

INCIDENCIA DE LA CONFORMACIÓN ANISOTRÓPICA DE PLACAS RECTANGULARES DELGADAS SOBRE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN

Patricia M. Ciancio^a, Leonel O. Pico^a, Carlos A. Rossit^b

^aFacultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Av. Del Valle 5737, 7400 Olavarría, Argentina, pciancio@fio.unicen.edu.ar, lpico@fio.unicen.edu.ar,
<http://www.fio.unicen.edu.ar>

^bDepartamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, CONICET, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, carossit@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>

Palabras Clave: Materiales compuestos, fibras, matriz, vibraciones naturales, elementos finitos.

Resumen. Los materiales modernos se asocian en general con materiales no metálicos. La incesante búsqueda de materiales que tengan un comportamiento apropiado frente a distintos escenarios con relativamente bajo costo ha dado lugar a investigaciones sobre diferentes aspectos tanto desde la tecnología de los materiales como desde el ámbito estructural. Es así que los denominados materiales compuestos son vastamente utilizados en ingeniería civil, mecánica, naval, aeroespacial, entre otras. La ventaja de ellos es que si están bien diseñados, usualmente exhiben mejores cualidades que sus componentes y a menudo algunas otras cualidades que ninguno de los constituyentes posee. Algunas de las propiedades que se pueden mejorar con un material compuesto son su resistencia, rigidez, resistencia a la corrosión, resistencia a altas temperaturas, peso, etc. Naturalmente, no todas esas propiedades se logran al mismo tiempo. Se trata de contar con materiales que sustenten las características necesarias acordes con los requisitos de diseño y funcionalidad. Examinar sus propiedades mecánicas es de utilidad para poder determinar su comportamiento.

De uso común son los materiales compuestos de fibras embebidas en una matriz. Las placas conformadas con dichos materiales son muy usuales en escenarios de operación donde las variables dinámicas desempeñan un rol fundamental.

En este trabajo se analiza la incidencia que ejercen el tipo de fibra, el porcentaje incluido en el compuesto, su densidad y la de la matriz, sobre las frecuencias de vibraciones transversales libres de placas rectangulares delgadas, utilizando un software que aplica el Método de los Elementos Finitos.

1 INTRODUCCIÓN

Los materiales modernos se asocian en general con materiales no metálicos. La incesante búsqueda de materiales que tengan un comportamiento apropiado frente a distintos escenarios con relativamente bajo costo ha dado lugar a investigaciones sobre diferentes aspectos tanto desde la tecnología de los materiales como desde el ámbito estructural. Es así que los denominados materiales compuestos o *composites* son ampliamente utilizados en ingeniería civil, mecánica, naval, aeroespacial, entre otras, debido a sus excelentes relaciones rigidez/peso y resistencia/peso. La ventaja de ellos es que si están bien diseñados, usualmente exhiben mejores cualidades que sus componentes por separado. Algunas de las propiedades que se pueden mejorar con un material compuesto son su resistencia, rigidez, resistencia a la corrosión, resistencia a altas temperaturas, peso, etc. Naturalmente, no todas esas propiedades se logran al mismo tiempo. Se trata de contar con materiales que sustenten las características necesarias acordes con los requisitos de diseño y funcionalidad. Examinar sus propiedades mecánicas es de utilidad para poder determinar su comportamiento.

Las aproximaciones básicas de la elasticidad se caracterizan por satisfacer en forma más rigurosa las leyes físicas que en la mecánica de materiales. En esta última se hacen ciertas suposiciones simplificadoras sobre el comportamiento mecánico de un material compuesto con el fin de obtener una solución eficaz. Esas suposiciones no pueden ser arbitrarias. Así es que sobre estas bases se predicen las características o propiedades del material compuesto. Por ejemplo, el módulo de elasticidad de un material compuesto debe determinarse en función de las propiedades de las fibras y matriz que lo forman, y en términos de los volúmenes relativos de fibra y matriz. Las fases mantienen sus identidades.

Una de las más importantes conclusiones de algunos trabajos como el de [Chamis Sendeckyj, \(1968\)](#) es que la homogeneidad macroscópica puede no existir para materiales compuestos, es decir que se requerirían consideraciones de la microestructura.

Tradicionalmente, el conocimiento teórico del comportamiento de este tipo de materiales era reducido, ya que se basaba en datos obtenidos experimentalmente. Dado que la posibilidad de obtener compuestos distintos es prácticamente ilimitada, la caracterización con ensayos sobre el material es costosa y difícilmente generalizable a otras configuraciones. El uso de modelos matemáticos para predecir su comportamiento y la simulación de éstos mediante métodos numéricos parece ser un camino adecuado para lograr avanzar en ese conocimiento.

Las propiedades aparentes que presentan los composites difieren según la orientación de las fibras. Sin embargo, no es común preguntarse cómo pueden variar las características y propiedades del material compuesto, si se cambia la proporción de fibra en la matriz.

Asimismo, en la literatura, cuando se proporcionan las características mecánicas, como por ejemplo del Boron-Epoxy, en general, no se especifica el contenido de fibra en la disposición aleatoria o con determinado arreglo, al menos cuando se analizan problemas del ámbito de las estructuras ([Bachir Bouiadjra et.al. 2008](#); [Cupial, 1997](#); [Laura et.al. 1979](#); [Malekzadeh, 2007](#)).

Esto conduce a considerar que así como se aplica un criterio racional para la selección de un material con una rigidez y resistencia particulares para una aplicación estructural específica, deberá también ser racional la elección de un material compuesto y por ende será necesario conocer la incidencia que ejercen las variables de cada componente sobre el comportamiento del material en su conjunto.

Las placas conformadas con dichos materiales son muy utilizadas en escenarios de operación donde las variables dinámicas desempeñan un rol fundamental y donde el peso tiene una importancia decisiva en el diseño.

En este trabajo se analiza la incidencia que ejercen el tipo de fibra, el porcentaje incluido

en el compuesto, su densidad y la de la matriz, sobre las frecuencias de vibraciones transversales libres de placas rectangulares delgadas conformadas por materiales compuestos, utilizando un software que aplica el Método de Elementos Finitos (MEF).

2 MARCO TEÓRICO

En la fabricación de los materiales compuestos, las fibras, a menudo se ubican al azar, en lugar de disponerse en forma regular. Esta naturaleza aleatoria es mucho más típica en materiales compuestos de fibras de diámetro pequeño (Grafito-Epoxy) que en materiales compuestos de fibras de diámetro más grande (Boron-Epoxy).

Las ecuaciones de la micromecánica que se fundamentan en conceptos de rigidez se deben a [Tsai, 1964](#), cuyas hipótesis son:

- El compuesto está libre de tensiones iniciales, es linealmente elástico, macroscópicamente homogéneo y macroscópicamente ortótropo.
- Las fibras son: homogéneas, linealmente elásticas, isótropas, regularmente espaciadas, perfectamente alineadas y perfectamente delimitadas.
- La matriz es: homogénea, linealmente elástica, isótropa y libre de vacíos.

Además, no pueden existir vacíos en las fibras o en la matriz o entre ellas, (la unión entre las fibras y la matriz es perfecta). Estas suposiciones pueden no cumplirse en su totalidad; de hecho las uniones entre fibras y matriz no son perfectas.

La suposición más destacada es que la deformación en la dirección de la fibra de un material compuesto reforzado con fibra unidireccional es la misma en la fibra y en la matriz. Si esas deformaciones no fuesen iguales implicaría la rotura entre ambas.

Así es que analíticamente se considera una solución que contempla dos situaciones: que todas las fibras estén aisladas y que las fibras estén en contacto. Ese grado de aproximación entre fibras se puede denotar como C , y será $C = 0$ para el caso de fibras aisladas y $C = 1$ para fibras perfectamente contiguas.

Con una fracción alta de volumen de fibras, C se aproxima a 1. Esto es lo que [Chamis y Sendeckyj \(1968\)](#) denominaron método semiempírico.

Para el módulo en la dirección de las fibras, [Tsai, 1964](#), modificó la teoría de mezclas para tener en cuenta las imperfecciones en la alineación de las mismas:

$$E_1 = k(V_f E_f + V_m E_m) \quad (1)$$

siendo k el factor de desalineación de las fibras. Este factor se determina experimentalmente y es altamente dependiente del proceso de fabricación.

Asimismo, este autor obtiene las propiedades mecánicas restantes E_2 , ν_{12} y G_{12} que caracterizan al material compuesto, dadas por las siguientes expresiones:

$$E_2 = \frac{E_m}{V_m + V_f \left(\frac{E_m}{E_f} \right)} \quad (2)$$

$$\nu_{12} = (1-C) \frac{K_f V_f (2K_m + G_m) + K_m V_m (2K_f + G_m) V_m}{K_f (2K_m + G_m) - G_m (K_f - K_m) V_m} + C \frac{K_m V_m (2K_f + G_f) V_m + K_f V_f (2K_m + G_f) V_f}{K_f (2K_m + G_m) + G_f (K_m - K_f) V_m} \quad (3)$$

$$G_{12} = (1-C) G_m \frac{2G_f - (G_f - G_m)V_m}{2G_m + (G_f - G_m)V_m} + C G_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m)V_m}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m)V_m} \quad (4)$$

$$K_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)} \quad G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \quad K_m = \frac{E_m}{2(1-\nu_m)} \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (5)$$

donde:

E_m, E_f : módulos de elasticidad de la matriz y de la fibra

V_m, V_f : volúmenes relativos de la matriz y de la fibra respecto al compuesto

ν_m, ν_f : módulos de Poisson de la matriz y de la fibra

G_m, G_f : módulos de corte de la matriz y de la fibra

Para poder establecer la densidad del compuesto ρ_c , se considera el aporte de la matriz y de las fibras, es decir:

$$\rho_c = \frac{\rho_f V_f + \rho_m V_m}{V_f + V_m} \quad V_c = V_m + V_f \quad (6)$$

siendo V_c el volumen del compuesto.

Si se denota η a la relación V_f/V_m , se obtiene que la Ec. (6) puede escribirse:

$$\rho_c = \frac{\eta V_f + \rho_m}{\eta + 1} \quad (7)$$

3 CARACTERIZACIÓN DE LOS MATERIALES COMPUESTOS ANALIZADOS

Para efectuar el presente trabajo se consideraron los siguientes materiales compuestos: Boron-Epoxy, Grafito (As)-Epoxy, Grafito (HMS)-Epoxy y E-Glass-Epoxy, cuyas propiedades fueron extraídas del Departamento de Mecánica de Materiales de la Universidad Tecnológica de Michigan (<http://www.mse.mtu.edu>).

	Epoxy RE 6410	Epoxy DDS
Módulo de elasticidad longitudinal E_m (GPa)	3,50	3,50
Módulo de Poisson ν_m	0,33	0,33
Densidad (kg/m^3) ρ_m	1160	1540

Tabla 1: Propiedades de las matrices.

	Boron	Grafito (AS)	Grafito (HMS)	E-Glass
Módulo de elasticidad longitudinal E_f (GPa)	420	224	385	71
Módulo de Poisson ν_f	0,20	0,20	0,20	0,20
Densidad (kg/m^3) ρ_f	2450	1750	1940	2450

Tabla 2: Propiedades de las fibras.

Sobre la base de dicha caracterización, en primer lugar se estudió la incidencia del contenido de fibras en los compuestos sobre las propiedades mecánicas y sobre la densidad del material. En los esquemas de la Figura 1 se ilustra esa incidencia para el caso en que la

densidad de la matriz es 1160 kg/m^3 y, en forma análoga, en la Figura 2 cuando la matriz tiene una densidad de 1540 kg/m^3 . Los valores representados se determinaron con las Ecs. (1) a (7).

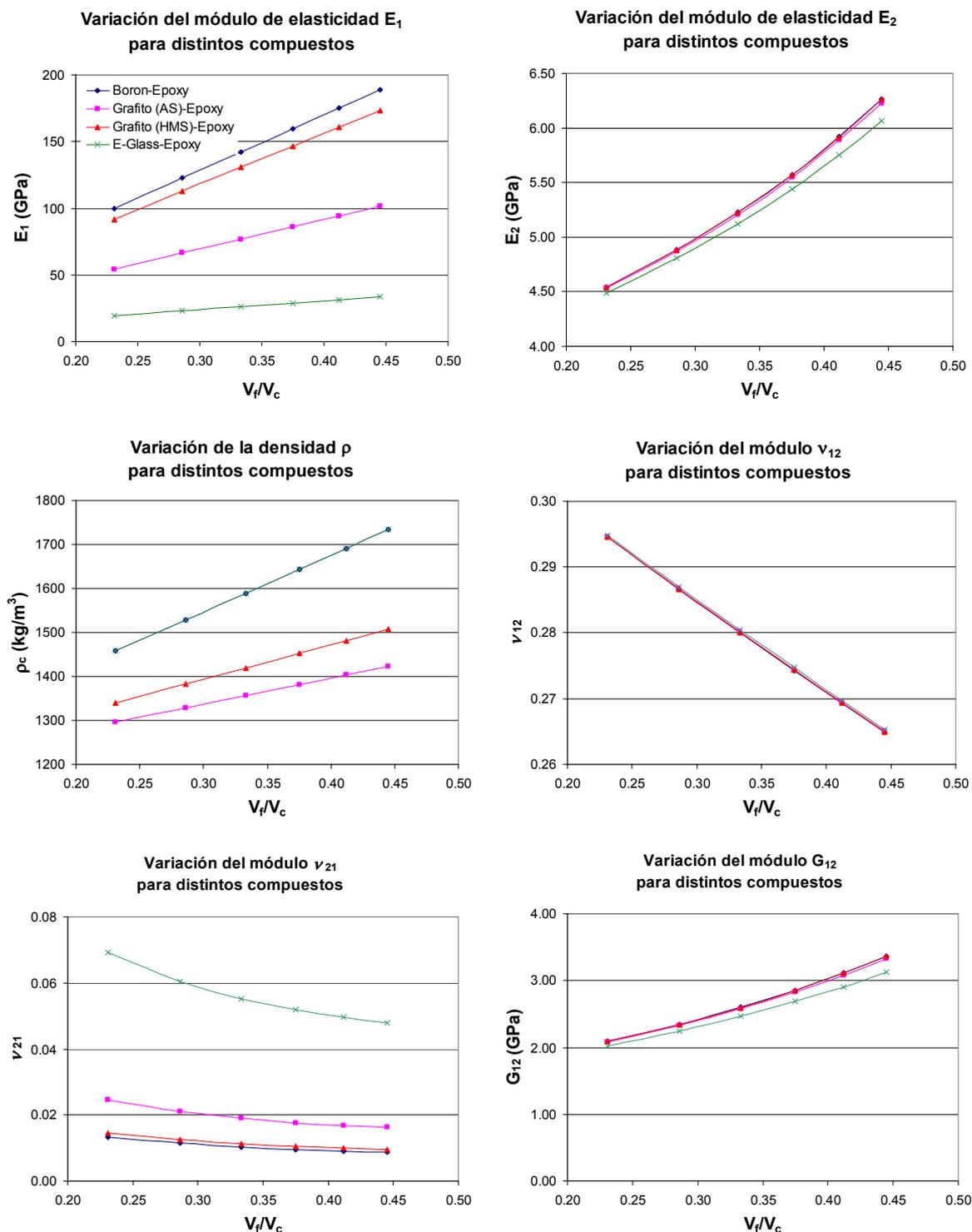


Figura 1: Incidencia del contenido de fibras en las propiedades mecánicas y en la densidad del compuesto, para densidad de matriz 1160 kg/m^3

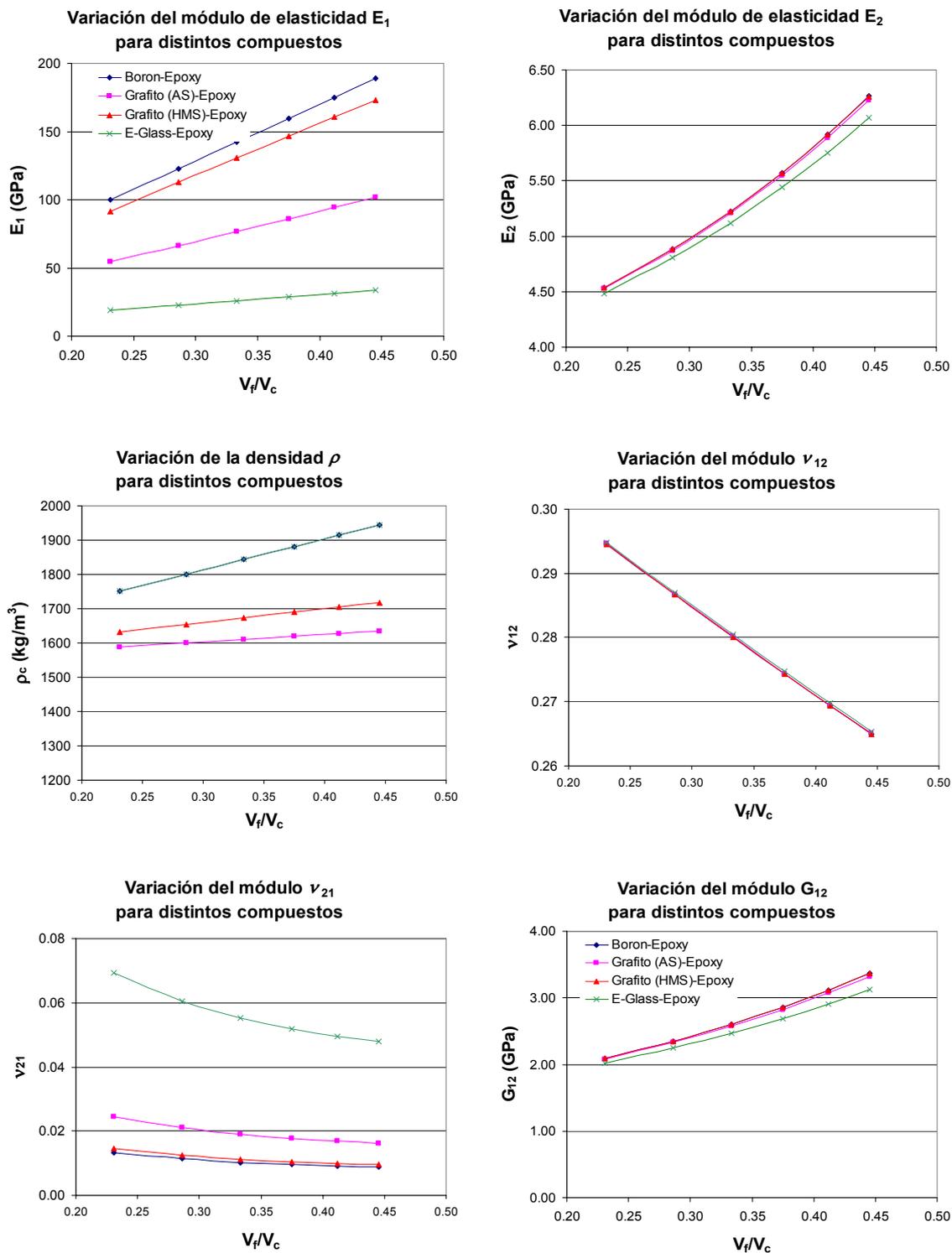


Figura 2: Incidencia del contenido de fibras en las propiedades mecánicas y en la densidad del compuesto, para densidad de matriz 1540 kg/m³

4 CASOS ANALIZADOS Y COMENTARIOS FINALES

Se estudiaron placas rectangulares delgadas con una relación de aspecto $a/b = 1$ entre lados simplemente apoyadas en sus cuatro bordes, aplicando un software que emplea MEF

(Algor®). Se consideraron seis proporciones de contenido de fibras con relación al volumen de cada compuesto considerado, a saber: 0,231; 0,285; 0,333; 0,375; 0,412; 0,445, resultando en total 24 materiales. La disposición de las fibras en la matriz tiene una orientación de 15° respecto a la dirección del lado *a* de la placa. Finalmente, se determinaron las frecuencias naturales de vibración transversal, cuyos resultados se pueden observar en los gráficos de las Figuras 3 y 4.

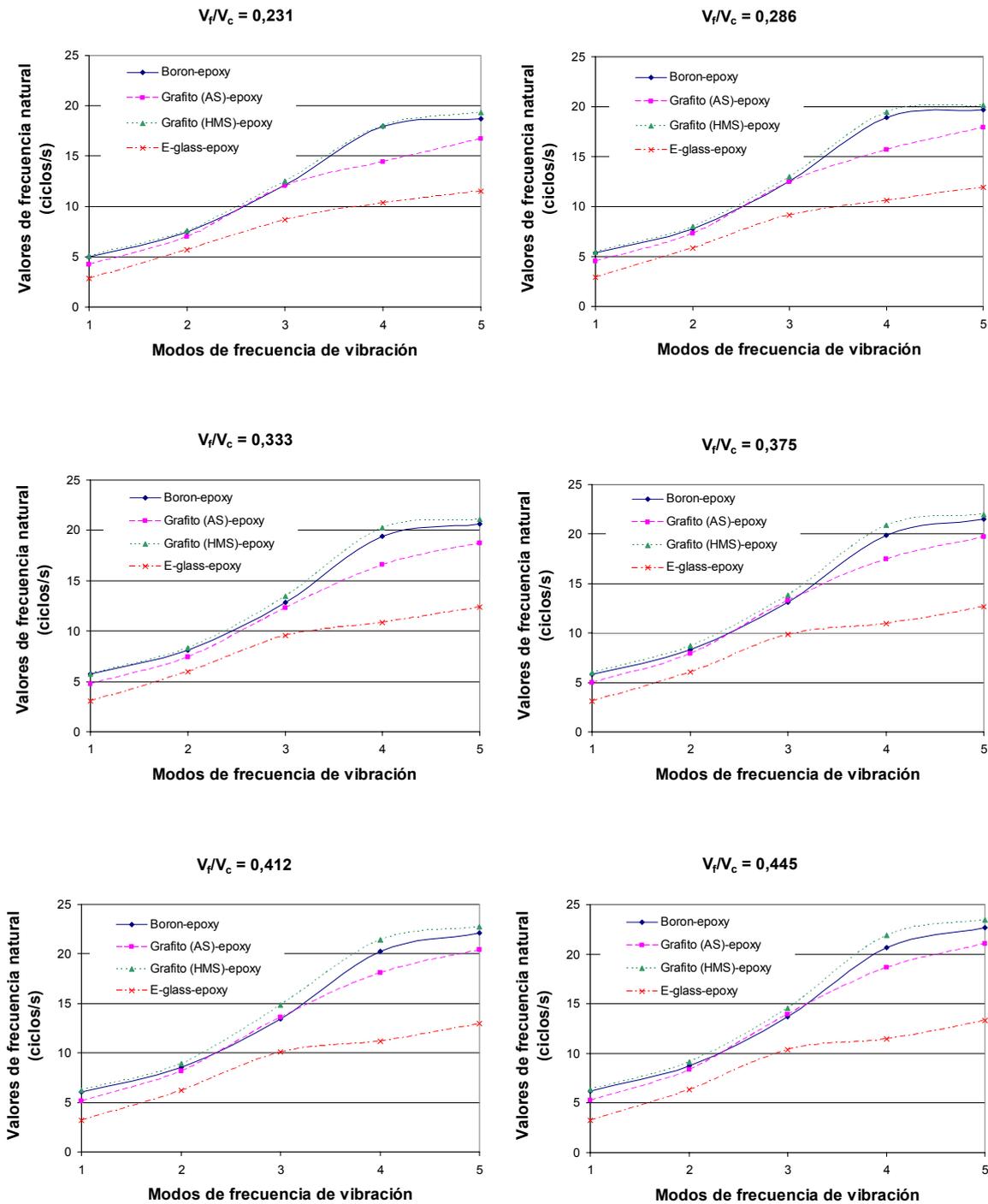


Figura 3: Frecuencias naturales de los compuestos analizados según el contenido de fibras para densidad de matriz 1160 kg/m³

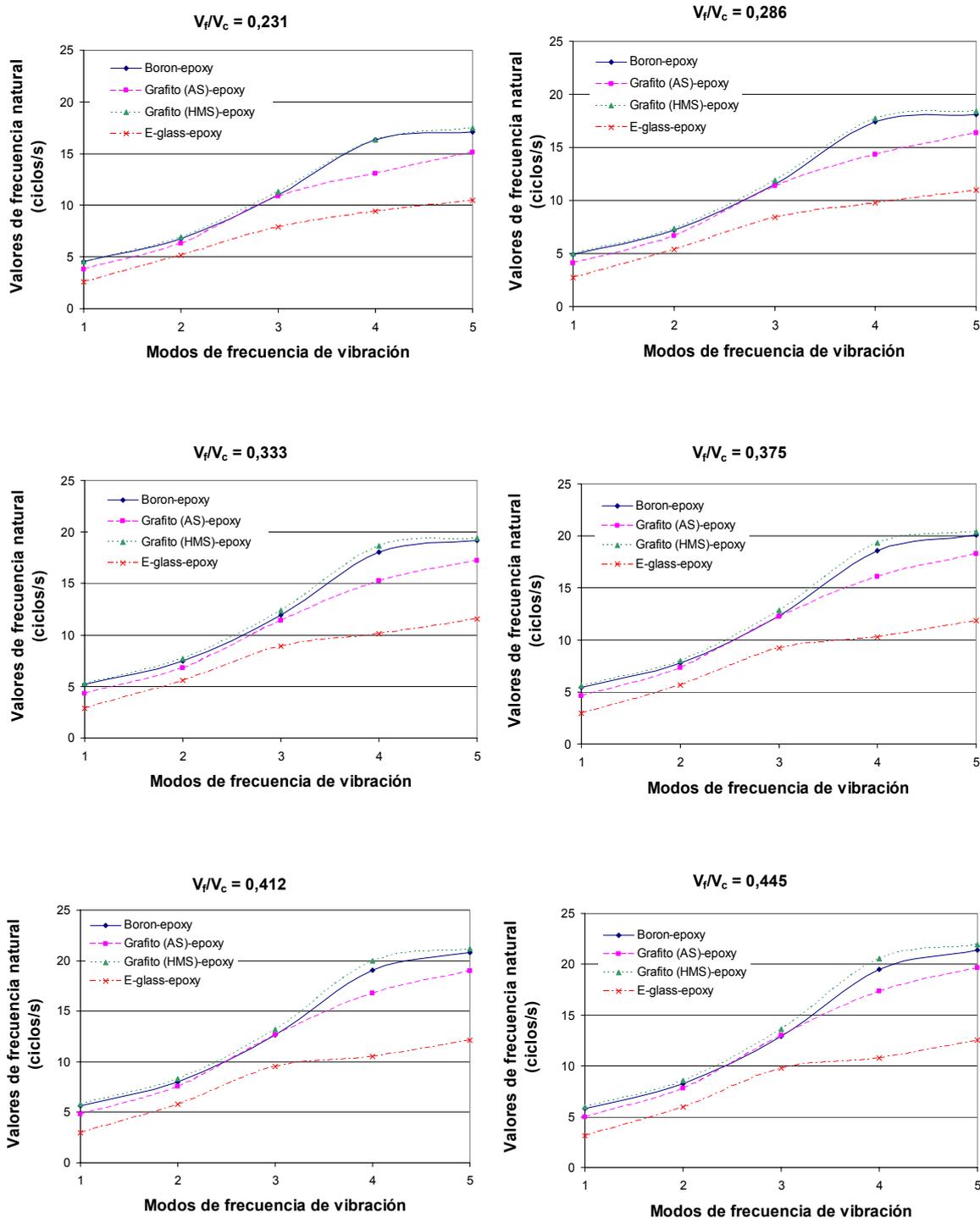


Figura 4: Frecuencias naturales de los compuestos analizados según el contenido de fibras para densidad de matriz 1540 kg/m^3

El contenido de fibra tiene mayor incidencia sobre el módulo E_1 que sobre el módulo E_2 , mostrando que el Boron-Epoxy y el Grafito (HMS)-Epoxy son los que presentan un mayor aumento de E_1 al incrementarse el contenido de fibra. En el E-Glass-Epoxy prácticamente no influye la proporción de fibra considerada. El Grafito (AS)-Epoxy tiene un comportamiento intermedio entre los dos anteriores. Sobre los módulos E_2 y G_{12} , la proporción de fibra para

todos los materiales considerados no tiene influencia apreciable. Con respecto a los coeficientes de Poisson, se observa que ν_{12} disminuye linealmente con el contenido de fibras, coincidiendo su magnitud en todos los materiales. En cuanto al ν_{21} , no es fuertemente dependiente del contenido de fibras, no obstante es el E-Glass-Epoxy el que presenta mayores valores para este coeficiente, en relación a los tres restantes que prácticamente poseen valores de igual magnitud. En referencia a la matriz Epoxy de densidad 1540 kg/m^3 , el único de los parámetros que se encuentra influenciado es la densidad del compuesto, como era de esperar.

En relación al análisis dinámico, se aprecia que el material que presenta las menores frecuencias y que prácticamente no se ven alteradas por la proporción de fibras es el E-Glass-Epoxy; mientras que el material más sensible en sus frecuencias naturales al incremento de fibras es el Grafito (HMS)-Epoxy. Los restantes materiales comienzan a mostrar aumentos en los valores de sus frecuencias a medida que aumenta el contenido de fibras, a partir de relaciones $V_f / V_c \geq 0,286$ y a partir del tercer modo de vibración.

El contenido de fibra no tiene incidencia notable para el primer modo de vibración. El aumento de la densidad de la matriz ocasiona que esas frecuencias fundamentales muestren una leve disminución en todos los materiales. El punto de inflexión que se observa a partir del tercer modo para la densidad de 1160 kg/m^3 , se mantiene para la densidad de 1540 kg/m^3 .

Como comentario general, se debe enfatizar el hecho de que cambios sensibles en la composición de los materiales constituyentes influyen de manera dispar en las propiedades mecánicas y en la respuesta dinámica.

REFERENCIAS

- Bachir Bouiadjra, B., Ouinas, D., Serier, B., Benderdouche, N., Disbonded effects on bonded boron/epoxy composite repair to aluminium plates. *Computational Materials Science*, 42:220-227, 2008.
- Chamis, C.C., Sendekyj, G.P., Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites, *Journal of Composite Materials*, 332-358, 1968.
- Cupial, P., Calculation of the natural frequencies of composite plates by the Rayleigh-Ritz method with orthogonal polynomials. *Journal of Sound and Vibration*, 201(3):385-387, 1997.
- Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials*. Taylor and Francis, 1999.
- Laura, P.A.A., Grossi, R.O., Transverse vibrations of rectangular anisotropic plates with edges elastically restrained against rotation. *Journal of Sound and Vibration*, 64(2):257-267, 1979.
- Malekzadeh, P., A differential quadrature nonlinear free vibration analysis of laminated composite skew thin plates. *Thin-Walled Structures*, 45:237-250, 2007.
- Mayugo Majó, J.A., *Estudio constitutivo de materiales compuestos laminados sometidos a cargas cíclicas*, Tesis Doctoral. UPC, 2003.
- Tsai, S.W., *Structural Behavior of Composite Materials*. NASA CR-71, 1964.