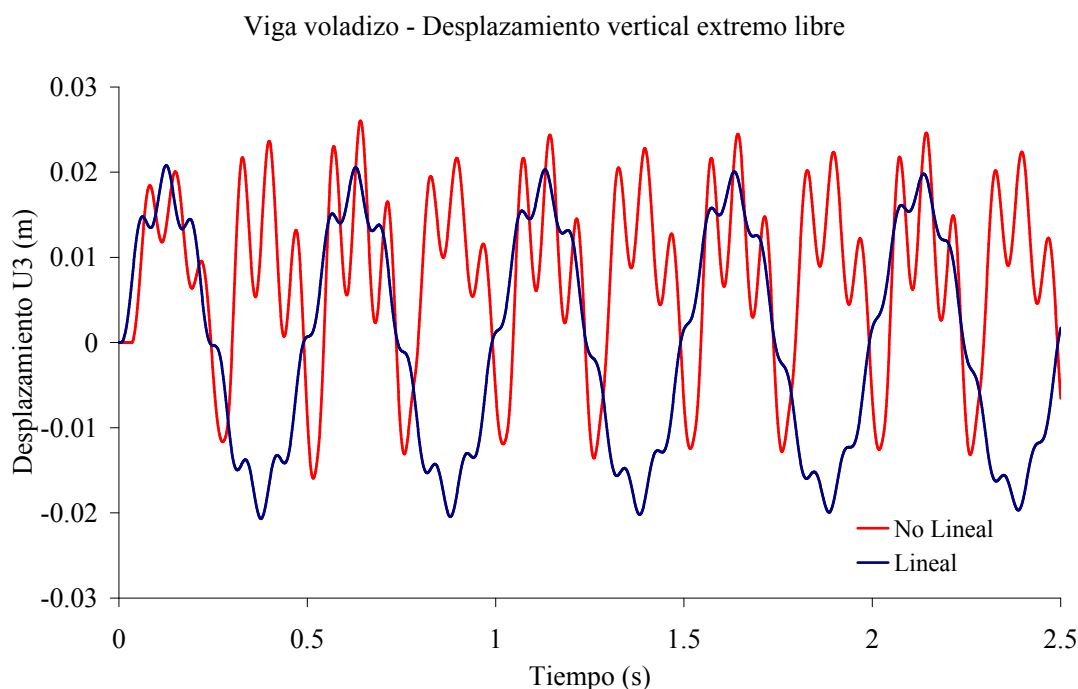


Figura 13: Respuesta dinámica temporal no lineal de la viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos. Desplazamiento mecánico vertical del extremo libre.

La respuesta temporal de la carga eléctrica en los electrodos se muestra en la Figura 14. Allí se refleja que, ante la presencia de fenómenos de conmutación ferroeléctrica, los valores de

carga eléctrica experimentan fuertes aumentos respecto al caso de comportamiento lineal.

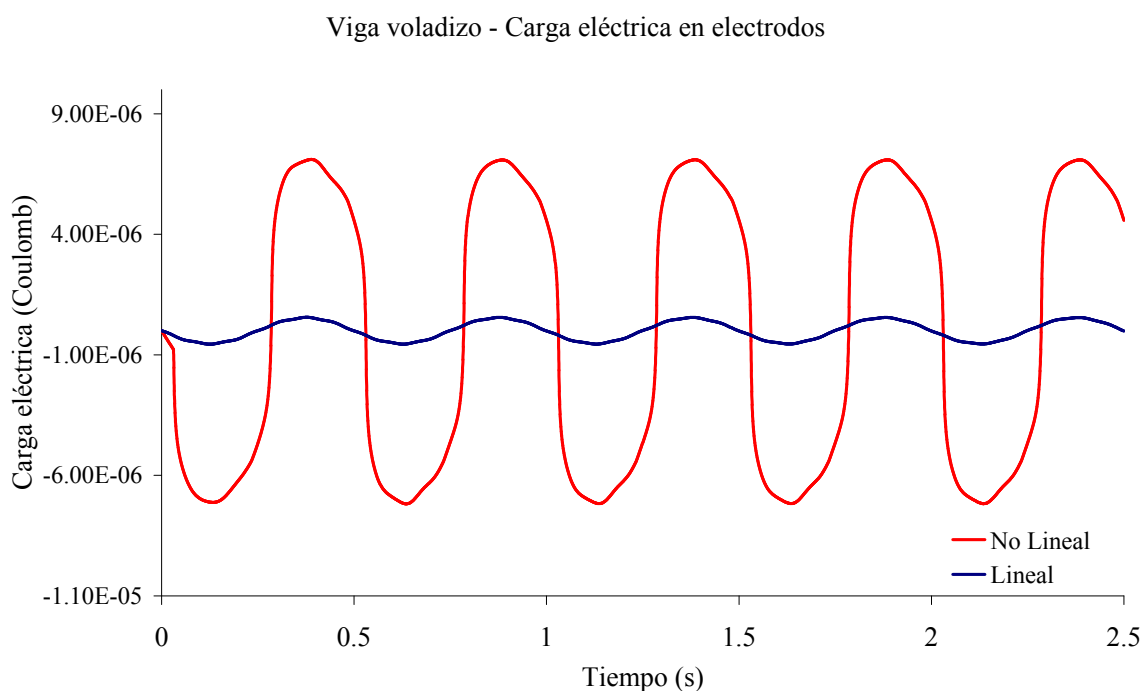


Figura 14: Respuesta dinámica temporal no lineal de la viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos. Carga eléctrica en los electrodos.

La Figura 14 muestra, además, la distorsión en la variación temporal de la carga eléctrica que aparece en los electrodos cuando se producen fenómenos de conmutación. En los casos en que se utilizan los dispositivos como sensores, es importante conocer y cuantificar esta distorsión.

Para cuantificar la influencia de los fenómenos no lineales en la respuesta dinámica y comparar con el caso lineal se usa la Transformada Rápida de Fourier. La Figura 15 muestra una comparación entre los valores absolutos de las transformadas de las respuestas en función de la frecuencia.

El contenido de frecuencias de la respuesta, considerando los fenómenos no lineales es, naturalmente, mayor. Aparecen armónicos de frecuencias que son múltiplos del doble de la frecuencia de excitación ($2Hz$). Esto se debe a que al conmutar los dipolos y aparecer los fenómenos de repolarización, el acoplamiento electromecánico también conmuta y las deformaciones siempre mantienen el mismo signo. Por lo tanto en un período de excitación, se producen dos períodos de deformación. La frecuencia natural correspondiente al primer modo normal en condiciones de corto circuito de los electrodos es de $13,9Hz$.

5. CONCLUSIONES

Los ejemplos de aplicación presentados muestran que las herramientas numéricas utilizadas en este trabajo permiten determinar los rangos de trabajo de los dispositivos y sistemas estructurales estudiados.

Siguiendo un orden lógico, se estudia, primero, el proceso de polarización inicial de un dispositivo piezoeléctrico-ferroeléctrico. Luego se analiza el dispositivo ya polarizado y en condiciones de ser utilizado, reflejando que el mismo puede sufrir despolarización y pérdida del acoplamiento electromecánico. Para evitar esto, es necesario conocer estos límites de operación

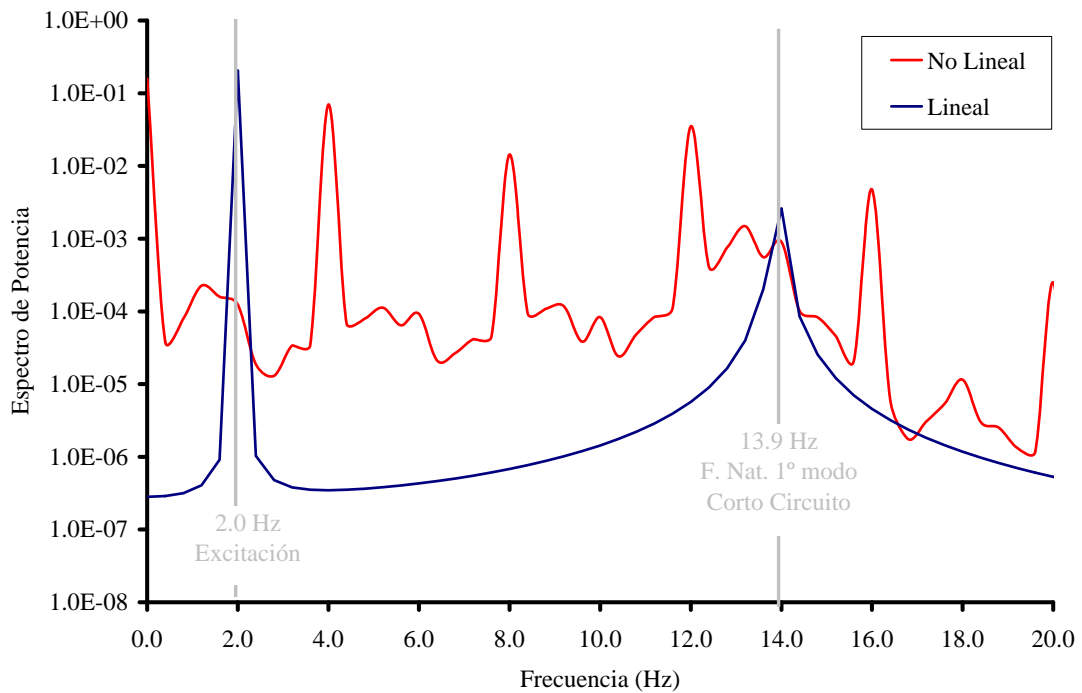


Figura 15: Respuesta en frecuencia de la viga en voladizo con actuadores piezoeléctricos. Módulo de la transformada en función de la frecuencia.

y disponer de herramientas para determinar si los mismos son suficientes para cumplir los objetivos en una aplicación tecnológica determinada. Con las herramientas numéricas estudiadas se pueden determinar qué excitaciones se pueden introducir en cada sector de la estructura activa para que los dispositivos correspondientes trabajen en conjunto colaborando con un determinado modo de operación u objetivo.

Finalmente, a partir de las simulaciones dinámicas realizadas, se pudo cuantificar la influencia de los efectos no lineales del comportamiento material en la respuesta estructural. Los resultados reflejan el mayor contenido de armónicos en la respuesta al aparecer los fenómenos de repolarización e histéresis.

AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen el apoyo económico del CONICET.

REFERENCIAS

- Ahmad S., Irons B.M., y Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:419–451, 1970.
- Balamurugan V. y Narayanan S. A piezolaminated composite degenerated shell finite element for active control of structures with distributed piezosensors and actuators. *Smart Materials and Structures*, 17:1–18, 2008.
- Bathe K. *Finite Elements Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- Bathe K.J. y Dvorkin E.N. A formulation of general shell elements - The use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:697–722, 1986.

- Bent A. *Active Fiber Composites for Structural Actuation. PhD Thesis*. Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- Bhattacharya P., Suhail H., y Sinha P. Finite element analysis and distributed control of laminated composite shells using LQR/IMSC approach. *Aerospace Science and Technology*, 6:273–281, 2002.
- Bilgen O., Kochersberger K., Inman D., y Ohanian O.J.I. Macro-fiber composite actuated simply supported thin airfoils. *Smart Materials and Structures*, 19:1–11, 2010.
- Choi S.C., Park J.S., y Kim J.H. Vibration control of pre-twisted rotating composite thin-walled beams with piezoelectric fiber composites. *Journal of Sound and Vibration*, 300(1-2):176 – 196, 2007.
- Guennam A.E. *Modelo para compuestos piezoeléctricos utilizados en control activo - Tesis de Maestría*. Universidad Nacional de Tucumán, 2005.
- Guennam A.E. *Modelo Numérico para Cáscaras con Compuestos Piezoeléctricos - Tesis de Doctorado*. Universidad Nacional de Tucumán, 2010.
- Guennam A.E. y Luccioni B.M. Fe modeling of a closed box beam with piezoelectric fibre composites patches. *Smart Materials and Structures*, 15:1605 – 1615, 2006.
- Guennam A.E. y Luccioni B.M. Piezoelectric shell fe for the static and dynamic analysis of piezoelectric fibre composite laminates. *Smart Materials and Structures*, 18:095044 (12pp), 2009.
- Huber J.E. y Fleck N.A. Multi-axial electrical switching of a ferroelectric: theory versus experiment. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:785–811, 2001.
- Kögl M. y Bucalem M.L. Analysis of smart laminates using piezoelectric mitc plate and shell elements. *Comput. Struct.*, 83:1153–1163, 2005a.
- Kögl M. y Bucalem M.L. A family of piezoelectric mitc plate elements. *Comput. Struct.*, 83:1277–1297, 2005b.
- Luccioni B. Constitutive model for fiber-reinforced composite laminates. *Journal of Applied Mechanics*, 73:1–10, 2006.
- Muliana A. A micromechanical formulation for piezoelectric fiber composites with nonlinear and viscoelastic constituents. *Acta Materialia*, 58:3332–3344, 2010.
- Semenov A.S., Liskowsky A.C., y H. B. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81:1298–1340, 2010.
- Simo J. y Hughes T. *Computational Inelasticity*, volumen 7. Springer, New York, 1998.
- Simo J. y Taylor R.L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:101–118, 1985.
- SIMULIA. *ABAQUS Standard User's Manual V6.6*. SIMULIA, 2005.