

FLAMBAGEM GLOBAL DE PLACAS REFORÇADAS

Franco Bianchetti Saint'Yves^a, Eliseu Lucena Neto^b e José Antônio Hernandez^b

^a*Empresa Brasileira de Aeronáutica S/A - EMBRAER, Av. Brigadeiro Faria Lima, 2170, 12227-901
São José dos Campos - SP - Brazil, francobianchetti@gmail.com.br*

^b*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Praça Marechal Eduardo Gomes, 50, 12228-900 São José dos
Campos, SP, Brasil, eliseu@ita.br*

Palavras-chave: Flambagem, Placa reforçada.

Resumo. Placas retangulares reforçadas em uma direção e sujeitas à flambagem por compressão, na mesma direção dos reforçadores, são estruturas de aplicação usual principalmente no extradorso ou intradorso de asas de aeronaves. Devido à excentricidade dos reforçadores, alguns cuidados devem ser tomados na aplicação da carga na análise linear de flambagem. Se uma placa carregada não permanece plana antes de flambar, a flambagem pode fisicamente não ocorrer e, conseqüentemente, a carga de flambagem determinada numa análise linear será ilusória. Este trabalho apresenta uma expressão analítica, com base na linearização do problema em relação ao campo de deslocamentos, para a carga na qual placas reforçadas flambam globalmente, comparando-a a resultados rigorosos.

1 INTRODUÇÃO

A capacidade de suporte de uma placa com relação à flambagem decorrente da aplicação de cargas em seu plano aumenta consideravelmente com a adição de reforçadores. Ao mesmo tempo em que se aumenta a carga crítica, aumenta-se também a dificuldade de análise da estrutura resultante. O número de variáveis envolvidas cresce e, com esse maior número de variáveis, os modos de flambagem tornam-se mais complexos. É comum o uso de fórmulas ou curvas simplificadas para o projeto dessas estruturas (Szilard, 2004).

Uma placa reforçada pode flambar globalmente ou localmente. Diz-se que a flambagem é global quando os reforçadores flambam juntamente com o revestimento. Na flambagem local, os reforçadores flambam ou formam linhas nodais flambando, dessa vez, o revestimento entre reforçadores.

Uma informação importante para o projeto é identificar o modo em que a placa flamba com a menor carga (carga crítica). Sabe-se que a flambagem global é crítica em placas com reforçadores pouco espaçados.

Placas retangulares reforçadas em uma direção e submetidas à flambagem por compressão, na mesma direção dos reforçadores, são estruturas de aplicação usual principalmente no extradorso ou intradorso de asas de aeronaves. De uma forma geral, o aumento da rigidez de uma placa por meio do uso de reforçadores é considerado uma prática economicamente viável. Utilizando-se um painel com reforçadores dispostos de forma igualmente espaçada, este trabalho propõe uma expressão analítica para a carga na qual essas estruturas flambam globalmente. Usa-se a teoria de placas de Kirchhoff para o revestimento e a teoria de vigas de Euler-Bernoulli para os reforçadores (Reddy, 1999). O problema de flambagem é linearizado com relação ao campo de deslocamentos.

A expressão analítica proposta pode ser atrativa em problemas de otimização por facilitar a análise de sensibilidade. É uma expressão simplificada por estar associada à substituição da placa reforçada por uma placa de rigidez equivalente com a mesma espessura do revestimento.

A determinação da carga de flambagem por meio das equações linearizadas é de custo computacional baixo, mas é um procedimento que pode levar a resultados absurdos como qualquer outro procedimento de análise linear de flambagem.

O procedimento adotado, guiado pelo princípio dos deslocamentos virtuais, conduz a uma placa equivalente com rigidez de membrana $[A]$ e de flexão $[D]$, típica de uma placa ortotrópica. Além disso, o procedimento mostra que a placa equivalente também apresenta rigidez de acoplamento membrana-flexão $[B]$ com um único coeficiente não nulo B_{11} . O fato de ser $[B]$ diferente de zero não é de causar espécie uma vez que os reforçadores da placa original são dispostos assimetricamente em relação ao revestimento.

Na análise linear de flambagem deve-se impor a restrição de a placa permanecer plana antes de flambar, caso contrário a flambagem pode fisicamente não ocorrer e a carga crítica prevista ser completamente ilusória (Leissa, 1986). Satisfazer essa restrição não é tão trivial, e costuma não ser cuidadosamente verificada pelos analistas. A restrição se justifica para a placa equivalente devido à presença do coeficiente de rigidez B_{11} e para a placa original devido a ser assimetricamente reforçada. Mostramos no trabalho como satisfazer a restrição de manter a placa plana antes de flambar no modelo analítico proposto, que usa a placa equivalente, e no modelo de elementos finitos obtido pelo Nastran (MSC/NASTRAN, 2003), que usa diretamente a placa reforçada.

A placa em que se baseia o modelo proposto equivale à placa reforçada no que diz respeito à expressão do princípio dos deslocamentos virtuais, pois na sua obtenção “dilui-se” no revestimento o trabalho virtual interno referente aos reforçadores.

Dentre os diversos tipos de análises estruturais disponíveis no Nastran, foram utilizadas neste trabalho a *análise estática* e a *análise de flambagem* (linear). A análise estática foi usada para determinar o padrão de distribuição do carregamento a ser aplicado que mantivesse a placa plana antes de flambar, enquanto a análise de flambagem (linear) foi usada para calcular as cargas e os modos correspondentes de flambagem. Os resultados do modelo analítico são comparados com os resultados numéricos obtidos pelo Nastran.

Portanto, o objetivo deste trabalho é propor um modelo analítico que forneça de maneira eficiente e eficaz a carga na qual placas reforçadas flambam globalmente. Para testar a eficácia do procedimento, os resultados obtidos são comparados aos de modelos de elementos finitos do Nastran.

2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A placa retangular reforçada da [Figura 1](#) tem dimensões a e b e corresponde a um painel integral típico do extradorso ou intradorso de uma asa de aeronave. A placa é considerada simplesmente apoiada nas longarinas e em duas nervuras adjacentes, com n reforçadores igualmente espaçados e sujeita a uma carga axial de compressão de resultante P . O plano xy situa-se na superfície média do revestimento. [A Figura 2](#) traz detalhes adicionais.

Uma placa pode flambar globalmente ou localmente. Diz-se que a flambagem é global quando os reforçadores flambam juntamente com o revestimento. Na flambagem local, os reforçadores flambam ou formam linhas nodais flambando, dessa vez, o revestimento entre reforçadores.

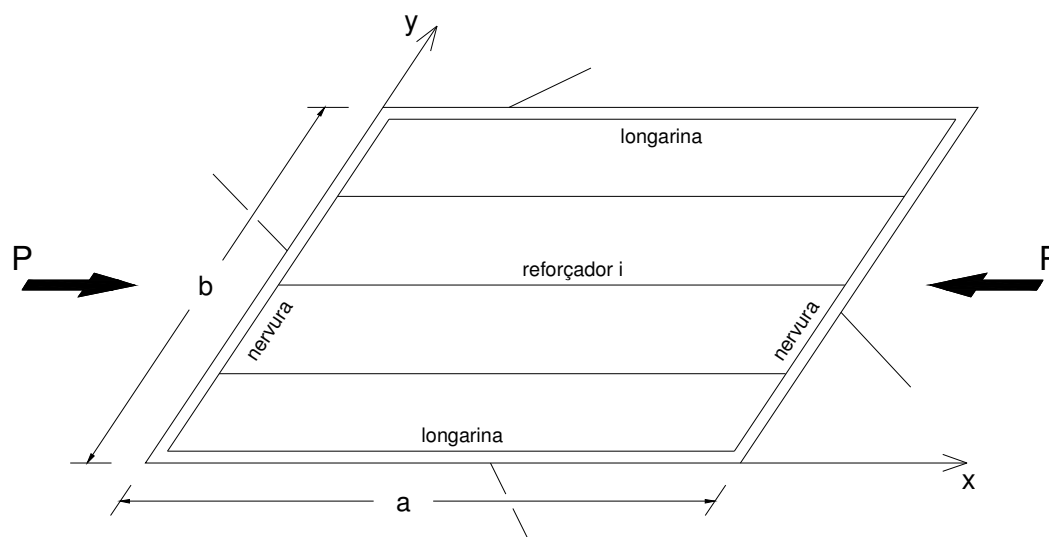


Figura 1: Painel integral simplesmente apoiado

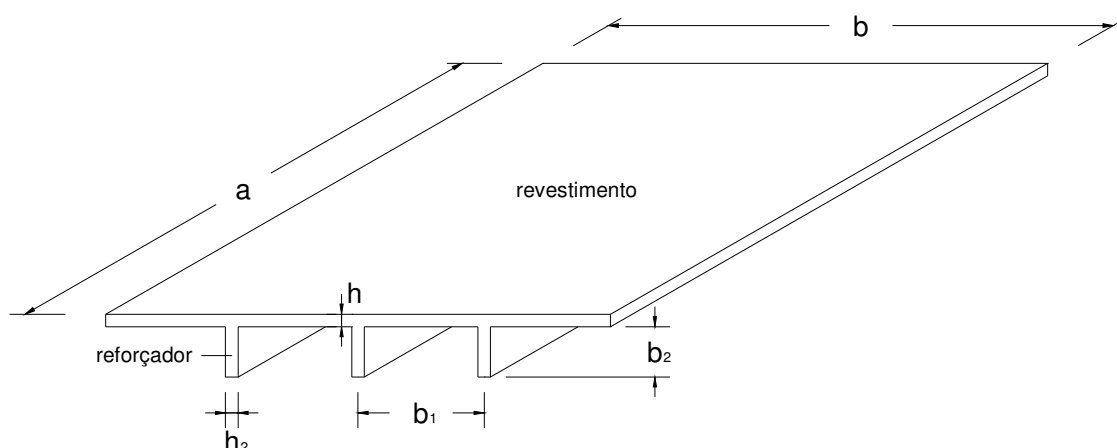


Figura 2: Alguns parâmetros geométricos do painel

Para a análise da flambagem global, a placa reforçada é substituída por uma placa ortotrópica equivalente. Os reforçadores deixam de ser tratados individualmente, para “diluir” sua rigidez no revestimento. Na verdade, o que se “dilui” no revestimento é o trabalho virtual interno referente aos reforçadores.

Com base na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, o campo de deslocamento de um reforçador é

$$u_x = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad u_z = w \quad (1)$$

onde u e w são as componentes do deslocamento de seu eixo de referência que está na superfície média do revestimento, e z é a distância medida a partir desse eixo. A deformação é dada por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2. \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2),

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3)$$

O trabalho virtual realizado pelas forças internas num reforçador é

$$- \int_0^a \int_A \sigma_x \delta \varepsilon_x dA dx - \int_0^a M_t \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} dx \quad (4)$$

onde A é a área da seção transversal do reforçador. A primeira parcela de (4) provém da deformação devido à flexão do reforçador no plano xz e a segunda parcela devido à torção. Sabendo-se que $\theta = \partial w / \partial y$, a contribuição dos n_r reforçadores é dada por

$$\begin{aligned}
& -n_r \int_0^a \int_A \sigma_x \delta \varepsilon_x dA dx - n_r \int_0^a M_t \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} dx \\
& = -n_r \int_0^a \int_A \sigma_x \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dA dx - n_r \int_0^a M_t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) dx \\
& = -n_r \int_0^a \left[N_r \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - M_r \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_t \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dx
\end{aligned} \quad (5)$$

onde

$$N_r = \int_A \sigma_x dA \quad M_r = \int_A \sigma_x z dA \quad (6)$$

são, respectivamente, a força normal e o momento fletor no reforçador. Vamos “diluir” no revestimento o trabalho virtual interno referente aos reforçadores, substituindo (5) por

$$-\frac{n_r + 1}{b} \int_0^a \int_0^b \left[N_r \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - M_r \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_t \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dx dy. \quad (7)$$

Adota-se $n_r + 1$ no lugar de n_r na expressão acima por se imaginar que, no caso mais geral, os reforçadores são elementos internos à placa e o trabalho virtual de cada um deles deveria ser diluído numa faixa da placa de largura igual ao espaçamento $b/(n_r + 1)$ entre reforçadores.

A contribuição dada pelo revestimento ao trabalho virtual interno é (Reddy, 1999)

$$\begin{aligned}
& - \int_0^a \int_0^b \left[N_x \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + N_y \left(\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. - M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dx dy.
\end{aligned} \quad (8)$$

As forças de membrana N_x, N_y (normais) e N_{xy} (de cisalhamento), os momentos M_x, M_y (fletores) e M_{xy} (torçor) são por unidade de comprimento da superfície média do revestimento.

Adicionando as contribuições dos reforçadores (7) e do revestimento (8), tem-se para o trabalho virtual interno

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & - \int_0^a \int_0^b \left[\bar{N}_x \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + N_y \left(\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right. \\
& \quad \left. - \bar{M}_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2\bar{M}_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dx dy
\end{aligned} \quad (9)$$

onde

$$\bar{N}_x = N_x + \frac{N_r}{b/(n_r + 1)} \quad \bar{M}_x = M_x + \frac{M_r}{b/(n_r + 1)} \quad \bar{M}_{xy} = M_{xy} - \frac{1}{2} \frac{M_t}{b/(n_r + 1)}. \quad (10)$$

Na tentativa de se manter a placa plana antes de flambar, apliquemos a carga P ao longo de

uma linha distante $z = e$ da superfície média do revestimento. O trabalho virtual realizado é

$$\delta W_e = \int_0^b \frac{P}{b} (\delta u(0) - \delta u(a)) dy + \int_0^b \frac{Pe}{b} \left(-\frac{\partial \delta w(0)}{\partial x} + \frac{\partial \delta w(a)}{\partial x} \right) dy. \quad (11)$$

Integrando por parte a condição de equilíbrio $\delta W_e + \delta W_i = 0$, a fim de remover as derivadas de δu , δv e δw que ocorrem no domínio,

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \delta v \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N(w) \right) \delta w \right] dx dy \\ & - \int_0^a \left[N_{xy} \delta u + N_y \delta v + \left(\frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \right. \\ & \quad \left. - M_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} - \bar{M}_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_{y=0}^{y=b} dx \\ & - \int_0^b \left[\left(\bar{N}_x + \frac{P}{b} \right) \delta u + N_{xy} \delta v + \left(\frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} + \bar{N}_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w \right. \\ & \quad \left. - \left(\bar{M}_x + \frac{Pe}{b} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \bar{M}_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right]_{x=0}^{x=a} dy = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

onde

$$N(w) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Se a placa tem todas as bordas simplesmente apoiadas,

$$\begin{aligned} w = \bar{M}_x + \frac{Pe}{b} = 0 \quad \text{em} \quad x = 0, a \\ w = M_y = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, b. \end{aligned} \quad (14)$$

Portanto, todos os termos de contorno em (12) que envolvem δw e suas derivadas são nulos. A arbitrariedade e independência de $\delta u, \delta v, \delta w$ no domínio e $\delta u, \delta v$ no contorno da expressão resultante permite que se escreva, com base no lema fundamental do cálculo variacional,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N(w) &= 0\end{aligned}\quad (15)$$

no domínio, e

$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= -\frac{P}{b} \quad N_{xy} = 0 \quad \text{em} \quad x = 0, a \\ N_y &= 0 \quad N_{xy} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, b.\end{aligned}\quad (16)$$

As expressões (15) são as equações de equilíbrio para pontos no interior da placa.

Vamos supor que os reforçadores e o revestimento sejam de um material com módulo de Young E e coeficiente de Poisson ν . As equações constitutivas de um reforçador são dadas por

$$\begin{aligned}N_r &= \int_A \sigma_x dA = \int_A E \varepsilon_x dA = \int_A E \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dA = EA \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - EA \bar{z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_r &= \int_A \sigma_x z dA = \int_A E \varepsilon_x z dA = \int_A E \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] z dA = EA \bar{z} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (17)$$

$$M_t = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} = GJ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

onde $A \bar{z} = \int_A z dA$; \bar{z} é a distância do centróide de um reforçador à superfície média do revestimento; $I = \int_A z^2 dA$ é o momento de inércia de um reforçador em relação à superfície média. O módulo de cisalhamento $G = E/2(1+\nu)$ e

$$J \cong \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{192h_2}{\pi^5 b_2} \left[\operatorname{tgh} \left(\frac{\pi b_2}{2h_2} \right) + \frac{1}{243} \operatorname{tgh} \left(\frac{3\pi b_2}{2h_2} \right) \right] \right\} h_2^3 b_2 \quad (18)$$

se $b_2 > h_2$ (Timoshenko e Goodier, 1970).

Considerando as equações constitutivas de uma placa isotrópica (Reddy, 1999) e as definições (10), podemos escrever para a placa equivalente

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_x \\ \bar{N}_y \\ \bar{N}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{EA}{b/(n_r+1)} & A_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} & A_{12} &= \nu A_{22} & A_{66} &= \frac{1-\nu}{2} A_{22} \\ \bar{B}_{11} &= \frac{EA\bar{\alpha}}{b/(n_r+1)} & & & & & & \\ \bar{D}_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E\bar{I}}{b/(n_r+1)} & D_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & D_{12} &= \nu D_{22} & \bar{D}_{66} &= \frac{1-\nu}{2} D_{22} + \frac{1}{4} \frac{GJ}{b/(n_r+1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

É oportuno a introdução de alguns conceitos da teoria da estabilidade (**Thompson e Hunt, 1973; Brush e Almroth, 1975**). Considere uma estrutura sujeita a um carregamento que cresce a partir de zero. A curva carga-deslocamento é denominada *trajetória de equilíbrio*. Dependendo da geometria, material, carregamento, etc., a estrutura poderá apresentar mais de uma trajetória. Para cada uma delas, a estrutura se deforma segundo uma certa *configuração de equilíbrio*. O fenômeno da perda de estabilidade do equilíbrio, que poderá ocorrer em algum ponto de uma trajetória, é conhecido por *flambagem*. O ponto onde duas ou mais trajetórias se cruzam é um *ponto de bifurcação*. Neste *ponto crítico* a estrutura obrigatoriamente flamba, podendo também flambar num outro denominado *ponto limite*. A **Figura 3** esboça a curva carga-deslocamento de uma estrutura que apresenta duas trajetórias de equilíbrio. O equilíbrio é estável onde as linhas são cheias e instável onde são tracejadas.

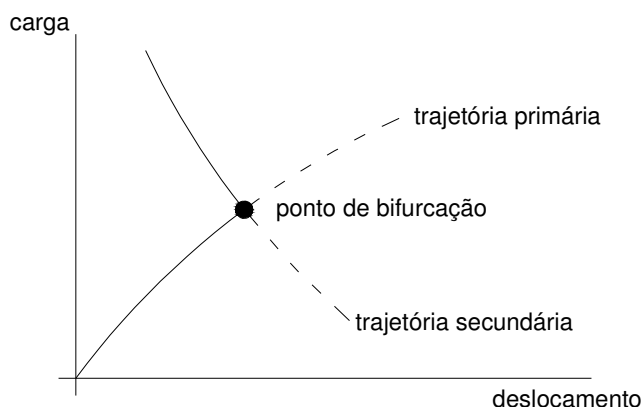


Figura 3: Trajetórias de equilíbrio

Para investigar a possível existência de um ponto de bifurcação, vamos identificar as configurações de equilíbrio correspondentes a duas das trajetórias que lá se cruzam pelos campos de deslocamento u_0, v_0, w_0 e u, v, w . O campo com o índice 0 representará a configuração da trajetória primária, que passa pelo origem. Para determinar o ponto de bifurcação por meio de um problema linear, limitemos a trajetória secundária em torno desse ponto escrevendo

$$u = u_0 + u_1 \quad v = v_0 + v_1 \quad w = w_0 + w_1 \quad (21)$$

Os pequenos deslocamentos adicionais u_1, v_1, w_1 provocam o desvio brusco da trajetória primária para a secundária. Nesta segunda trajetória

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= \bar{N}_{x0} + \Delta\bar{N}_x & N_y &= N_{y0} + \Delta N_y & N_{xy} &= N_{xy0} + \Delta N_{xy} \\ \bar{M}_x &= \bar{M}_{x0} + \Delta\bar{M}_x & M_y &= M_{y0} + \Delta M_y & \bar{M}_{xy} &= \bar{M}_{xy0} + \Delta\bar{M}_{xy} \end{aligned} \quad (22)$$

onde $\Delta\bar{N}_x, \Delta N_y, \dots$ decorrem de u_1, v_1, w_1 .

Vamos supor que na trajetória primária a placa mantém-se plana ($w_0 = 0$). Substituindo (21) em (19), lembrando que $w_0 = 0$, identificamos

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x0} &= \bar{A}_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \Delta\bar{N}_x &= \bar{A}_{11} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right] + A_{12} \left[\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] - \bar{B}_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ \bar{N}_{x1} &= \bar{A}_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \bar{B}_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Como u_1, v_1, w_1 são pequenas quantidades, podemos substituir $\Delta\bar{N}_x$ pela sua parcela \bar{N}_{x1} linear em u_1, v_1, w_1 . Procedendo de maneira análoga para os demais esforços, tem-se de (15)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{N}_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy0}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial N_{xy0}}{\partial x} + \frac{\partial N_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{y1}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \bar{M}_{x0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{M}_{x1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{y1}}{\partial y^2} + N(w_1) &= 0
\end{aligned} \tag{24}$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{N}_{x0} &= \bar{A}_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} & \bar{N}_{x1} &= \bar{A}_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \bar{B}_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\
N_{y0} &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} & N_{y1} &= A_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_1}{\partial y} \\
N_{xy0} &= A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) & N_{xy1} &= A_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\
\bar{M}_{x0} &= \bar{B}_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} & \bar{M}_{x1} &= \bar{B}_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \bar{D}_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \\
M_{y0} &= 0 & M_{y1} &= -D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \\
\bar{M}_{xy0} &= 0 & \bar{M}_{xy1} &= -2\bar{D}_{66} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{25}$$

e

$$N(w_1) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_{x0} \frac{\partial w_1}{\partial x} + N_{xy0} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy0} \frac{\partial w_1}{\partial x} + N_{y0} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right). \tag{26}$$

As equações de equilíbrio (24) na trajetória primária são obtidas removendo os termos com índice 1. Considerando (25), tem-se

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} &= 0 \\
(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} &= 0
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\bar{B}_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} = 0.$$

A solução das duas primeiras equações (27), sob as condições de contorno (16), já é clássica (Timoshenko e Gere, 1961). Dessa solução

$$\bar{N}_{x0} = -\frac{P}{b} \quad N_{y0} = N_{xy0} = 0. \quad (28)$$

Substituindo (28) em (25),

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{A_{22}}{\bar{A}_{11}A_{22} - A_{12}^2} \frac{P}{b} \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (29)$$

A terceira equação (27) é identicamente satisfeita pois $\partial u_0 / \partial x$ independe de x e y .

Como

$$\bar{M}_{x0} = \bar{B}_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{A_{22}\bar{B}_{11}}{\bar{A}_{11}A_{22} - A_{12}^2} \frac{P}{b}, \quad (30)$$

vemos que o momento constante \bar{M}_{x0} é conseguido aplicando a carga P/b com excentricidade

$$e = \frac{A_{22}\bar{B}_{11}}{\bar{A}_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \frac{(n_r + 1)A\bar{z}}{bh + (n_r + 1)A} \quad (31)$$

que coincide com o centro geométrico da seção transversal da placa. Segundo a Figura 2 e o sistema de coordenadas xyz adotado, e é negativo porque \bar{z} é também negativo. A rigor, se a carga não for assim aplicada a componente w_0 não será nula na trajetória primária. A força cortante é nula pois

$$Q_{x0} = \frac{\partial \bar{M}_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy0}}{\partial y} \quad Q_{y0} = \frac{\partial \bar{M}_{xy0}}{\partial x} + \frac{\partial M_{y0}}{\partial y}. \quad (32)$$

Como os termos com índice 0 se anulam em (24), na trajetória secundária as equações de equilíbrio (24) contêm apenas os termos com índice 1 no ponto de bifurcação. Considerando (25), (26) e (28), tem-se

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} - \bar{B}_{11} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} &= 0 \\ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} &= 0 \\ \bar{B}_{11} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \bar{D}_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2\bar{D}_{66}) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} - \frac{P}{b} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Em vista das condições de contorno (14), (16) e da solução da trajetória primária, a solução de (33) deverá satisfazer

$$\begin{aligned}
 w_1 = \bar{N}_{x1} = N_{xy1} = \bar{M}_{x1} = 0 & \quad \text{em} \quad x = 0, a \\
 w_1 = N_{y1} = N_{xy1} = M_{y1} = 0 & \quad \text{em} \quad y = 0, b.
 \end{aligned} \tag{34}$$

As condições (34) são satisfeitas pelas expansões

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \\
 v_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
 w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned} \tag{35}$$

onde U_{mn} , V_{mn} e W_{mn} são coeficientes a serem determinados de forma que as equações (33) sejam satisfeitas. Observe que N_{xy1} se anula nas bordas apenas no sentido médio $\int_0^a N_{xy1} dx = \int_0^b N_{xy1} dy = 0$. Definindo $\alpha_m = m\pi/a$ e $\beta_n = n\pi/b$, tem-se da substituição de (35) em (33)

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [& -(\bar{A}_{11}\alpha_m^2 + A_{66}\beta_n^2)U_{mn} - (A_{12} + A_{66})\alpha_m\beta_n V_{mn} + \bar{B}_{11}\alpha_m^3 W_{mn}] \cos \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y = 0 \\
 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [& - (A_{12} + A_{66})\alpha_m\beta_n U_{mn} - A_{66}\alpha_m^2 V_{mn} - A_{22}\beta_n^2 V_{mn}] \operatorname{sen} \alpha_m x \cos \beta_n y = 0 \\
 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ & \bar{B}_{11}\alpha_m^3 U_{mn} - \left[\bar{D}_{11}\alpha_m^4 + 2(D_{12} + 2\bar{D}_{66})\alpha_m^2\beta_n^2 + D_{22}\beta_n^4 - \frac{P}{b}\alpha_m^2 \right] W_{mn} \right\} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y = 0.
 \end{aligned} \tag{36}$$

)

As equações se verificam em todos os pontos do domínio $0 < x < a$ e $0 < y < b$, para cada valor de m e n , se

$$\begin{aligned}
 (\bar{A}_{11}\alpha_m^2 + A_{66}\beta_n^2)U_{mn} + (A_{12} + A_{66})\alpha_m\beta_n V_{mn} - \bar{B}_{11}\alpha_m^3 W_{mn} &= 0 \\
 (A_{12} + A_{66})\alpha_m\beta_n U_{mn} + (A_{66}\alpha_m^2 + A_{22}\beta_n^2)V_{mn} &= 0 \\
 -\bar{B}_{11}\alpha_m^3 U_{mn} + \left[\bar{D}_{11}\alpha_m^4 + 2(D_{12} + 2\bar{D}_{66})\alpha_m^2\beta_n^2 + D_{22}\beta_n^4 - \frac{P}{b}\alpha_m^2 \right] W_{mn} &= 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

ou

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{33} - \frac{P}{b}\alpha_m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (38)$$

onde

$$\begin{aligned} C_{11} &= \bar{A}_{11}\alpha_m^2 + A_{66}\beta_n^2 & C_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_m\beta_n \\ C_{13} &= -\bar{B}_{11}\alpha_m^3 & C_{22} &= A_{66}\alpha_m^2 + A_{22}\beta_n^2 \\ C_{33} &= \bar{D}_{11}\alpha_m^4 + 2(D_{12} + 2\bar{D}_{66})\alpha_m^2\beta_n^2 + D_{22}\beta_n^4. \end{aligned} \quad (39)$$

A eliminação de U_{mn} e V_{mn} das equações (38) resulta

$$\left(C_{33} - \frac{C_{13}^2 C_{22}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} - \frac{P}{b} \alpha_m^2 \right) W_{mn} = 0. \quad (40)$$

Para a solução não trivial $W_{mn} \neq 0$, devemos impor

$$\frac{P}{b} = \frac{1}{\alpha_m^2} \left(C_{33} - \frac{C_{13}^2 C_{22}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} \right). \quad (41)$$

A carga crítica de flambagem corresponde ao par m, n que fornece o menor valor de P acima.

3 MODELO NUMÉRICO

Os modelos numéricos foram preparados com base no método dos elementos finitos e foram processados, integralmente, no software comercial Nastran for Windows 2003 (Nastran, 2003).

3.1 Modelos analisados

Todos os modelos têm como base o painel integral reforçado longitudinalmente da Figura 2, simplesmente apoiado e submetido a uma carga axial de compressão. O painel é um quadrado de 500 mm x 500 mm, testado com diferentes números de reforçadores dispostos de forma igualmente espaçada. Os seguintes parâmetros são utilizados:

$$a = b = 500 \text{ mm} \quad h = 5 \text{ mm}$$

$$b_2 = 22 \text{ mm} \quad h_2 = 6 \text{ mm}$$

$$E = 7308 \text{ daN/mm}^2 \quad \nu = 0,33$$

O parâmetro b_1 (espaçamento entre reforçadores) varia em função do número de reforçadores. As principais características dos diversos modelos testados são explicadas a seguir.

Revestimento modelado com o QUAD4 e reforçadores com o BAR

A montagem dos modelos numéricos consiste nas seguintes fases, listados em ordem de acontecimento: definição dos materiais, escolha dos tipos de elementos finitos, montagem da geometria, preparação da malha, definição das condições de contorno e aplicação do carregamento.

Os componentes estruturais são o revestimento e os reforçadores. O material utilizado é o mesmo em ambos, conforme propriedades já descritas anteriormente.

A escolha dos tipos de elementos finitos a serem utilizados na preparação dos modelos depende, principalmente, das características da geometria e das considerações a serem feitas na representação do painel. Desta maneira, observando as características do painel, serão utilizados dois tipos de elementos: o elemento quadrilateral de placa, denominado QUAD4, para discretizar o revestimento e o elemento unidimensional de barra, denominado BAR, para discretizar os reforçadores. Devem ser adotados os devidos cuidados relativos ao acoplamento dos graus de liberdade na interseção dos dois tipos de elementos, uma vez que o revestimento e os reforçadores são integrados.

É importante salientar que por não aplicar nenhum offset aos reforçadores, o modelo é mais apropriado para a placa com reforçadores simetricamente dispostos em relação ao revestimento, como indicado na [Figura 4](#).

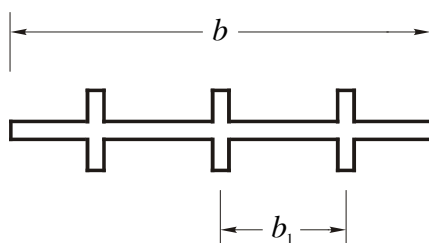


Figura 4: Disposição dos reforçadores, caso a placa fosse simetricamente reforçada

Na definição das condições de contorno, considera-se que a placa seja simplesmente apoiada nas duas longarinas e em duas nervuras adjacentes, como indicado na [Figura 5](#).

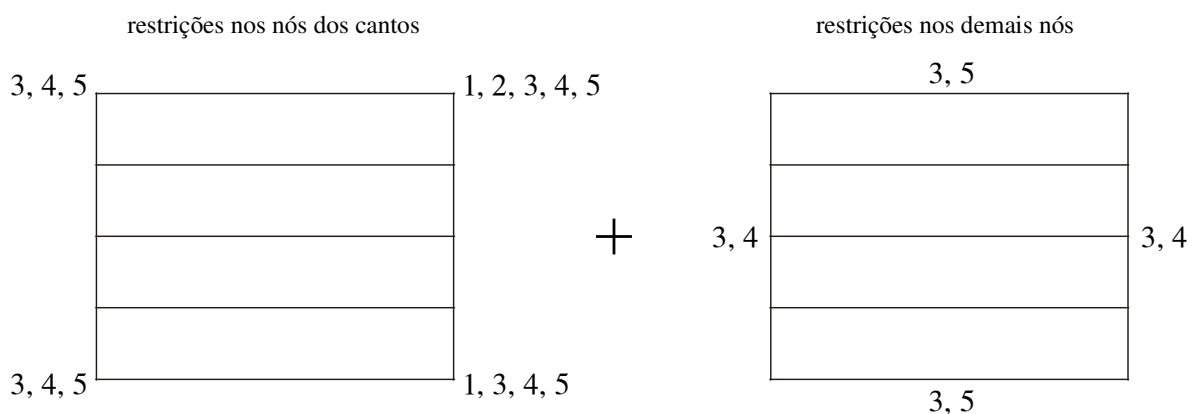


Figura 5: Condições de contorno impostas ao modelo

Finalmente, é aplicada uma carga axial de compressão de 1 000 daN nas bordas perpendiculares aos reforçadores. O modelo pode ser visualizado na [Figura 6](#).

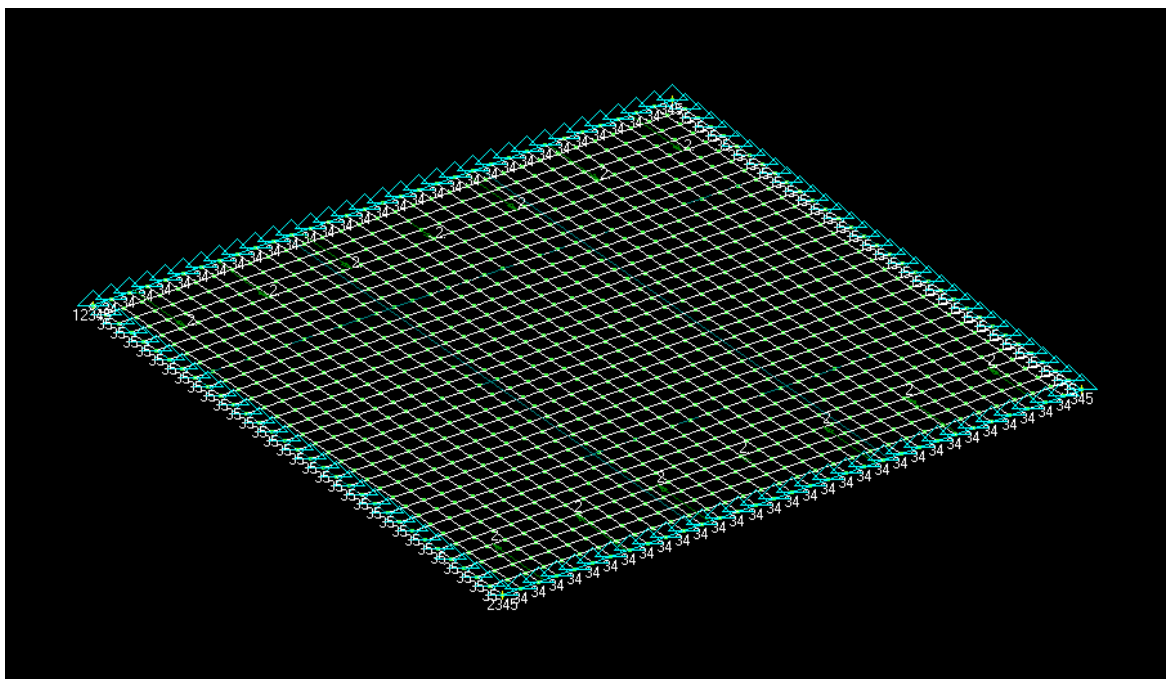


Figura 6: Modelo com o revestimento discretizado pelo QUAD4 e reforçadores pelo BAR

Revestimento e reforçadores modelados com o QUAD4

A montagem deste modelo tem a mesma sequência do modelo anterior, porém apresentam algumas diferenças importantes que serão explicadas a seguir.

Na escolha dos tipos de elementos finitos, optou-se por utilizar somente o elemento QUAD4, inclusive na discretização dos reforçadores. O objetivo é ter um modelo melhorado em relação ao anterior.

Na análise linear de flambagem deve-se impor a restrição de a placa permanecer plana antes de flambar, caso contrário a carga crítica a ser determinada poderá ser completamente ilusória. A maneira encontrada para satisfazer esta condição foi alterar a forma de aplicação da carga.

Foram selecionados os nós de uma das bordas ($x=0$) da placa, perpendicular aos reforçadores, e aplicado um deslocamento unitário uniforme. Fez-se, em seguida, uma análise linear estática para se obter as reações ao deslocamento. Essas reações nodais são utilizadas como a carga axial de compressão na análise linear de flambagem, tendo-se assim a garantia de que o painel se manterá plano antes de flambar. A carga crítica P de flambagem é encontrada multiplicando-se a soma das reações nodais aplicadas pelo autovalor correspondente à flambagem global da placa.

As condições de contorno na análise linear de flambagem são as mesmas indicadas na **Figura 5**. Na análise estática, a única mudança é a inclusão da restrição à translação na direção x dos nós das duas bordas perpendiculares aos reforçadores, inclusive dos nós dos próprios reforçadores. O modelo é apresentado na **Figura 7**.

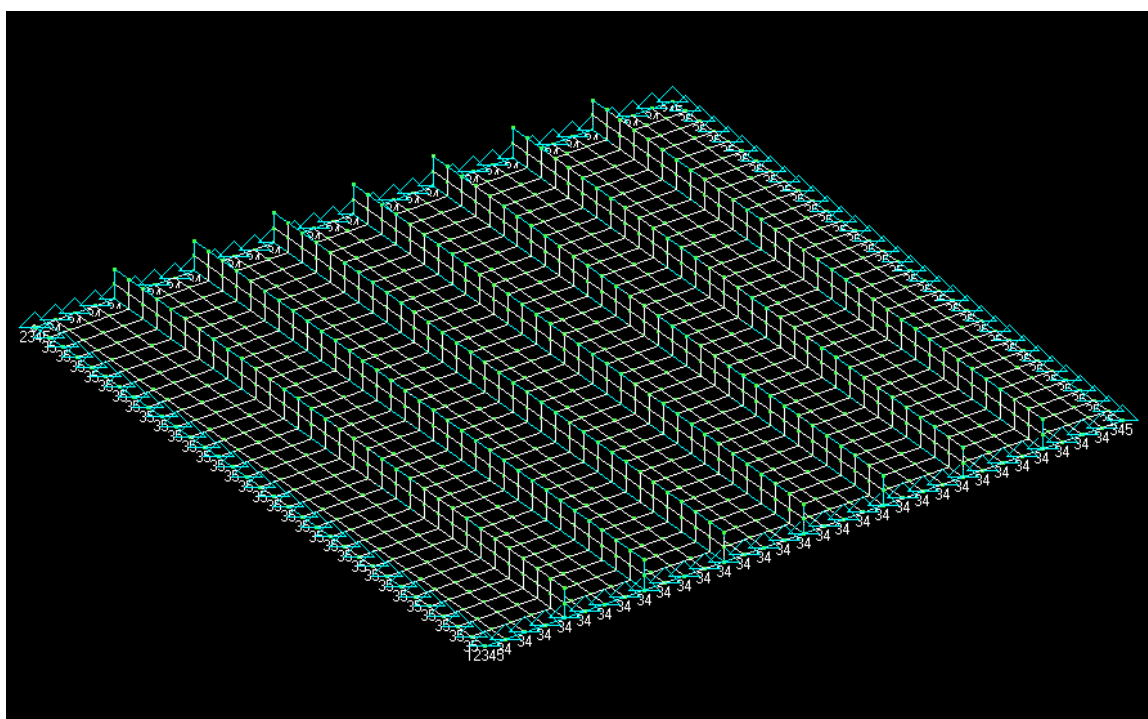


Figura 7: Modelo com o revestimento e reforçadores discretizados pelo QUAD4

Modelos descartados

A partir do modelo com o revestimento discretizado com o QUAD4 e os reforçadores com o BAR, seria coerente analisar um modelo com reforçadores discretizados pelo BAR, mas aplicando offset de modo a transladar os elementos BAR para o centróide dos reforçadores. Seria um modelo aparentemente mais realístico.

Porém, devido à excentricidade dos reforçadores, não se conseguiu identificar um padrão de carregamento que mantivesse a placa plana antes de flambar. A **Figura 8** mostra um modelo com offset fletido, antes mesmo da análise linear de flambagem, após aplicar uma carga uniformemente distribuída nas bordas do revestimento perpendiculares aos reforçadores. É um comportamento que mostra que o modelo com o carregamento diretamente aplicado é incompatível para a análise.

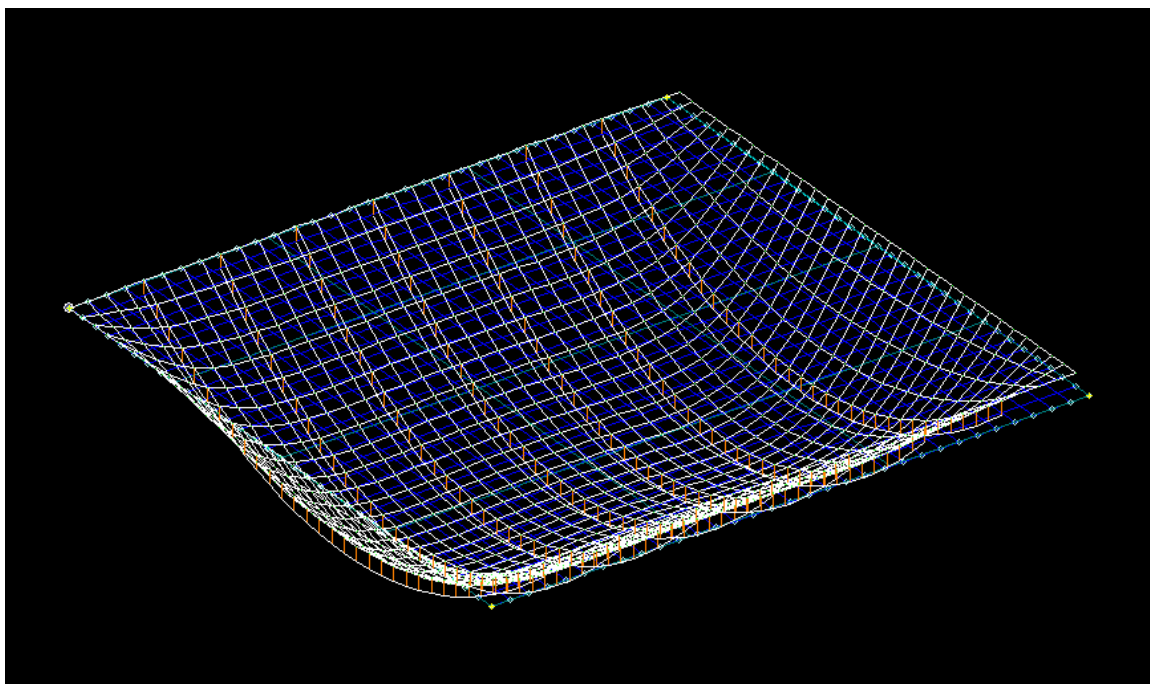


Figura 8: Modelo apresentando flexão antes de flambar

O mesmo modelo foi também analisado aplicando-se inicialmente um deslocamento unitário uniforme e, após realizada a análise estática, as reações ao deslocamento nas bordas perpendiculares aos reforçadores foram utilizadas como padrão de distribuição da carga para a análise linear de flambagem. Com este procedimento, já descrito anteriormente, a placa também flete, nos moldes da [Figura 8](#), antes da análise linear de flambagem. Uma outra tentativa que fracassou por motivo análogo consistiu na aplicação direta da carga e de um momento distribuídos, com o intuito de considerar a excentricidade entre o ponto de aplicação da carga axial e o centro de gravidade da seção transversal do modelo.

3.2 Análise da malha

A definição da malha de elementos finitos é parte essencial da análise, na qual a geometria é modelada com os elementos finitos previamente escolhidos. Além disso, devido à necessidade de precisão nos resultados, é necessário obter uma razão eficiente entre qualidade dos resultados e economia computacional, principalmente no que se refere a tempo de processamento.

Neste trabalho, foram construídos modelos com diferentes graus de refinamento da malha, sempre coincidindo os nós da malha de elementos QUAD4 usada no revestimento com os nós longitudinais da malha de elementos BAR ou QUAD4 usada nos reforçadores. Os autovalores encontrados na análise linear de flambagem foram avaliados e decidiu-se, então, discretizar o revestimento com uma malha de 32 x 32 elementos. Os reforçadores foram também discretizados com 32 elementos na direção longitudinal e com 2 elementos na direção transversal, quando utilizado o QUAD4. Adotando essa malha, os resultados encontrados podem ser considerados convergidos.

3.3 Mudança de teoria

O Nastran utiliza como padrão para a solução numérica de placas a teoria de Reissner-Mindlin, enquanto que para as vigas é utilizada a teoria de Timoshenko.

Com o intuito de adequar o modelo numérico à solução analítica e buscando uma maior consistência nos resultados, alterou-se o padrão do Nastran para considerar a teoria de placas de Kirchhoff e a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. No caso da placa, esta mudança de teoria é realizada ignorando-se o cisalhamento transversal. Já para os reforçadores, a mudança de teoria é feita considerando a área de cisalhamento da seção transversal tendendo a infinito.

4 RESULTADOS

A [Tabela 1](#) contém os resultados obtidos para quatro placas com diferentes números de reforçadores. As placas são todas de alumínio AL7050 T7451 (Especificação AMS-4050):

$$E = 7308 \text{ daN/mm}^2 \quad \nu = 0,33. \quad (42)$$

A tabela especifica quando a teoria de Reissner-Mindlin ou Kirchhoff é utilizada com o elemento QUAD4, ou quando a teoria de Timoshenko ou Euler-Bernoulli é utilizada com o elemento BAR. A coluna “modelo analítico” contém os resultados obtidos pela expressão proposta (41) considerando que a placa seja simetricamente reforçada ([Figura 4](#)) ou assimetricamente reforçada ([Figura 2](#)).

Se a placa é simetricamente reforçada ($\bar{z} = 0$), a expressão (41) reduz-se a

$$\frac{P}{b} = \frac{C_{33}}{\alpha_m^2}. \quad (43)$$

Na avaliação de C_{33} acima lembrar que o momento de inércia $\bar{I} = h_2 b_2^2 / 12$ refere-se ao centróide do reforçador.

Se a placa é assimetricamente reforçada, tem-se que

$$\bar{z} = -\left(\frac{b_2}{2} + \frac{h}{2}\right) \quad \bar{I} = \frac{h_2 b_2^3}{12} + b_2 h_2 \bar{z}^2. \quad (44)$$

Para uma placa com um dado número de reforçadores, buscou-se com o modelo analítico o par m, n (número de meias ondas nas direções de x e y , respectivamente) que correspondesse à menor carga. Em todos os resultados listados na [Tabela 1](#) $m = n = 1$. O modelo de elementos finitos confirma esses resultados.

Devemos chamar a atenção que na preparação do modelo de elementos finitos, no qual toda a placa foi discretizada com o QUAD4, a altura b_2 do reforçador ficou efetivamente igual a 19,5 mm. É essa dimensão que é considerada no modelo analítico da placa assimetricamente reforçada.

O modo de flambagem global obtido para a placa com 7 reforçadores, onde o revestimento é discretizado pelo QUAD4 usando a teoria de Reissner-Mindlin e os reforçadores pelo BAR usando a teoria de Timoshenko, é apresentado na [Figura 9](#). A carga de flambagem correspondente a esse modo é $P/1000 = 19,50$. Se a teoria que descreve o QUAD4 ou BAR for alterada, modos de flambagem semelhantes resultam independentemente do número de reforçadores.

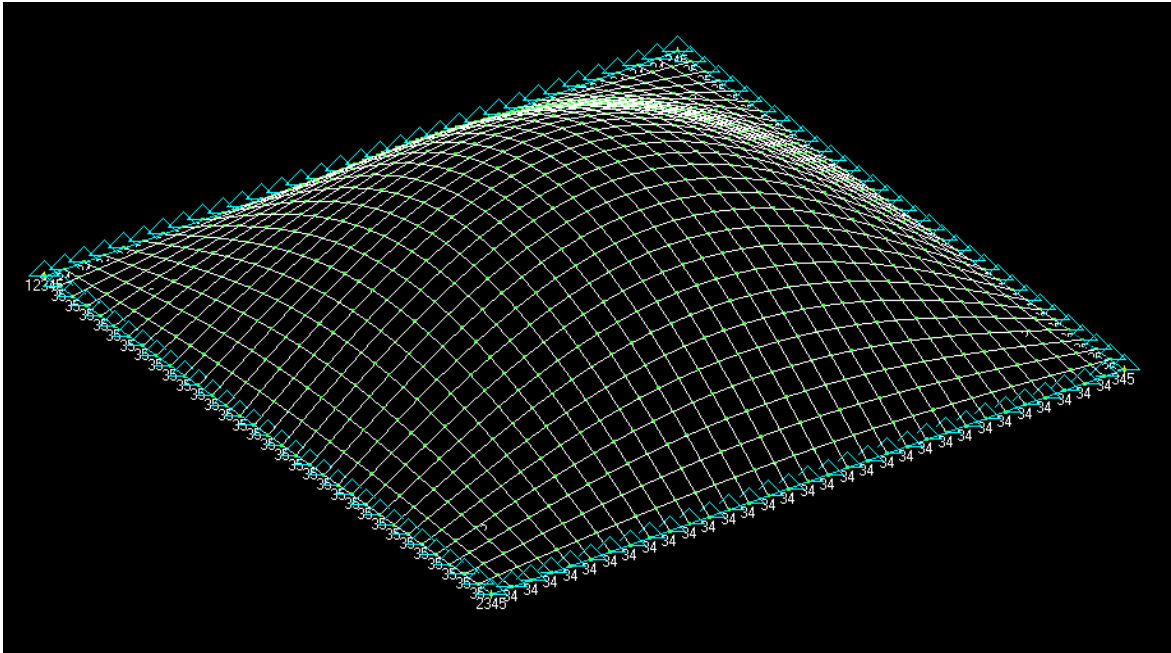


Figura 9: Modo de flambagem global da placa com 7 reforçadores, onde o revestimento é discretizado pelo QUAD4 (teoria de Reissner Mindlin) e os reforçadores pelo BAR (teoria de Timoshenko) ($P/1000 = 19,50$)

Se toda a placa for discretizada pelo QUAD4 usando a teoria de Kirchhoff, obtêm-se o modo de flambagem global indicado na Figura 10 para a placa com 7 reforçadores. A carga de flambagem correspondente a esse modo é $P/1000 = 43,62$. Se a teoria de Reissner-Mindlin for utilizada, os modos de flambagem continuam semelhantes independentemente do número de reforçadores.

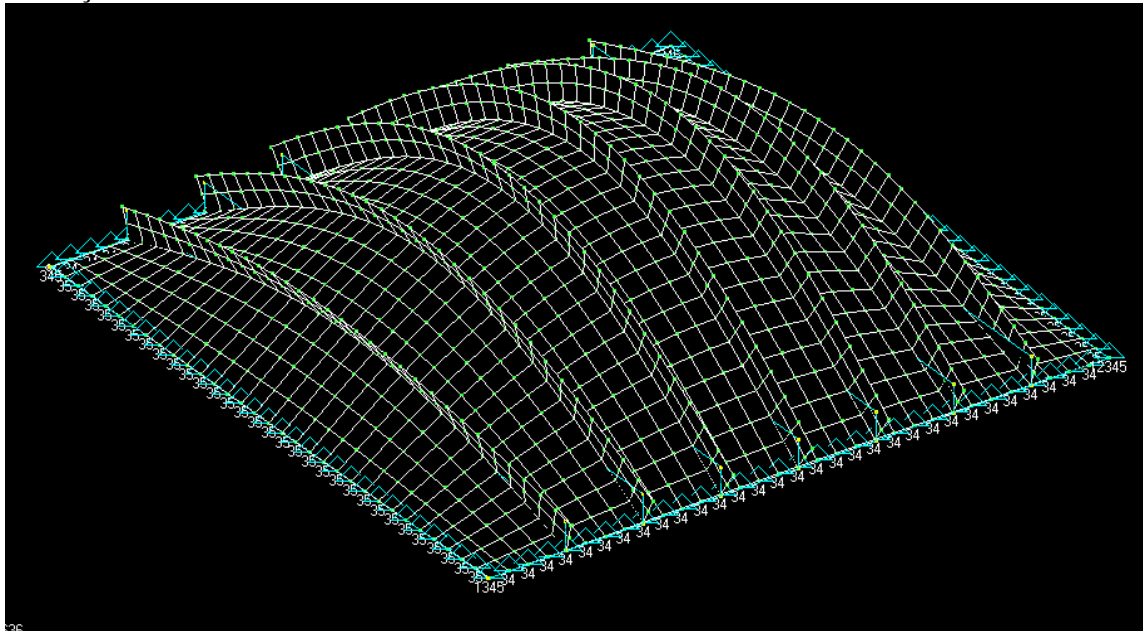


Figura 10: Modo de flambagem global da placa com 7 reforçadores, discretizada pelo QUAD4 usando a teoria de Kirchhoff ($P/1000 = 43,62$)

Tabela 1. Valores críticos de $P/1000$

n.º de reforçadores	QUAD4 + BAR (simétrica)		QUAD4 (assimétrica)		modelo analítico	
	R-M* + T [†]	K** + E-B ^{††}	R-M*	K**	simétrica	assimétrica
3	12,85	12,89 [†] (12,59 ^{††})	30,34 (29,59)	30,40 (29,65)	13,46 (4,4%) ♦	28,89 (-2,6%) ♦♦
7	19,50	19,56 (19,14)	45,37 (43,50)	45,49 (43,62)	20,17 (3,1%)	46,70 (7,1%)
15	32,87	32,99 (32,35)	74,37 (70,64)	74,66 (70,93)	33,60 (1,8%)	74,51 (5,0%)
31	59,54	59,78 (58,94)	118,92 (112,23)	119,58 (112,87)	60,45 (1,1%)	114,48 (1,4%)

QUAD4 com a teoria de placas de Reissner-Mindlin
 QUAD4 com a teoria de placas de Kirchhoff
 BAR com a teoria de vigas de Timoshenko
 BAR com a teoria de vigas de Euler-Bernoulli
 carregamento aplicado diretamente no revestimento
 carregamento aplicado por meio do deslocamento unitário
 erro em relação à coluna QUAD4 + BAR / K + E-B (valores fora dos parênteses)
 erro em relação à coluna QUAD4 / K (valores dentro dos parênteses)

5 CONCLUSÃO

O erro cometido pelo modelo analítico da placa simetricamente reforçada diminui com o aumento do número de reforçadores. Comportamento semelhante é observado para a placa assimetricamente reforçada, se o número de reforçadores não for tão reduzido. Em ambos os casos, o erro está em torno de 5% ou menos.

Devido à presença do coeficiente de rigidez B_{11} na placa equivalente (modelo analítico para a placa assimetricamente reforçada) supõe-se que a carga seja aplicada com a excentricidade (31), caso contrário não será satisfeita a restrição de a placa se manter plana antes de flambar. O trabalho mostra que a carga pode ser aplicada no modelo de elementos finitos da placa reforçada assimetricamente usando um padrão de cargas nodais oriundo das reações provocadas na borda por um deslocamento unitário induzido.

A expressão analítica (41) proposta é simples e conduz a resultados satisfatórios para pré-dimensionamentos. O seu uso é de custo computacional baixo, o que torna a expressão atrativa a problemas de otimização por facilitar a análise de sensibilidade.

REFERÊNCIAS

- Brush, D.O., and Almroth, B.O., *Buckling of bars, plates, and shells*. McGraw-Hill, 1975.
- Leissa, A.W., Conditions for laminated plates to remain flat under inplane loading. *Composite Structures*, 6:261–270, 1986.
- MSC/NASTRAN, User's Guide, 2003.
- Reddy, J.N., *Theory and analysis of elastic plates*. Taylor and Francis, 1999.
- Szilard, R., *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. John Wiley, 2004.
- Thompson, J.M.T., and Hunt, G.W., *A general theory of elastic stability*. John Wiley, 1973.
- Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, 1961.
- Timoshenko, S.P., and Goodier, J.N., *Theory of elasticity*. McGraw-Hill Kogakusha, 1970.