

ANÁLISIS DE ONDAS SUPERFICIALES UTILIZANDO MODELOS PARA LA RIGIDEZ DINÁMICA DEL SEMI-ESPACIO COMPATIBLES CON LA FORMULACIÓN DE CAPAS DELGADAS

Marcelo A. Ceballos^a y Carlos A. Prato^a

*^aDepartamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba, Vélez Sarsfield 1611, X5016GCA, Córdoba, Argentina,
<http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct>*

Palabras clave: modelos de propagación de ondas, descomposición modal de la respuesta, perfiles estratificados de suelo, formulación de capas delgadas, ajuste de parámetros mecánicos.

Resumen. Este trabajo presenta dos modelos de propagación de ondas para el semi-espacio que se asume como el estrato más profundo de un perfil de suelo. Estos modelos resultan compatibles con la formulación de capas delgadas utilizada para el ajuste de perfiles mecánicos de suelos a través de técnicas de análisis espectral de ondas superficiales.

La respuesta en la superficie del perfil de suelo se calcula habitualmente en el dominio número de onda k convirtiéndose luego al dominio espacial a través de la transformada de Hankel. La versión analítica de esta transformada no resulta aplicable en casos prácticos, por lo que suele recurrirse a implementaciones numéricas que arrastran imprecisiones e implican un alto costo computacional. La ventaja más relevante de la formulación de capas delgadas es que permite pasar la respuesta del perfil entre ambos dominios en forma analítica a través de la descomposición modal de esta respuesta en diferentes patrones de onda. Esto se consigue a través de una expansión polinómica en el número de onda k^2 de las matrices exactas de rigidez dinámica de los estratos, lo que a su vez permite resolver un problema generalizado de autovalores para expresar la respuesta como una combinación de modos de propagación. Esta expansión en k^2 aplicada a la matriz exacta de rigidez del semi-espacio no produce buenos resultados, por lo que suele representarse este semi-espacio como un conjunto de estratos con espesor creciente en profundidad. Sin embargo, este artificio sólo produce resultados razonables para el modo fundamental de propagación de los perfiles normalmente dispersivos (rigidez creciente en profundidad), mientras genera una serie de modos espúreos y no reproduce la respuesta estática.

Los modelos propuestos para el semi-espacio se basan en el ajuste modal de las componentes de la flexibilidad dinámica del semi-espacio en el dominio número de onda k utilizando técnicas de análisis modal experimental. El modelo designado formulación κ^1 reproduce satisfactoriamente la respuesta estática y la contribución de modos superiores de propagación incluso para perfiles inversamente dispersivos. El modelo designado formulación κ^2 permite el cálculo de la respuesta en el dominio espacial en forma analítica resultando adecuado para implementarse en técnicas de ajuste de perfiles de suelo basados en el análisis de múltiples modos de propagación utilizando múltiples transductores.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presentan dos modelos para representar el comportamiento dinámico del semi-espacio que se sitúa en la parte inferior de perfiles mecánicos de suelo. Estos modelos permiten la descripción modal de la respuesta del terreno a través de la superposición de diferentes patrones de propagación de ondas, como parte del refinamiento de un modelo analítico utilizado para el ajuste de parámetros mecánicos de perfiles de suelo basado en la “formulación de capas delgadas” (FCD) propuesta por [Kausel y Roësset \(1981a\)](#).

La “dispersión de fase espacial de ondas superficiales” se ha usado como función objetivo para la determinación de velocidades de propagación de ondas de corte de perfiles mecánicos para terrenos que se consideran constituidos por estratos horizontales de espesor constante y extensión infinita ([Ceballos y Prato, 2009](#); [Ceballos y Prato, 2010](#)). A diferencia de otras funciones objetivo, la dispersión de fase espacial se obtiene considerando la totalidad de los modos de propagación, de manera que la validez de los resultados del ajuste no se encuentra condicionada por la distribución en profundidad de la rigidez del perfil de suelo.

El ajuste de los perfiles inversamente dispersivos requiere una adecuada aproximación del comportamiento dinámico del semi-espacio debido a la relevante contribución de los modos superiores de propagación. La mejora introducida para el modelo de propagación de ondas se basa en una aproximación en dos etapas de la flexibilidad dinámica del semi-espacio a través de parámetros modales en el dominio número de onda, que son forzados a satisfacer ciertas restricciones. Las amplitudes no acotadas de las componentes de esta flexibilidad se eliminan “descontándose” el modo exacto de propagación de ondas de Rayleigh, que se agrega a la base modal al final del proceso de aproximación. En una primera etapa se ajusta la flexibilidad “remanente” con una fracción polinómica matricial usando el criterio de mínimos cuadrados. En una segunda etapa se realiza el ajuste fino de los parámetros modales a través de un proceso iterativo con técnicas de gradientes. El uso de coordenadas generalizadas permite obtener una matriz cuadrada de formas modales y definir matrices físicas para el semi-espacio que pueden ser ensambladas directamente con las matrices de los estratos superiores derivadas de la formulación de capas delgadas.

La aproximación de la matriz de flexibilidad exacta de un semi-espacio homogéneo con esta técnica del análisis modal permite la obtención de un modelo que reproduce en forma exacta el modo fundamental de propagación y resulta exacto para el número de onda $k = 0$.

2 FORMULACIÓN DE CAPAS DELGADAS

La “formulación de capas delgadas” consiste en un modelo aproximado propuesto por [Kausel y Roësset \(1981b\)](#) para determinar la respuesta dinámica de un conjunto de estratos apoyados sobre un semi-espacio considerado infinitamente rígido. Esta formulación permite la descomposición modal de la respuesta del perfil posibilitando una transformación exacta al dominio espacial a través de la versión analítica de la transformada de Hankel para cada modo de propagación. La formulación plantea la expansión en series de la variable número de onda k en la matriz de rigidez exacta de un estrato, pasando sus coeficientes de ser funciones trascendentes de k a ser funciones polinómicas de k . La exactitud de la aproximación requiere que el espesor del estrato sea pequeño en relación a la longitud de onda de análisis.

La versión adimensional de la matriz elemental de un estrato adquiere la siguiente forma:

$$\bar{K} = \kappa^2 \bar{A} + \kappa \bar{B} + \bar{G} - \bar{M} \quad (1)$$

donde el número de onda adimensional $\kappa = V_s / \omega \cdot k$, siendo V_s la velocidad de ondas de corte y ω la frecuencia de análisis. La utilización de funciones de interpolación lineales para los desplazamientos produce las siguientes matrices elementales para coordenadas vinculadas a las ondas *SV-P*:

$$\bar{A} = \frac{\eta}{6(1-2\nu)} \left[\begin{array}{cc|cc} 4(1-\nu) & 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 2(1-2\nu) & 0 & (1-2\nu) \\ \hline 2(1-\nu) & 0 & 4(1-\nu) & 0 \\ 0 & (1-2\nu) & 0 & 2(1-2\nu) \end{array} \right] \quad (2)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{2(1-2\nu)} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -(1-4\nu) & 0 & -1 \\ -(1-4\nu) & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & (1-4\nu) \\ -1 & 0 & (1-4\nu) & 0 \end{array} \right] \quad (3)$$

$$\bar{G} = \frac{1}{\eta(1-2\nu)} \left[\begin{array}{cc|cc} (1-2\nu) & 0 & -(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 & -2(1-\nu) \\ \hline -(1-2\nu) & 0 & (1-2\nu) & 0 \\ 0 & -2(1-\nu) & 0 & 2(1-\nu) \end{array} \right] \quad (4)$$

$$\bar{M} = \frac{\eta}{6} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \quad (5)$$

donde el espesor adimensional $\eta = \omega / V_s \cdot h$, siendo h el espesor del estrato. La utilización de funciones de interpolación cuadráticas para los desplazamientos requiere la introducción de un nudo intermedio para cada estrato y produce matrices de los estratos de 6×6 presentadas en el trabajo de [Kausel \(1974\)](#).

El ensamblaje de las matrices de todos los estratos y la posterior resolución de un problema generalizado de autovalores permiten expresar la respuesta dinámica del perfil completo de suelo a través de la superposición de modos de propagación de ondas. La contribución a la respuesta de cada modo se obtiene en forma exacta en el dominio espacial usando la versión analítica de la transformada de Hankel, y arrastrando sólo los errores de la aproximación involucrada en la expansión polinómica en κ .

Los modos de propagación de ondas del perfil completo surgen de la resolución del siguiente problema cuadrático de autovalores:

$$(\kappa_i^2 \mathbf{A} + \kappa_i \mathbf{B} + \mathbf{C}) \phi_i = 0 \quad \text{con} \quad \mathbf{C} = \mathbf{G} - \mathbf{M} \quad (6)$$

donde las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} y \mathbf{M} se obtienen por ensamblaje de las matrices de los distintos estratos. Este problema genera para las coordenadas de las ondas *SV-P* un total de $4N$ modos, donde N es el número de estratos apoyados sobre un semi-espacio infinitamente rígido.

Una forma conveniente de resolver este problema cuadrático de autovalores teniendo en

cuenta ciertas características intrínsecas de las matrices de los estratos surge definiendo las siguientes matrices, obtenidas reagrupando filas y columnas para colocar primero coeficientes vinculados a la coordenada radial x y luego coeficientes vinculados a la coordenada vertical z :

$$A = \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 \\ B_{zx} & A_{zz} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{xx} & B_{xz} \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \quad (7)$$

La asimetría de estas matrices produce el siguiente par de problema lineales de autovalores, por derecha y por izquierda, respectivamente:

$$\begin{aligned} AZK_R^2 + CZ &= 0 \\ A^T Y K_R^2 + C^T Y &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

donde las matrices de formas modales adquieren la siguiente forma:

$$Y = \begin{bmatrix} \Phi_x K_R \\ \Phi_z \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z K_R \end{bmatrix} \quad (9)$$

Las siguientes propiedades de ortogonalidad definen el criterio de normalización que se utiliza para las formas modales:

$$\begin{aligned} Y^T AZ &= K_R & K_R \Phi_x^T A_{xx} \Phi_x + \Phi_z^T A_{zz} \Phi_z K_R + \Phi_z^T B_{zx} \Phi_x &= K_R \\ Y^T CZ &= -K_R^3 & K_R \Phi_x^T C_{xx} \Phi_x + \Phi_z^T C_{zz} \Phi_z K_R + K_R \Phi_x^T B_{xz} \Phi_z K_R &= -K_R^3 \end{aligned} \quad (10)$$

La “restricción fundamental” que deben satisfacer las formas modales para garantizar que las matrices del perfil posean las submatrices nulas que aparecen en ecuación (7) resulta:

$$\Phi_x K_R^{-1} \Phi_z^T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_z K_R^{-1} \Phi_x^T = 0 \quad (11)$$

La resolución de cualquiera de los problemas de autovalores indicados en (8) produce $2N$ “modos dobles” del perfil de suelo. Cada uno de estos modos dobles representa un par de “modos simples” cuyos autovalores resultan $\pm K_R$, y cuyos autovectores, según (9), presentan signos opuestos de las componentes x respecto a las componentes z .

La matriz de flexibilidad en función de los modos dobles, con la misma reagrupación de filas y columnas de las matrices A y C en (7), resulta:

$$F = \begin{bmatrix} \Phi_x (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Phi_x^T & \kappa \Phi_x K_R^{-1} (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Phi_z^T \\ \kappa \Phi_z K_R^{-1} (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Phi_x^T & \Phi_z (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Phi_z^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

El desplazamiento vertical en la superficie u_z^1 que produce una carga puntual armónica, en los dominios adimensionales número de onda κ y espacial ρ , resulta:

$$u_z^1(\kappa) = F_{zz}^{11}(\kappa) = \sum_{l=1}^{2N} \frac{\phi_{z,l}^2}{(\kappa^2 - \kappa_l^2)} \quad \Leftrightarrow \quad u_z^1(\rho) = \frac{1}{4i} \sum_{l=1}^{2N} \phi_{z,l}^2 H_0^{(2)}(\kappa_l \rho) \quad (13)$$

La definición de la matriz de flexibilidad en (12) requiere tomar autovalores con parte imaginaria negativa en el caso que κ_l sea complejo, o con parte real positiva en el caso que κ_l sea real. La agrupación de modos simples, obtenidos del problema lineal de autovalores, en la siguiente expresión de la matriz de flexibilidad permite explicar la aparición de la variable κ en el numerador de los términos de acoplamiento en (12):

$$F = \begin{bmatrix} \Psi_x & i\Psi_x \\ \Psi_z & -i\Psi_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa I - K_R & 0 \\ 0 & \kappa I + K_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_x^T & \Psi_z^T \\ i\Psi_x^T & -i\Psi_z^T \end{bmatrix} \quad (14)$$

Operando:

$$F = \begin{bmatrix} \Psi_x(\kappa I - K_R)^{-1}\Psi_x^T & \Psi_x(\kappa I - K_R)^{-1}\Psi_z^T \\ \Psi_z(\kappa I - K_R)^{-1}\Psi_x^T & \Psi_z(\kappa I - K_R)^{-1}\Psi_z^T \end{bmatrix} + \dots \\ + \begin{bmatrix} -\Psi_x(\kappa I + K_R)^{-1}\Psi_x^T & \Psi_x(\kappa I + K_R)^{-1}\Psi_z^T \\ \Psi_z(\kappa I + K_R)^{-1}\Psi_x^T & -\Psi_z(\kappa I + K_R)^{-1}\Psi_z^T \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$F = \begin{bmatrix} \Psi_x(\kappa I + K_R)(\kappa^2 I - K_R^2)^{-1}\Psi_x^T & \Psi_x(\kappa I + K_R)(\kappa^2 I - K_R^2)^{-1}\Psi_z^T \\ \Psi_z(\kappa I + K_R)(\kappa^2 I - K_R^2)^{-1}\Psi_x^T & \Psi_z(\kappa I + K_R)(\kappa^2 I - K_R^2)^{-1}\Psi_z^T \end{bmatrix} + \dots \\ + \begin{bmatrix} -\Psi_x(\kappa I - K_R)(\kappa^2 I - K_R^2)^{-1}\Psi_x^T & \Psi_x(\kappa I - K_R)(\kappa^2 I - K_R^2)^{-1}\Psi_z^T \\ \Psi_z(\kappa I - K_R)(\kappa^2 I - K_R^2)^{-1}\Psi_x^T & -\Psi_z(\kappa I - K_R)(\kappa^2 I - K_R^2)^{-1}\Psi_z^T \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$F = 2 \begin{bmatrix} \Psi_x K_R (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Psi_x^T & \kappa \Psi_x (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Psi_z^T \\ \kappa \Psi_z (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Psi_x^T & \Psi_z K_R (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Psi_z^T \end{bmatrix} \quad (17)$$

Las relaciones entre los autovectores de las formulaciones de 1° y 2° orden resultan:

$$\Phi_x = \sqrt{2} \Psi_x K_R^{1/2} \\ \Phi_z = \sqrt{2} \Psi_z K_R^{1/2} \quad (18)$$

La aplicación de la formulación de capas delgadas para casos de estratos apoyados sobre un semi-espacio flexible requiere una aproximación adicional para los coeficientes de su matriz de rigidez. Los autores de la formulación original sugieren como alternativa la utilización de una “**formulación híbrida**” combinando las matrices de rigidez aproximadas de los estratos con la matriz de rigidez exacta del semi-espacio. Sin embargo, los coeficientes de la matriz del semi-espacio no resultan funciones polinómicas en κ , lo que impide la resolución de un problema de autovalores para la descomposición modal de la respuesta. Por lo tanto, no es posible aprovechar la mayor ventaja de esta formulación que consiste en la transformación de la respuesta al dominio espacial en forma cerrada. Por otra parte, la expansión en series de la variable k en la matriz exacta del semi-espacio no produce una aproximación satisfactoria de la respuesta dada la pérdida de precisión y control para valores altos de k y la imposibilidad de limitar el espesor infinito de este último particular estrato.

Otra alternativa sugerida por estos mismos autores se denomina en este trabajo como “**estratificación del semi-espacio**”, y consiste en representar a este semi-espacio a través de un conjunto de 8–10 estratos con espesor creciente en profundidad hasta alcanzar una profundidad de 1.5 veces la longitud de onda del modo fundamental de propagación cubriendo la zona de sus mayores desplazamientos. Este artificio proporciona buena aproximación sólo para la velocidad de propagación del modo fundamental a través de la resolución del problema de autovalores. La técnica de ajuste de perfiles de suelo denominada *Spectral Analysis of Surface Waves* (SASW) se basa precisamente en el ajuste de esta velocidad de propagación para cada una de las frecuencias de análisis, motivo por el cual este artificio representa una buena alternativa. Sin embargo, resulta necesario asegurarse que el

modo fundamental domine francamente la respuesta superficial, lo que sólo puede garantizarse en perfiles denominados “normalmente dispersivos” que presentan una rigidez no-decreciente en profundidad.

Un análisis más detallado del artificio de “estratificación del semi-espacio” permite obtener las siguientes observaciones relacionadas con las limitaciones de su utilización en otros casos que no sean la obtención de la velocidad del modo fundamental de propagación:

- a) Los coeficientes de la flexibilidad dinámica exacta en la superficie resultan esencialmente “complejos” mientras que este artificio produce coeficientes reales. Una interpretación de esta observación es la falta de capacidad de este modelo del semi-espacio para representar el fenómeno de amortiguamiento por radiación.
- b) Los coeficientes de la flexibilidad dinámica exacta decrecen con k mientras que con este artificio decrecen con k^2 . Dado que los valores altos de k dominan la respuesta estática, este artificio no reproduce adecuadamente la respuesta dinámica para bajas frecuencias, particularmente en zonas próximas a la aplicación de la carga.
- c) Los estratos más profundos son forzados a violar la condición de espesor mínimo, lo que se refleja en la aparición de picos adicionales en la flexibilidad dinámica que se traducen en modos de propagación espúreos en el dominio espacial.

3 AJUSTE MODAL DE LA FLEXIBILIDAD DEL SEMI-ESPACIO

La aproximación de la matriz de rigidez de los estratos a través de la FCD resulta precisa para valores bajos de κ , desmejorando para valores altos de κ , lo que se subsana en alguna medida con una subdivisión en substratos. Sin embargo, la aproximación de la matriz del semi-espacio debe necesariamente resultar adecuada en todo el rango de números de onda κ dada la imposibilidad de discretizar este estrato especial de espesor infinito.

La idea propuesta en el presente trabajo designada “**formulación modal del semi-espacio**” consiste en aproximar los coeficientes de la matriz de flexibilidad del semi-espacio a través de técnicas de análisis modal. Esta formulación posee 2 variantes con distintas aplicaciones de acuerdo al tipo de análisis que deba realizarse.

- a) **Formulación modal κ^2** . Ajuste de la flexibilidad usando fracciones polinómicas con potencias sólo pares que generan autovalores de 2° orden:

$$\tilde{F} = (Q_0 + \kappa^2 Q_2 + \kappa^4 Q_4 + \dots + \kappa^n Q_n + \kappa^{n+2} I)^{-1} (R_0 + \kappa^2 R_2 + \kappa^4 R_4 + \dots + \kappa^n R_n) \quad (19)$$

- b) **Formulación modal κ^1** . Ajuste de la flexibilidad usando fracciones polinómicas con progresión aritmética de potencias que generan autovalores de 1° orden:

$$\tilde{F} = (Q_0 + \kappa Q_1 + \kappa^2 Q_2 + \dots + \kappa^n Q_n + \kappa^{n+1} I)^{-1} (R_0 + \kappa R_1 + \kappa^2 R_2 + \dots + \kappa^n R_n) \quad (20)$$

La formulación κ^2 produce una matriz de rigidez para el semi-espacio con una estructura idéntica a las matrices de los estratos de la formulación de capas delgadas. Esta formulación tiene como principal ventaja un acoplamiento directo con las matrices de los estratos de la formulación de capas delgadas, lo que permite obtener la respuesta en el dominio espacial a través de la versión analítica de la transformada de Hankel. La principal desventaja se relaciona con la característica intrínseca de la aproximación en κ^2 que no posee la capacidad de reproducir adecuadamente la respuesta en el dominio número de onda para valores altos de k . Esta formulación resulta potencialmente adecuada como modelo base para el ajuste de

parámetros mecánicos de perfiles estratificados de suelo usando datos experimentales, aunque deben identificarse y especificarse adecuadamente los límites de aplicación. Sin embargo, no resulta adecuada para la evaluación de la rigidez dinámica de fundaciones superficiales debido a que esta formulación no reproduce adecuadamente la respuesta en bajas frecuencias principalmente en zonas próximas a la aplicación de la carga.

La formulación κ^1 tiene como principal ventaja una buena precisión de la flexibilidad en el rango completo del dominio número de onda, resultando la opción indicada para el análisis de fundaciones superficiales incluso para baja frecuencia. El principal inconveniente que surge es el rompimiento de la estructura de 2° orden de la formulación de capas delgadas, lo que genera la necesidad de resolver nuevas expresiones de la transformada de Hankel sin solución analítica conocida. Las integrales resultantes poseen como argumentos autovalores de 1° orden que deben resolverse numéricamente.

3.1 Formulación modal κ^2

La formulación κ^2 se basa en una aproximación en “dos etapas” de los coeficientes de la flexibilidad dinámica del semi-espacio en el dominio número de onda a través de parámetros modales que deben satisfacer el valor exacto para $\kappa = 0$. Las singularidades (amplitudes no acotadas) de estos coeficientes se vinculan al modo fundamental de propagación de ondas cuyo autovalor κ_0 se relaciona con la velocidad de ondas de Rayleigh. La contribución de este modo a la matriz de flexibilidad del semi-espacio resulta:

$$F_0 = \frac{1}{(\kappa^2 - \kappa_0^2)} \begin{bmatrix} \phi_{x,0}^2 & \kappa/\kappa_0 \phi_{x,0} \phi_{z,0} \\ \kappa/\kappa_0 \phi_{x,0} \phi_{z,0} & \phi_{z,0}^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\phi_{x,0} = \sqrt{\sqrt{\kappa_0^2 - 1}/A_0} \quad \phi_{z,0} = \sqrt{\sqrt{\kappa_0^2 - \alpha^2}/A_0} \quad (22)$$

$$A_0 = \frac{8\kappa_0^4 - 6\kappa_0^2(\alpha^2 + 1) + 4\alpha^2}{\sqrt{\kappa_0^2 - \alpha^2} \sqrt{\kappa_0^2 - 1}} - 8\kappa_0^2 + 4 \quad (23)$$

El ajuste modal se realiza sobre la flexibilidad “remanente” que resulta de descontar, a la matriz de flexibilidad, el modo fundamental que se agrega a la base modal al final del ajuste. En la primera etapa se ajusta la flexibilidad remanente a través de una fracción polinómica matricial usando el criterio de mínimos cuadrados. El cociente de polinomios en función de la frecuencia ω (reemplazada aquí por el número de onda κ) se usa exhaustivamente en análisis modal experimental para aproximar flexibilidades dinámicas, y también para reproducir soluciones analíticas complejas (Wolf, 1994; Ceballos y Prato, 2002; Ceballos, 2004).

En la segunda etapa se realiza el ajuste fino de los parámetros modales a través de un proceso iterativo utilizando técnicas de gradientes. El uso de coordenadas generalizadas para obtener una matriz cuadrada de formas modales permite definir matrices físicas para el semi-espacio que reproducen en forma exacta el modo fundamental de propagación y pueden acoplarse con las matrices de la formulación de capas delgadas. El modelo posee las mismas características de las matrices de los estratos, lo que permite determinar la respuesta en el dominio espacial en forma analítica en función de los parámetros modales del perfil completo sin la aplicación explícita de costosas versiones numéricas de la transformada de Hankel.

El modo fundamental de propagación que se incorpora a la base modal en forma exacta es

puramente real por resultar no-amortiguado, salvo por el efecto de radiación que se considera implícitamente. Los modos de alto amortiguamiento acomodan la respuesta cerca de la fuente. Las contribuciones a la respuesta de los modos de ondas S ($\kappa = 1$) y de ondas P ($\kappa = \alpha$) no poseen las características de los modos amortiguados tradicionales lo que impide descontarlos como se hace con el modo fundamental: el algoritmo de ajuste debe acomodar un cierto número de modos para reproducir en forma aproximada sus contribuciones a la respuesta.

El criterio de estabilidad que deben satisfacer los coeficientes de la matriz de flexibilidad del semi-espacio requiere que:

$$\Im(\bar{\alpha}_{xx}) \leq 0 \quad \text{y} \quad \Im(\bar{\alpha}_{zz}) \leq 0 \quad (24)$$

Sin embargo, se pudo comprobar que no se justifica introducir en el proceso de ajuste estas restricciones por las siguientes razones:

- La duración del proceso de ajuste se incrementa notoriamente.
- La norma de error se degrada apreciablemente.
- El ensamble de las matrices ajustadas con las matrices de los estratos produce que en algunos casos existan rangos de κ donde se viola nuevamente el criterio de estabilidad.

Etapa de ajuste global

El valor de la matriz de rigidez exacta del semi-espacio en $\kappa = 0$ para las coordenadas vinculadas a las ondas *SV-P* resulta:

$$K_0 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i/\alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad F_0 = K_0^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{bmatrix} \quad (25)$$

El ajuste de la matriz de flexibilidad remanente descontando el modo fundamental:

$$\tilde{F} = F - F_0 \quad (26)$$

se realiza a través de la siguiente fracción polinómica matricial:

$$\tilde{F} = \left(I + \kappa^2 Q_2 + \kappa^4 Q_4 + \dots + \kappa^n Q_n + \kappa^{n+2} I \right)^{-1} \left(R_0 + \kappa^2 R_2 + \kappa^4 R_4 + \dots + \kappa^n R_n \right) \quad (27)$$

A la matriz R_0 se le asigna el valor de la matriz de flexibilidad exacta del semi-espacio para $\kappa = 0$ con el descuento de la contribución del modo fundamental:

$$R_0 = \begin{bmatrix} \phi_{x,0}^2 / \kappa_0^2 - i & 0 \\ 0 & \phi_{z,0}^2 / \kappa_0^2 - i\alpha \end{bmatrix} \quad (28)$$

mientras que la matriz Q_0 se asume igual a la matriz identidad a los efectos de garantizar que la aproximación de la flexibilidad posea el valor exacto correspondiente a $\kappa = 0$.

Operando sobre la ecuación (27) se obtiene:

$$\tilde{F} + \kappa^2 Q_2 \tilde{F} + \kappa^4 Q_4 \tilde{F} + \dots + \kappa^n Q_n \tilde{F} + \kappa^{n+2} \tilde{F} = R_0 + \kappa^2 R_2 + \kappa^4 R_4 + \dots + \kappa^n R_n \quad (29)$$

$$\kappa^2 R_2 + \kappa^4 R_4 + \dots + \kappa^n R_n - \kappa^2 Q_2 \tilde{F} - \kappa^4 Q_4 \tilde{F} - \dots - \kappa^n Q_n \tilde{F} = \tilde{F} + \kappa^{n+2} \tilde{F} - R_0 = \tilde{P} \quad (30)$$

Considerando m puntos discretos de ajuste para el eje κ se obtiene:

$$\hat{U} \hat{K} = \hat{P} \quad \Rightarrow \quad \hat{U} = \hat{P} \hat{K}^\dagger \quad (31)$$

donde \dagger indica pseudo-inversa (ajuste por mínimos cuadrados) mientras que:

$$\hat{U} = [R_2 \quad R_4 \quad \dots \quad R_n \quad Q_2 \quad Q_4 \quad \dots \quad Q_n] \tag{32}$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \kappa_1^2 I & \kappa_2^2 I & \dots & \kappa_m^2 I \\ \kappa_1^4 I & \kappa_2^4 I & \dots & \kappa_m^4 I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_1^n I & \kappa_2^n I & \dots & \kappa_m^n I \\ -\kappa_1^2 \tilde{F}_1 & -\kappa_2^2 \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_m^2 \tilde{F}_m \\ -\kappa_1^4 \tilde{F}_1 & -\kappa_2^4 \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_m^4 \tilde{F}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\kappa_1^n \tilde{F}_1 & -\kappa_2^n \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_m^n \tilde{F}_m \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\hat{P} = [\tilde{P}_1 \quad \tilde{P}_2 \quad \dots \quad \tilde{P}_m] \tag{34}$$

La forma matricial equivalente a la fracción polinómica matricial en (27) resulta:

$$\tilde{F} = \hat{C} (\kappa^2 I - \hat{A})^{-1} \hat{B} \quad \hat{C} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad I]$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_2 \\ R_4 \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -I \\ I & 0 & \dots & 0 & -Q_2 \\ 0 & I & \dots & 0 & -Q_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & -Q_n \end{bmatrix} \tag{35}$$

La matriz de flexibilidad aproximada resultante no es necesariamente simétrica. El proceso de simetrización propuesto requiere la resolución del siguiente problema de autovalores:

$$\hat{A} \Upsilon = \Upsilon K_R^2 \tag{36}$$

que permite una descomposición modal de la forma matricial asociada:

$$\tilde{F} = \Phi_L (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Phi_R \tag{37}$$

donde:

$$K_R^2 = \Upsilon^{-1} \hat{A} \Upsilon \quad \Phi_R = \Upsilon^{-1} \hat{B} \quad \Phi_L = \hat{C} \Upsilon \tag{38}$$

El objetivo de la simetrización consiste en transformar las matrices modales por izquierda Φ_L y por derecha Φ_R de modo tal que una matriz sea la transpuesta de la otra:

$$\Phi_L = \Phi \quad \leftrightarrow \quad \Phi_R = \Phi^T \tag{39}$$

La definición de la siguiente matriz simétrica H_l para cada modo l permite alcanzar este objetivo sacrificando un mínimo de la precisión obtenida con la fracción polinómica matricial:

$$H_l = 0.5 \cdot (\phi_{L,l} \phi_{R,l} + \phi_{R,l}^T \phi_{L,l}^T) \tag{40}$$

La matriz H_l debería ser singular si ambas formas modales tuvieran la misma relación entre componentes. Por lo tanto, la descomposición de valores singulares (svd) de H_l y la utilización del primer valor singular permiten obtener una forma modal simetrizada para el modo l con una distorsión mínima:

$$[U_l, S_l, V_l] = \text{svd}(H_l) \quad \rightarrow \quad \hat{H}_l = U_{1,l} S_{1,l} V_{1,l}^T \quad \rightarrow \quad \phi_l = \hat{H}_{l,a} / \hat{H}_{a,a} \quad (41)$$

donde $\hat{H}_{a,a}$ representa la componente sobre la diagonal principal de \hat{H}_l que posee mayor valor absoluto mientras que $\hat{H}_{l,a}$ representa la columna de \hat{H}_l que contiene a $\hat{H}_{a,a}$.

Las componentes de las formas modales no pueden tomar valores arbitrarios a los efectos de preservar la estructura especial que poseen las matrices de los estratos de la FCD. El proceso de optimización debe imponer la restricción fundamental (11) a las formas modales para mantener dicha estructura que permite pasar al dominio espacial en forma analítica:

$$\Phi_x K_R^{-1} \Phi_z^T = -\phi_{x,0} \phi_{z,0} / \kappa_0 \quad (42)$$

donde se ha despejado la contribución del modo fundamental. Además, las formas modales son forzadas a satisfacer las condiciones de flexibilidad estática en (28):

$$\Phi_x K_R^{-2} \Phi_x^T = -\phi_{x,0}^2 / \kappa_0^2 + i \quad (43)$$

$$\Phi_z K_R^{-2} \Phi_z^T = -\phi_{z,0}^2 / \kappa_0^2 + i\alpha \quad (44)$$

La variable κ en los términos cruzados de la matriz de flexibilidad permite satisfacer automáticamente el valor exacto para $\kappa = 0$. La matriz diagonal X de la siguiente ecuación, obtenida con el criterio de mínimos cuadrados, permite regularizar las formas modales imponiendo las restricciones (42) a (44) con mínima pérdida de precisión:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_x \\ \tilde{\Phi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z \end{bmatrix} (I + X)^{1/2} \quad (45)$$

donde:

$$X = \text{diag}([x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{2n}]) \quad (46)$$

Reemplazando (45) en (42) a (44) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi_x K_R^{-1} X \Phi_z^T &= -\phi_{x,0} \phi_{z,0} / \kappa_0 - \Phi_x K_R^{-1} \Phi_z^T = P_1 \\ \Phi_x K_R^{-2} X \Phi_x^T &= -\phi_{x,0}^2 / \kappa_0^2 + i - \Phi_x K_R^{-2} \Phi_x^T = P_2 \\ \Phi_z K_R^{-2} X \Phi_z^T &= -\phi_{z,0}^2 / \kappa_0^2 + i\alpha - \Phi_z K_R^{-2} \Phi_z^T = P_3 \end{aligned} \quad (47)$$

Los coeficientes de la matriz diagonal X reacomodados como vector se calculan como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{x,1} \phi_{z,1} / \kappa_1 & \phi_{x,2} \phi_{z,2} / \kappa_2 & \dots & \phi_{x,2n} \phi_{z,2n} / \kappa_{2n} \\ \phi_{x,1}^2 / \kappa_1^2 & \phi_{x,2}^2 / \kappa_2^2 & \dots & \phi_{x,2n}^2 / \kappa_{2n}^2 \\ \phi_{z,1}^2 / \kappa_1^2 & \phi_{z,2}^2 / \kappa_2^2 & \dots & \phi_{z,2n}^2 / \kappa_{2n}^2 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Etapa de ajuste fino

El proceso iterativo de ajuste fino de los $2n$ modos involucra 6 factores de corrección por cada modo l (partes real e imaginaria del autovalor κ_l y las componentes modales $\phi_{x,l}$ y $\phi_{z,l}$) sumando un total de $12n$ parámetros de ajuste. La corrección de las componentes de la matriz de flexibilidad remanente del semi-espacio se plantea a través de los siguientes p -valores:

$$\tilde{F}_{xx}^{corr} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{(\phi_{x,l}^{\Re}(1+p_{x,l}^{\Re}) + i\phi_{x,l}^{\Im}(1+p_{x,l}^{\Im}))^2}{\kappa^2 - (\kappa_l^{\Re}(1+p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_l^{\Im}(1+p_{\kappa,l}^{\Im}))^2} \quad (49)$$

$$\tilde{F}_{zz}^{corr} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{(\phi_{z,l}^{\Re}(1+p_{z,l}^{\Re}) + i\phi_{z,l}^{\Im}(1+p_{z,l}^{\Im}))^2}{\kappa^2 - (\kappa_l^{\Re}(1+p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_l^{\Im}(1+p_{\kappa,l}^{\Im}))^2} \quad (50)$$

$$\tilde{F}_{xz}^{corr} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\kappa(\phi_{x,l}^{\Re}(1+p_{x,l}^{\Re}) + i\phi_{x,l}^{\Im}(1+p_{x,l}^{\Im}))(\phi_{z,l}^{\Re}(1+p_{z,l}^{\Re}) + i\phi_{z,l}^{\Im}(1+p_{z,l}^{\Im}))}{(\kappa_l^{\Re}(1+p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_l^{\Im}(1+p_{\kappa,l}^{\Im}))[\kappa^2 - (\kappa_l^{\Re}(1+p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_l^{\Im}(1+p_{\kappa,l}^{\Im}))^2]} \quad (51)$$

Estos p -valores generan cambios relativos que impiden cambios de signo por encontrarse acotados a $\pm 1\%$, lo que a su vez permite mantener la validez de la linealización de la matriz de sensibilidad. El sistema de ecuaciones de ajuste de los parámetros modales se obtiene separando parte real e imaginaria de cada una de estas ecuaciones que se plantean para diferentes valores del número de onda κ :

$$\tilde{F}_{xx}^{corr} \approx \tilde{F}_{xx} + \sum_{l=1}^{2n} \left(\frac{\partial \tilde{F}_{xx}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Re}} p_{\kappa,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xx}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Im}} p_{\kappa,l}^{\Im} + \frac{\partial \tilde{F}_{xx}}{\partial p_{x,l}^{\Re}} p_{x,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xx}}{\partial p_{x,l}^{\Im}} p_{x,l}^{\Im} \right) \quad (52)$$

$$\tilde{F}_{zz}^{corr} \approx \tilde{F}_{zz} + \sum_{l=1}^{2n} \left(\frac{\partial \tilde{F}_{zz}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Re}} p_{\kappa,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{zz}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Im}} p_{\kappa,l}^{\Im} + \frac{\partial \tilde{F}_{zz}}{\partial p_{z,l}^{\Re}} p_{z,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{zz}}{\partial p_{z,l}^{\Im}} p_{z,l}^{\Im} \right) \quad (53)$$

$$\tilde{F}_{xz}^{corr} \approx \tilde{F}_{xz} + \sum_{l=1}^{2n} \left(\frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Re}} p_{\kappa,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Im}} p_{\kappa,l}^{\Im} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{x,l}^{\Re}} p_{x,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{x,l}^{\Im}} p_{x,l}^{\Im} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{z,l}^{\Re}} p_{z,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{z,l}^{\Im}} p_{z,l}^{\Im} \right) \quad (54)$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve con la función CONLS (*constrained linear least-squares*) de MATLAB que permite implementar las restricciones (42) a (44) y limitar la tasa de cambio de los p -valores a $\pm 1\%$.

Una vez obtenida la convergencia de los parámetros modales de ajuste, se agrega en la primer columna de la base modal del semi-espacio el modo fundamental de propagación (puramente real) totalizando $2n+1$ modos. La estrategia usada para definir una matriz cuadrada de formas modales Ψ consiste en incorporar coordenadas modales generalizadas que permitan seguir satisfaciendo la restricción fundamental:

$$\tilde{\Phi}_x K_R^{-1} \tilde{\Phi}_z^T = 0 \quad (55)$$

donde, por ejemplo, para el caso de $n = 4$:

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_x \\ \tilde{\Phi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{x,0} & \phi_{x,1} & \phi_{x,2} & \phi_{x,3} & \phi_{x,4} & \phi_{x,5} & \phi_{x,6} & \phi_{x,7} & \phi_{x,8} \\ 1 & 0 & \Theta_{x,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Theta_{x,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{x,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{x,5} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \phi_{z,0} & \phi_{z,1} & \phi_{z,2} & \phi_{z,3} & \phi_{z,4} & \phi_{z,5} & \phi_{z,6} & \phi_{z,7} & \phi_{z,8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{z,6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{z,7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{z,8} \end{bmatrix} \quad (56)$$

El agregado del modo fundamental produce que las formas modales tengan una componente x más respecto a las componentes z (de acuerdo al esquema propuesto) que no impide la utilización de la FCD. Las componentes agregadas satisfacen automáticamente (55) restando sólo obtener las expresiones de las constantes $\Theta_{x,l}$ y $\Theta_{z,l}$ que permitan satisfacer la restricción fundamental relacionada con las componentes físicas de la matriz modal:

$$\Theta_{x,a} = -\frac{\kappa_a \phi_{z,0}}{\kappa_0 \phi_{z,a}} \quad a = 2 \dots 5$$

$$\Theta_{z,b} = -\frac{\kappa_b \phi_{x,1}}{\kappa_1 \phi_{x,b}} \quad b = 6 \dots 8$$
(57)

Definiendo las siguientes matrices de formas modales por izquierda y derecha:

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_x K_R \\ \tilde{\Phi}_z \end{bmatrix} \quad \tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_x \\ \tilde{\Phi}_z K_R \end{bmatrix} \quad (58)$$

y utilizando la ecuación (10) se obtienen las siguientes matrices físicas del semi-espacio:

$$\tilde{A} = \tilde{Y}^{-T} K_R \tilde{Z}^{-1} \quad \tilde{C} = -\tilde{Y}^{-T} K_R^3 \tilde{Z}^{-1} \quad (59)$$

que poseen la forma indicada en la ecuación (7) por cumplirse la restricción fundamental:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{xx} & 0 \\ \tilde{B}_{zx} & \tilde{A}_{zz} \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{xx} & \tilde{B}_{xz} \\ 0 & \tilde{C}_{zz} \end{bmatrix} \quad (60)$$

La aplicación de este procedimiento con $n = 9$ permite la obtención de matrices físicas que reproducen con buena precisión las curvas de flexibilidad dinámica del semi-espacio.

Evaluación de la bondad del ajuste

La Figura 1 y la Figura 2 muestran el ajuste de las componentes F_{xx} y F_{zz} , respectivamente, de la flexibilidad de un semi-espacio homogéneo con $\nu = 1/3$. La Figura 3 muestra un detalle del ajuste de la componente F_{xx} graficada en la Figura 1.

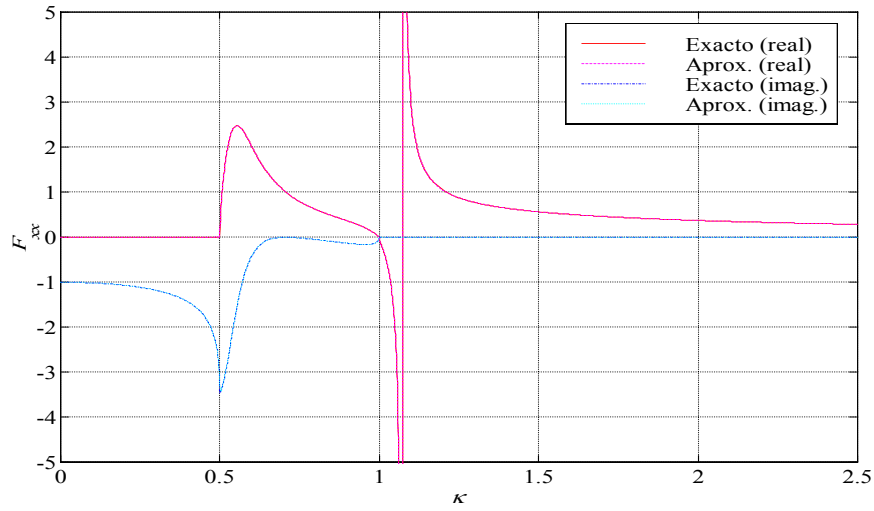


Figura 1. Componente F_{xx} de la flexibilidad de un semi-espacio homogéneo con $\nu = 1/3$

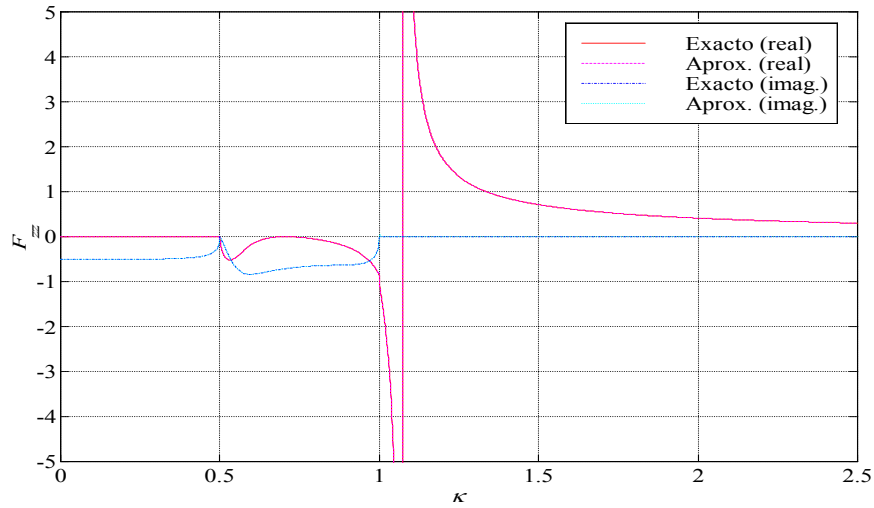


Figura 2. Componente F_{zz} de la flexibilidad de un semi-espacio homogéneo con $\nu = 1/3$

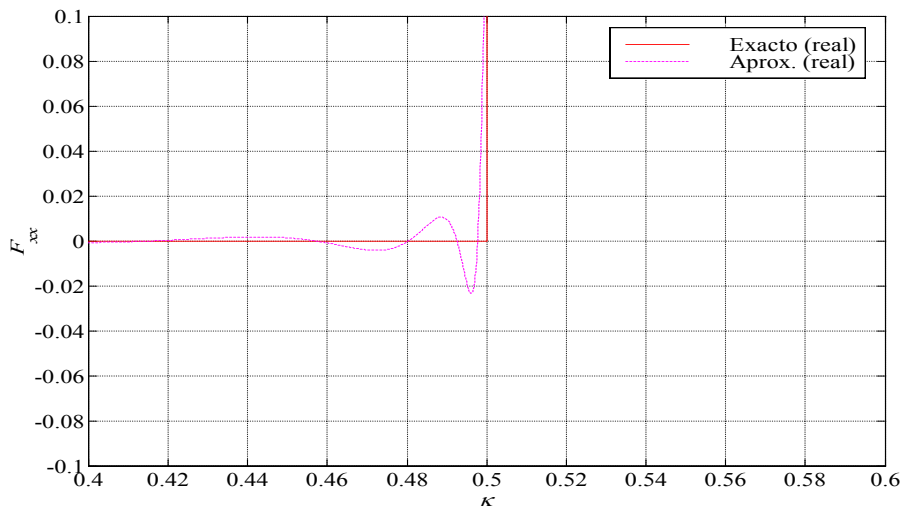


Figura 3. Componente F_{xx} de la flexibilidad de un semi-espacio homogéneo con $\nu = 1/3$

El espesor máximo recomendado para los estratos está controlado por la discretización de los estratos de la FCD y no por la aproximación del semi-espacio. En el caso de las matrices con interpolación lineal para los desplazamientos se requiere:

$$h_{\max} = 0.1 \cdot V_s / \omega \quad \Rightarrow \quad \eta_{\max} = 0.1 \quad (61)$$

donde ω representa la frecuencia de análisis en rad/seg. En el caso de las matrices con interpolación cuadrática para los desplazamientos se requiere:

$$h_{\max} = 0.4 \cdot V_s / \omega \quad \Rightarrow \quad \eta_{\max} = 0.4 \quad (62)$$

La Figura 4 y la Figura 5 muestran las distorsiones generadas en las componentes F_{xx} y F_{zz} , respectivamente, de la flexibilidad de un semi-espacio homogéneo con $\nu = 0.495$, tomando matrices de los estratos con interpolación lineal para los desplazamientos y espesor $\eta = 1$.

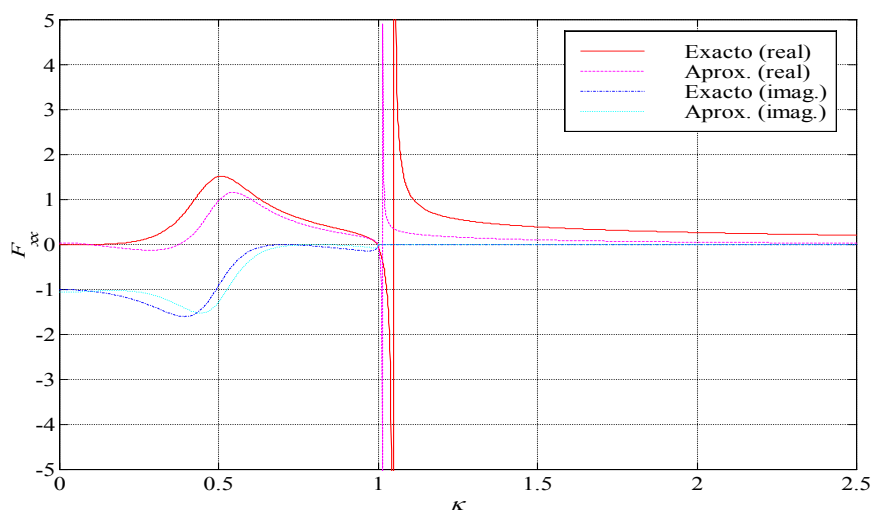


Figura 4. Componente F_{xx} de la flexibilidad de un semi-espacio homogéneo con $\nu = 0.495$

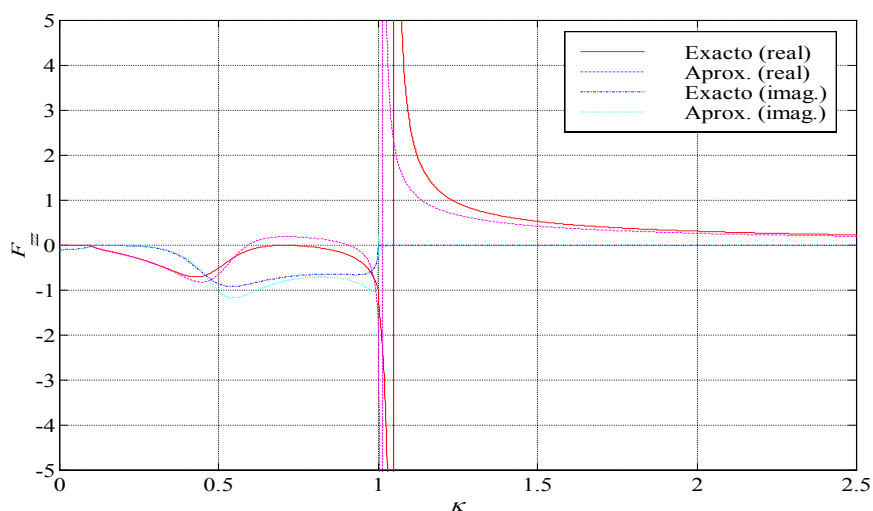


Figura 5. Componente F_{zz} de la flexibilidad de un semi-espacio homogéneo con $\nu = 0.495$

3.2 Formulación modal κ^1

La formulación κ^1 también se basa en una aproximación en “dos etapas” de los coeficientes de la flexibilidad dinámica del semi-espacio a través de parámetros modales:

$$F = \begin{bmatrix} \Psi_x (\kappa I - K_R)^{-1} \Psi_x^T & \Psi_x (\kappa I - K_R)^{-1} \Psi_z^T \\ \Psi_z (\kappa I - K_R)^{-1} \Psi_x^T & \Psi_z (\kappa I - K_R)^{-1} \Psi_z^T \end{bmatrix} \quad (63)$$

La contribución del modo fundamental a la flexibilidad del semi-espacio se descompone en dos modos simples:

$$F_0 = \begin{bmatrix} \psi_{x,0} & i\psi_{x,0} \\ \psi_{z,0} & -i\psi_{z,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa - \kappa_{R,0} & 0 \\ 0 & \kappa + \kappa_{R,0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \psi_{x,0}^T & \psi_{z,0}^T \\ i\psi_{x,0}^T & -i\psi_{z,0}^T \end{bmatrix} \quad (64)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (18) se observa que:

$$\begin{aligned} \psi_{x,0} &= \phi_{x,0} / \sqrt{2\kappa_0} \\ \psi_{z,0} &= \phi_{z,0} / \sqrt{2\kappa_0} \end{aligned} \quad (65)$$

En este caso, el modelo es forzado a ser exacto para los números de onda $\kappa = 0$ y $\kappa \rightarrow \infty$. El ajuste modal se realiza sobre la flexibilidad “remanente” que resulta de descontar a la matriz de flexibilidad el modo fundamental desacoplado en los dos modos simples, que se agregan a la base modal al final del ajuste. En la primera etapa se ajusta la flexibilidad remanente con una fracción polinómica matricial usando el criterio de mínimos cuadrados. En la segunda etapa se realiza el ajuste fino de los parámetros modales a través de un proceso iterativo que utiliza técnicas de gradientes.

El uso de coordenadas generalizadas para obtener una matriz cuadrada de formas modales permite definir matrices físicas para el semi-espacio que reproducen en forma exacta el modo fundamental de propagación y pueden acoplarse con las matrices de la formulación de capas delgadas. Sin embargo, las matrices resultantes para el semi-espacio no tienen la misma estructura de las matrices de la FCD, por lo que debe resolverse explícitamente el problema generalizado de autovalores de la ecuación (6) para obtener los parámetros modales del perfil completo de suelo.

Etapa de ajuste global

El ajuste de la matriz de flexibilidad remanente se realiza a través de la siguiente fracción polinómica matricial:

$$\tilde{F} = (I + \kappa Q_1 + \kappa^2 Q_2 + \dots + \kappa^n Q_n + \kappa^{n+1} I)^{-1} (R_0 + \kappa R_1 + \kappa^2 R_2 + \dots + \kappa^n R_n) \quad (66)$$

A la matriz R_0 se le asigna el valor de la matriz de flexibilidad exacta del semi-espacio para $\kappa = 0$ con el descuento de la contribución del modo fundamental:

$$R_0 = \begin{bmatrix} \phi_{x,0}^2 / \kappa_0^2 - i & 0 \\ 0 & \phi_{z,0}^2 / \kappa_0^2 - i\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\psi_{x,0}^2 / \kappa_0 - i & 0 \\ 0 & 2\psi_{z,0}^2 / \kappa_0 - i\alpha \end{bmatrix} \quad (67)$$

mientras que la matriz Q_0 se asume igual a la matriz identidad a los efectos de garantizar que la aproximación de la flexibilidad posea el valor exacto correspondiente a $\kappa = 0$. Además, a la matriz R_n se le asigna el valor de la matriz de flexibilidad exacta del semi-espacio cuando

$\kappa \rightarrow \infty$ teniendo en cuenta la contribución del modo fundamental:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{2(1-\alpha^2)} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \phi_{x,0} \phi_{z,0} / \kappa_0 \\ \phi_{x,0} \phi_{z,0} / \kappa_0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2(1-\alpha^2)} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2\psi_{x,0} \psi_{z,0} \\ 2\psi_{x,0} \psi_{z,0} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (68)$$

Operando sobre la ecuación (66) se obtiene:

$$\tilde{F} + \kappa Q_1 \tilde{F} + \kappa^2 Q_2 \tilde{F} + \dots + \kappa^n Q_n \tilde{F} + \kappa^{n+1} \tilde{F} = R_0 + \kappa R_1 + \kappa^2 R_2 + \dots + \kappa^n R_n \quad (69)$$

$$\kappa R_1 + \kappa^2 R_2 + \dots + \kappa^{n-1} R_{n-1} - \kappa Q_1 \tilde{F} - \kappa^2 Q_2 \tilde{F} - \dots - \kappa^n Q_n \tilde{F} = \tilde{F} + \kappa^{n+1} \tilde{F} - R_0 - \kappa^n R_n = \tilde{P} \quad (70)$$

Considerando m puntos discretos de ajuste para el eje κ se obtiene:

$$\hat{U} \hat{K} = \hat{P} \quad \Rightarrow \quad \hat{U} = \hat{P} \hat{K}^\dagger \quad (71)$$

donde † indica pseudo-inversa (ajuste por mínimos cuadrados) mientras que:

$$\hat{U} = [R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_{n-1} \quad Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n] \quad (72)$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \kappa_1 I & \kappa_2 I & \dots & \kappa_m I \\ \kappa_1^2 I & \kappa_2^2 I & \dots & \kappa_m^2 I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_1^{n-1} I & \kappa_2^{n-1} I & \dots & \kappa_m^{n-1} I \\ -\kappa_1 \tilde{F}_1 & -\kappa_2 \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_m \tilde{F}_m \\ -\kappa_1^2 \tilde{F}_1 & -\kappa_2^2 \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_m^2 \tilde{F}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\kappa_1^n \tilde{F}_1 & -\kappa_2^n \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_m^n \tilde{F}_m \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\hat{P} = [\tilde{P}_1 \quad \tilde{P}_2 \quad \dots \quad \tilde{P}_m] \quad (74)$$

La forma matricial equivalente a la fracción polinómica matricial en (66) resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \hat{C} (\kappa^2 I - \hat{A})^{-1} \hat{B} & \hat{C} &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad I] \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} & \hat{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -I \\ I & 0 & \dots & 0 & -Q_1 \\ 0 & I & \dots & 0 & -Q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & -Q_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (75)$$

La matriz de flexibilidad aproximada resultante no es necesariamente simétrica, por lo que el proceso de simetrización propuesto es totalmente análogo al presentado para la formulación modal κ^2 . Durante el ajuste, las formas modales son forzadas a satisfacer las condiciones de flexibilidad en (67) para $\kappa = 0$:

$$\Psi_x K_R^{-1} \Psi_x^T = -2\psi_{x,0}^2 / \kappa_0 + i \tag{76}$$

$$\Psi_z K_R^{-1} \Psi_z^T = -2\psi_{z,0}^2 / \kappa_0 + i\alpha \tag{77}$$

$$\Psi_x K_R^{-1} \Psi_z^T = 0 \tag{78}$$

y las condiciones de flexibilidad en (68) para $\kappa \rightarrow \infty$:

$$\Psi_x \Psi_x^T = 1 / (2(1 - \alpha^2)) \tag{79}$$

$$\Psi_z \Psi_z^T = 1 / (2(1 - \alpha^2)) \tag{80}$$

$$\Psi_x \Psi_z^T = \alpha^2 / (2(1 - \alpha^2)) - 2\psi_{x,0} \psi_{z,0} \tag{81}$$

La matriz diagonal X dada en la siguiente ecuación, obtenida con el criterio de mínimos cuadrados, permite regularizar las formas modales imponiendo las restricciones (76) a (81) con mínima pérdida de precisión:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_x \\ \tilde{\Psi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_x \\ \Psi_z \end{bmatrix} (I + X)^{1/2} \tag{82}$$

donde:

$$X = \text{diag}([x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{2n}]) \tag{83}$$

Reemplazando (82) en (76) a (81) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Psi_x K_R^{-1} X \Psi_x^T &= -2\psi_{x,0}^2 / \kappa_0 + i - \Psi_x K_R^{-1} \Psi_x^T = P_1 \\ \Psi_z K_R^{-1} X \Psi_z^T &= -2\psi_{z,0}^2 / \kappa_0 + i\alpha - \Psi_z K_R^{-1} \Psi_z^T = P_2 \\ \Psi_x K_R^{-1} X \Psi_z^T &= -\Psi_x K_R^{-1} \Psi_z^T = P_3 \\ \Psi_x X \Psi_x^T &= 1 / (2(1 - \alpha^2)) - \Psi_x \Psi_x^T = P_4 \\ \Psi_z X \Psi_z^T &= 1 / (2(1 - \alpha^2)) - \Psi_z \Psi_z^T = P_5 \\ \Psi_x X \Psi_z^T &= \alpha^2 / (2(1 - \alpha^2)) - 2\psi_{x,0} \psi_{z,0} - \Psi_x \Psi_z^T = P_6 \end{aligned} \tag{84}$$

Los coeficientes de la matriz diagonal X reacomodados como vector se calculan como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{x,1}^2 / \kappa_1 & \psi_{x,2}^2 / \kappa_2 & \dots & \psi_{x,2n}^2 / \kappa_{2n} \\ \psi_{z,1}^2 / \kappa_1 & \psi_{z,2}^2 / \kappa_2 & \dots & \psi_{z,2n}^2 / \kappa_{2n} \\ \psi_{x,1} \psi_{z,1} / \kappa_1 & \psi_{x,2} \psi_{z,2} / \kappa_2 & \dots & \psi_{x,2n} \psi_{z,2n} / \kappa_{2n} \\ \psi_{x,1}^2 & \psi_{x,2}^2 & \dots & \psi_{x,2n}^2 \\ \psi_{z,1}^2 & \psi_{z,2}^2 & \dots & \psi_{z,2n}^2 \\ \psi_{x,1} \psi_{z,1} & \psi_{x,2} \psi_{z,2} & \dots & \psi_{x,2n} \psi_{z,2n} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} \tag{85}$$

Etapa de ajuste fino

El proceso iterativo de ajuste fino de los $2n$ modos involucra 6 factores de corrección por cada modo l (partes real e imaginaria del autovalor κ_l y las componentes modales $\phi_{x,l}$ y $\phi_{z,l}$) sumando un total de $12n$ parámetros de ajuste. La corrección de las componentes de la matriz de flexibilidad remanente del semi-espacio se plantea a través de los siguientes p -valores:

$$\tilde{F}_{xx}^{corr} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{(\psi_{x,l}^{\Re}(1+p_{x,l}^{\Re}) + i\psi_{x,l}^{\Im}(1+p_{x,l}^{\Im}))^2}{\kappa - (\kappa_l^{\Re}(1+p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_l^{\Im}(1+p_{\kappa,l}^{\Im}))} \quad (86)$$

$$\tilde{F}_{zz}^{corr} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{(\psi_{z,l}^{\Re}(1+p_{z,l}^{\Re}) + i\psi_{z,l}^{\Im}(1+p_{z,l}^{\Im}))^2}{\kappa - (\kappa_l^{\Re}(1+p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_l^{\Im}(1+p_{\kappa,l}^{\Im}))} \quad (87)$$

$$\tilde{F}_{xz}^{corr} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{(\psi_{x,l}^{\Re}(1+p_{x,l}^{\Re}) + i\psi_{x,l}^{\Im}(1+p_{x,l}^{\Im}))(\psi_{z,l}^{\Re}(1+p_{z,l}^{\Re}) + i\psi_{z,l}^{\Im}(1+p_{z,l}^{\Im}))}{\kappa - (\kappa_l^{\Re}(1+p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_l^{\Im}(1+p_{\kappa,l}^{\Im}))} \quad (88)$$

Estos p -valores generan cambios relativos que impiden cambios de signo por encontrarse acotados a $\pm 1\%$, lo que a su vez permite mantener la validez de la linealización de la matriz de sensibilidad. El sistema de ecuaciones de ajuste de los parámetros modales es idéntico al planteado en (52) a (54) para la formulación κ^2 .

Una vez obtenida la convergencia de los parámetros modales de ajuste se agregan a la base modal los modos simples en (64) que representan la contribución del modo fundamental. La definición de una matriz cuadrada de formas modales se realiza agregando una matriz de valores nulos debajo de las componentes de los modos simples que representan el modo fundamental, y agregando una matriz identidad debajo de los modos ajustados:

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_{x,0} & i\psi_{x,0} & \psi_{x,1} & \psi_{x,2} & \cdots & \psi_{x,2n} \\ \psi_{z,0} & -i\psi_{z,0} & \psi_{z,1} & \psi_{z,2} & \cdots & \psi_{z,2n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

En esta formulación κ^1 no resulta necesario agrupar las componentes x en las primeras filas y las componentes z en las últimas filas. La aplicación del procedimiento descrito con $n = 9$ permite obtener matrices físicas que reproducen con buena precisión las curvas de flexibilidad dinámica del semi-espacio.

Evaluación de la bondad del ajuste

La bondad del ajuste presenta resultados similares a los observados para la formulación modal κ^2 . Sin embargo, se observa que para el ensamble de varios estratos sólo se obtienen buenos resultados utilizando matrices con interpolación cuadrática para los desplazamientos.

3.3 Agregado de amortiguamiento

La incorporación de un valor β de amortiguamiento material histerético al modelo del semi-espacio se realiza sobre los autovalores previo a la obtención de las matrices físicas y/o al paso al dominio espacial de la siguiente forma:

$$K_R^* = K_R / (1 + i\beta) \quad (90)$$

A su vez, el agregado de amortiguamiento a las formas modales permite mantener el valor exacto de la flexibilidad para $\kappa = 0$. Esta incorporación de amortiguamiento difiere para los autovectores de las formulaciones modales κ^2 y κ^1 :

$$\Phi^* = \Phi / (1 + i\beta) \quad (91)$$

$$\Psi^* = \Psi / (1 + i\beta)^{1/2} \quad (92)$$

Estos artificios no producen la violación de la restricción fundamental, dado que en esta expresión sale como factor común el término $(1 + i\beta)$.

3.4 Dimensionalización de parámetros modales adimensionales

Los autovalores adimensionales se dimensionalizan de la siguiente manera:

$$\kappa_R = \frac{\omega}{V_S} \bar{\kappa}_R \quad (93)$$

Los autovectores de la formulación κ^2 se dimensionalizan de la siguiente manera:

$$\phi_x^2 = \frac{\omega}{\rho V_S^3} \bar{\phi}_x^2 \quad \phi_z^2 = \frac{\omega}{\rho V_S^3} \bar{\phi}_z^2 \quad (94)$$

mientras que los autovectores de la formulación κ^1 se dimensionalizan como:

$$\psi_x^2 = \frac{1}{\rho V_S^2} \bar{\psi}_x^2 \quad \psi_z^2 = \frac{1}{\rho V_S^2} \bar{\psi}_z^2 \quad (95)$$

4 APLICACIONES DE LOS MODELOS DEL PERFIL DE SUELO

En esta sección se presentan algunas aplicaciones de los modelos propuestos para el semi-espacio. El cálculo de la rigidez dinámica de fundaciones requiere indefectiblemente el uso de la formulación modal κ^1 debido a que la formulación modal κ^2 no posee la capacidad para representar el comportamiento cuasi-estático, particularmente en proximidades de la zona de aplicación de la carga. Sin embargo, la formulación κ^1 tiene un alto costo computacional dado que requiere la utilización de versiones numéricas de la transformada de Hankel para obtener la respuesta en el dominio espacial, aunque se evitan las singularidades que aparecen en la formulación exacta.

Por otra parte, la formulación modal κ^2 puede utilizarse para el ajuste de perfiles de suelo dado que no se requiere el cálculo de respuestas cuasi-estáticas (los datos experimentales generalmente no poseen buena coherencia para bajas frecuencias) ni se requiere el cálculo de respuestas cerca de la zona de aplicación de la carga.

4.1 Respuesta dinámica superficial para semi-espacio homogéneo

Respuesta producida por una carga puntual vertical

El desplazamiento vertical en la superficie de un semi-espacio homogéneo producida por una carga puntual vertical, en función de los parámetros modales de la formulación κ^2 , se expresa en el dominio k como:

$$\bar{u}_z(k) = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^M \frac{\phi_{z,m}^2}{(k^2 - k_m^2)} \quad (96)$$

La transformación al dominio espacial produce:

$$u_z(\rho) = \frac{P}{4i} \sum_{m=1}^M H_0^{(2)}(k_m \rho) \phi_{z,m}^2 \quad (97)$$

donde M es el número de modos, y se asume que $\text{Im}(k_m) \leq 0$. La transformación de los parámetros modales de 2° orden de la ecuación (96) a parámetros modales de 1° orden usando la expresión (65) permite establecer la relación entre las formulaciones κ^1 y κ^2 :

$$\bar{u}_z(k) = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^M \frac{2k_m \psi_{z,m}^2}{(k^2 - k_m^2)} \quad (98)$$

Operando sobre esta expresión se obtiene:

$$\bar{u}_z(k) = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^M \left(\frac{k + k_m}{k^2 - k_m^2} - \frac{k - k_m}{k^2 - k_m^2} \right) \psi_{z,m}^2 = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{k - k_m} - \frac{1}{k + k_m} \right) \psi_{z,m}^2 \quad (99)$$

donde se asume que $\text{Re}(k_m) > 0$. El primer produce una respuesta oscilante en el dominio espacial, mientras que el segundo término produce una respuesta no-oscilante. La respuesta en el dominio espacial se obtiene como:

$$u_z(\rho) = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^M \left((I_{Am}(\rho) + I_{Bm}(\rho)) - (I_{Am}(\rho) - I_{Bm}(\rho)) \right) \psi_{z,m}^2 \quad (100)$$

donde las integrales I_{Am} y I_{Bm} resultan las siguientes transformadas analíticas de Hankel:

$$I_{Am}(\rho) = \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 - k_m^2} J_0(k\rho) dk = \frac{1}{\rho} - \frac{k_m \pi}{2} [\mathbf{H}_0(k_m \rho) + iJ_0(k_m \rho)] \quad (101)$$

$$I_{Bm}(\rho) = k_m \int_0^\infty \frac{k}{k^2 - k_m^2} J_0(k\rho) dk = k_m \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(k_m \rho) = -\frac{k_r \pi}{2} [Y_0(k_m \rho) + iJ_0(k_m \rho)] \quad (102)$$

siendo J_0 e Y_0 funciones de Bessel de orden 0, y \mathbf{H}_0 la función de Struve de orden 0. De esta forma:

$$u_z(\rho) = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^M \left(\underbrace{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{k_m \pi}{2} (Y_0(k_m \rho) + \mathbf{H}_0(k_m \rho)) - i k_m \pi J_0(k_m \rho) \right)}_{\text{complejo y oscilante}} - \dots \right) \left(\underbrace{\left(\frac{1}{\rho} + \frac{k_m \pi}{2} (Y_0(k_m \rho) - \mathbf{H}_0(k_m \rho)) \right)}_{\text{puramente real y no-oscilante}} \right) \psi_{z,m}^2 \quad (103)$$

Uniando ambos términos se arriba finalmente a la respuesta espacial del modo compuesto:

$$u_z(\rho) = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^M \frac{k_m \pi}{i} (J_0(k_m \rho) - i \cdot Y_0(k_m \rho)) \psi_{z,m}^2 \quad (104)$$

$$u_z(\rho) = \frac{P}{4i} \sum_{m=1}^M 2k_m H_0^{(2)}(k_m \rho) \psi_{z,m}^2 = \frac{P}{4i} \sum_{m=1}^M H_0^{(2)}(k_m \rho) \phi_{z,m}^2 \quad (105)$$

La respuesta en el dominio k utilizando la formulación κ^1 resulta:

$$\bar{u}_z(k) = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^M \frac{\psi_{z,m}^2}{(k - k_m)} \quad (106)$$

La transformación al dominio espacial para cada término de la sumatoria produce un término complejo y oscilante si $\text{Re}(k_m) > 0$, o puramente real y no-oscilante si $\text{Re}(k_m) < 0$, de acuerdo a lo que puede observarse en (103).

Flexibilidad vertical de un disco rígido

El desplazamiento vertical en la superficie de un semi-espacio homogéneo producida por una carga uniforme q aplicada en una región circular de radio R sobre esta superficie, en función de los parámetros modales de la formulación κ^2 , se expresa en el dominio k como:

$$\bar{u}_z(k) = -\frac{qR}{k} J_1(kR) \sum_{m=1}^M \frac{\phi_{z,m}^2}{(k^2 - k_m^2)} \quad (107)$$

El cálculo de la flexibilidad dinámica vertical de un disco apoyado sobre la superficie del semi-espacio requiere la solución de la siguiente integral, presentada en el trabajo de [Kausel y Roësset \(1981b\)](#):

$$I_{1m} = \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_1(kR)}{k^2 - k_m^2} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2ik_m} J_0(k_m \rho) H_1^{(2)}(k_m R) - \frac{1}{Rk_m^2} & 0 \leq \rho \leq R \\ \frac{\pi}{2ik_m} J_1(k_m R) H_0^{(2)}(k_m \rho) & R \leq \rho \end{cases} \quad (108)$$

El desplazamiento vertical en el dominio k usando la formulación κ^1 resulta:

$$\bar{u}_z(k) = -\frac{qR}{k} J_1(kR) \sum_{m=1}^M \frac{\psi_{z,m}^2}{(k - k_m)} \quad (109)$$

Esta formulación κ^1 requiere resolver la siguiente integral que no posee una solución analítica, debiendo recurrirse a técnicas numéricas:

$$I_{5m} = \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_1(kR)}{k - k_m} dk \quad (110)$$

La integral I_{5m} presenta potenciales problemas numéricos para autovalores con parte real positiva por una posible singularidad para un valor pequeño (o nulo) de la parte imaginaria. Por tal motivo, se descompone la integral I_{5m} en la suma de una integral I_{1m} y una integral numérica con el autovalor cambiado de signo:

$$I_{5m} = 2k_m \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_1(kR)}{k^2 - k_m^2} dk + \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_1(kR)}{k + k_m} dk \quad (111)$$

La ventaja de esta descomposición es la eliminación de posibles singularidades de la matriz de flexibilidad en el dominio k antes de la transformación al dominio espacial.

La flexibilidad dinámica vertical del disco se evalúa aplicando para cada frecuencia de análisis el siguiente procedimiento:

- Se divide el disco en anillos preferentemente de igual espesor. Por supuesto, un mayor número de anillos mejora la aproximación de la flexibilidad dinámica.
- Se calcula la respuesta analítica producida por una carga distribuida unitaria aplicada en un disco de radio genérico.
- Se calcula la respuesta producida por cada anillo, como la diferencia entre respuestas del disco genérico tomando el radio exterior e interior del anillo, respectivamente.
- Se calcula la carga en cada anillo, imponiendo la condición que la superposición de las respuestas en el centro de los anillos produzca un desplazamiento unitario.
- La rigidez dinámica se obtiene como la suma de fuerzas de todos los anillos.
- La flexibilidad dinámica se calcula como la inversa de la rigidez dinámica.

La Figura 6 y la Figura 7 muestran la flexibilidad dinámica vertical (adimensionalizada con la flexibilidad estática) de un disco rígido apoyado sobre un semi-espacio homogéneo, para coeficientes de Poisson $\nu = 1/3$ y $\nu = 0.495$, respectivamente. La frecuencia adimensional se calcula como:

$$a_0 = \omega / V_s \cdot R \quad (112)$$

La formulación modal κ^2 no posee la capacidad de reproducir la flexibilidad estática dado que las componentes de flexibilidad en el dominio número de onda decrecen asintóticamente con κ^2 para bajas frecuencias. Por otra parte, estas componentes en la formulación modal κ^1 decrecen con κ al igual que las expresiones exactas.

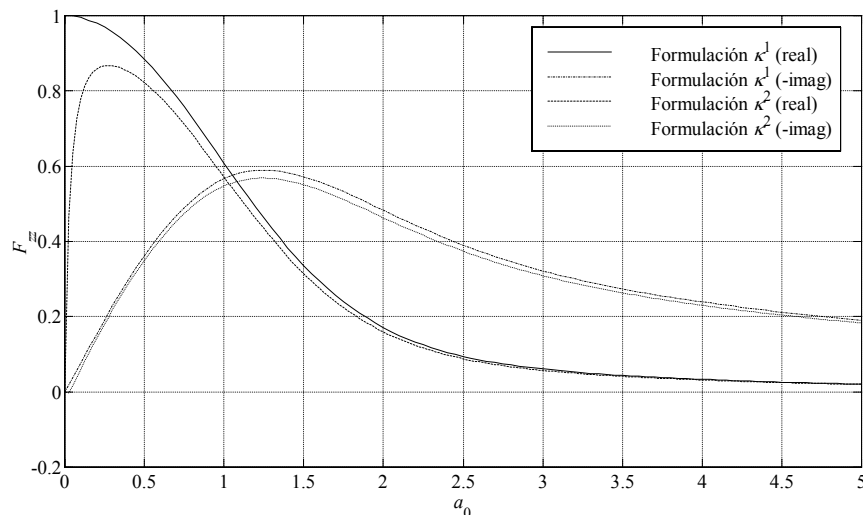


Figura 6. Flexibilidad dinámica vertical de un disco para formulaciones κ^2 y κ^1 ($\nu = 1/3$).

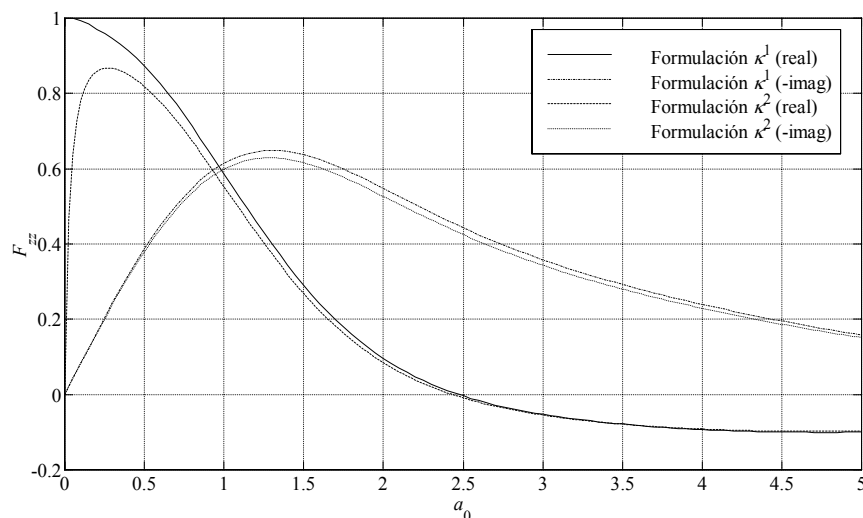


Figura 7. Flexibilidad dinámica vertical de un disco para formulaciones κ^2 y κ^1 ($\nu = 0.495$).

4.2 Ajuste de parámetros mecánicos de suelos estratificados

El ajuste de parámetros mecánicos de perfiles estratificados de suelo puede realizarse usando la formulación modal κ^2 dado que permite la determinación de la respuesta en forma analítica en función de los parámetros modales del modelo. La técnica presentada en el trabajo de Ceballos y Prato (2010) se emplea para el ajuste de perfiles de suelo utilizando múltiples transductores. La hipótesis de considerar una carga vertical puntual aplicada durante los ensayos sobre la superficie permite calcular la respuesta axil-simétrica a través de (13).

Un recaudo que debe tomarse es colocar los transductores alejados del punto de aplicación de la carga dado que esta formulación no tiene la capacidad de representar adecuadamente la respuesta en proximidades de la zona cargada. Por otra parte, la utilización de información experimental en bajas frecuencias debe evitarse por la incapacidad de esta formulación de reproducir respuestas cuasi-estáticas. De todos modos, esta restricción no representa una limitación relevante debido a que los datos experimentales suelen presentar valores bajos de coherencia para frecuencias bajas dada la energía necesaria del golpe para producir una respuesta con suficiente contraste frente a los ruidos en este rango de frecuencias.

La Figura 8 y la Figura 9 muestran una comparación de los desplazamientos verticales producidos por una carga vertical distribuida q aplicada en una zona circular de radio R sobre la superficie de un semi-espacio homogéneo, tomando coeficientes de Poisson $\nu = 1/3$ y $\nu = 0.495$, respectivamente. La coordenada radial ρ se adimensionaliza de la siguiente forma:

$$\bar{\rho} = \omega/V_s \cdot \rho \tag{113}$$

mientras que los desplazamientos se adimensionalizan como:

$$\bar{u}_z(\bar{\rho}) = \frac{\delta V_s^3}{\omega q R^2} u_z(\rho) \tag{114}$$

La zona circular cargada posee un radio adimensional:

$$\bar{R} = \omega/V_s \cdot R = 0.157 \tag{115}$$

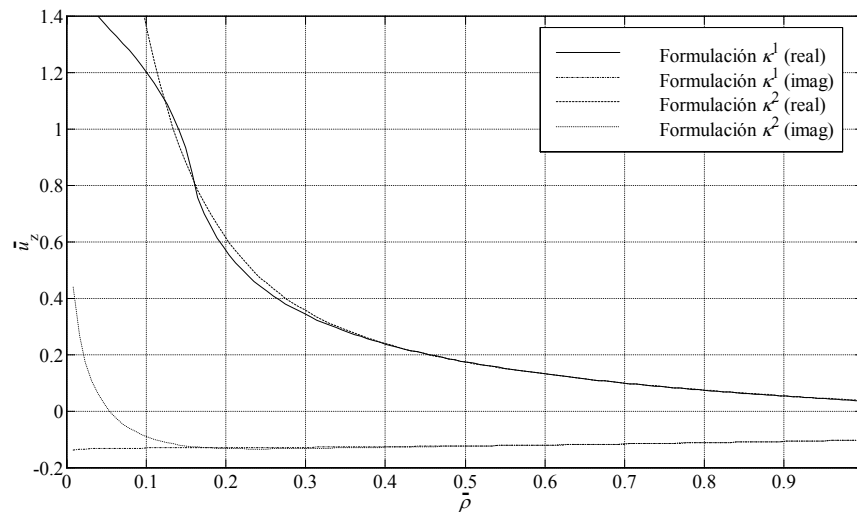


Figura 8. Respuesta espacial para formulaciones κ^2 y κ^1 ($\nu = 1/3$).

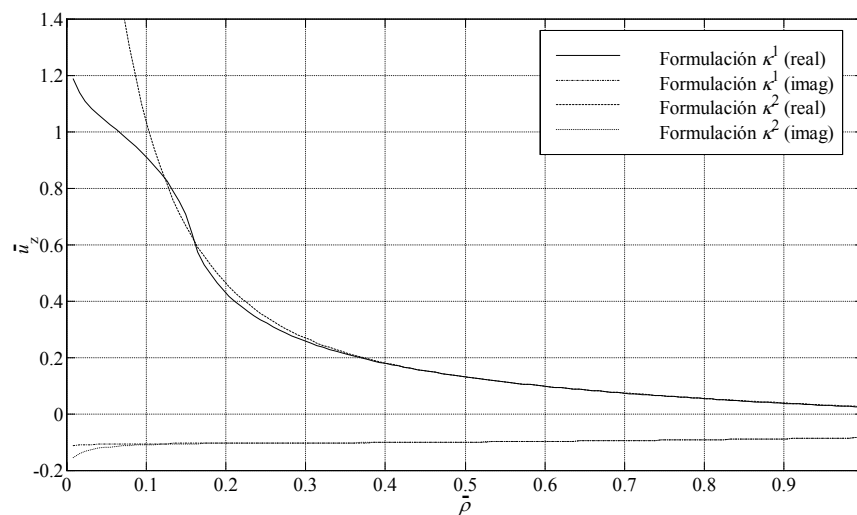


Figura 9. Respuesta espacial para formulaciones κ^2 y κ^1 ($\nu = 0.495$).

La formulación κ^2 no representa adecuadamente la respuesta a poca distancia de la zona de aplicación de la carga, aunque mejora notoriamente para coordenadas radiales adimensionales mayores a 0.4 donde ambas formulaciones producen los mismos resultados.

5 CONCLUSIONES

El ajuste de los coeficientes de la matriz de flexibilidad de un semi-espacio homogéneo a través de parámetros modales ha permitido obtener un modelo con dos variantes para analizar el comportamiento dinámico de perfiles estratificados de suelo. Ambas formulaciones resultan aptas para su ensamble con las matrices de estratos de la formulación de capas delgadas, que se utiliza exhaustivamente en casos prácticos dada la posibilidad de transformar la respuesta del dominio número de onda al dominio espacial en forma analítica. La formulación κ^1 encuentra aplicación en el análisis de la rigidez dinámica de bloques de fundación apoyados o embebidos en el terreno. La formulación κ^2 es potencialmente útil para su implementación en algoritmos de ajuste de parámetros mecánicos de perfiles de suelo.

Los casos analizados de aplicación del modelo propuesto muestran ventajas y desventajas de ambas formulaciones. La formulación κ^2 presenta como principal ventaja una consistencia completa con la formulación de capas delgadas que permite obtener la respuesta espacial sin más pérdidas de precisión que las involucradas en la aproximación de los coeficientes de flexibilidad del semi-espacio. La desventaja de esta formulación es que no posee la capacidad de representar la respuesta en proximidades de la zona de aplicación de la carga ni para bajas frecuencias de análisis.

La formulación κ^1 recientemente desarrollada se adapta satisfactoriamente a los valores exactos de la flexibilidad del semi-espacio en el rango completo del dominio número de onda. Sin embargo, las expresiones analíticas que permitan una transformación en forma cerrada de la contribución de cada modo a la respuesta entre ambos dominios no han sido aún halladas. Por tal motivo, se utiliza una técnica que permite eliminar las singularidades en la integral de transformación descomponiéndola en la suma de una integral con solución analítica y una integral numérica con un argumento de variación suave.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es parcialmente financiado por el CONICET y por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba.

REFERENCIAS

- Ceballos, M. A., Prato, C. A., *Modal Description of Foundation Dynamics*, XX International Modal Analysis Conference, Los Angeles, CA, U.S.A., 2002.
- Ceballos, M. A., *Análisis Modal Experimental Aplicado a la Calibración de Modelos de Sistemas con Interacción Suelo-Estructura*, Tesis Doctoral, Univ. Nac. de Córdoba, 2004.
- Ceballos, M. A., y Prato, C. A., *Análisis Modal de la Dispersión de Fase Espacial de Ondas Superficiales Utilizada para el Ajuste de Perfiles de Suelo*, XVIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus aplicaciones (ENIEF 2009), Tandil, Argentina, 3-6 Noviembre de 2009.
- Ceballos, M. A., Prato, C. A., *Experimental Estimation of Soil Profiles through Spatial Phases Analysis of Surface Waves*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering (2010), doi: 10.1016/j.soildyn.2010.08.008 (Article in Press).
- Kausel, E., *Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media*, Research Report R74-11, Soils Publication No. 336, Dept. of Civil Engineering, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, U.S.A., 1974.
- Kausel, E., Roesset, J. M., *Stiffness Matrices for Layered Soils*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 71, No. 6, pp. 1743-1761, 1981a.
- Kausel, E., *An Explicit Solution for the Green Functions for Dynamic Loads in Layered Media*, MIT Research Report R81-13, Dept. of Civil Engineering, MIT, Cambridge, Massachusetts, U.S.A., 1981b.
- Wolf, J. P., *Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models*, PTR Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U.S.A., 1994.