

REDUCCIÓN DE LA CONCENTRACIÓN DE TENSIONES EN UNA PLACAS FINITA ORTÓTROPA CARGADA EN SU PLANO CON UN ORIFICIO PRINCIPAL

Diana V. Bambill^{a,b}, Antonio Susca^a, Carlos A. Rossit^{a,b}

^a *Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur (UNS), Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina,*

^b *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina*

E-mails: dbambill@criba.edu.ar, asusca@uns.edu.ar, carossit@criba.edu.ar

Keywords: orificio, concentración de tensiones, estado plano, reducción, ortotropía.

Abstract. La concentración de tensiones en la vecindad de un orificio existente en una placa cargada en su plano puede ser reducida mediante la conveniente elección de orificios satélites o secundarios. Los nuevos orificios en cercanías del orificio principal perturbarán nuevamente el campo de tensiones pudiéndose generar situaciones de alivio en la concentración de tensiones o producir el efecto contrario al aumentarlas. En un material ortótropo, la complejidad es aún mayor pues también las direcciones elásticas principales del material inciden con su orientación en el campo de tensiones generado por las cargas y alterado por la presencia de un orificio. En este estudio se busca compatibilizar las características propias del material ortótropo con la posición y el tamaño más adecuados de los orificios satélites, de forma de aliviar la concentración de tensiones generada por la presencia de un orificio principal.

1 INTRODUCCIÓN

El presente estudio presenta el problema de placas infinitas ortótropas con un orificio circular sometidas a cargas en su plano, en una dirección. Los ejes elásticos principales de la ortotropía del material (Lekhnitskii, 1968) se adoptaron en varias posiciones con respecto a la dirección de las cargas. El problema se resolvió utilizando el método de elementos finitos. Con el fin de estudiar el efecto que otros orificios (orificios secundarios o satélites) cercanos al orificio principal producían sobre las concentraciones de tensión, se analizaron una serie de variantes que consistieron en cambiar las relaciones de tamaño entre orificios y variar la posición para distintas orientaciones de los ejes elásticos principales del material ortótropo.

El problema propuesto para el análisis es de utilidad práctica en distintas situaciones de la ingeniería. Por ejemplo, puede ser vista como una necesidad importante la reducción del peso en las estructuras, mediante la remoción de material. Sin embargo esta reducción de peso no debe disminuir significativamente la capacidad de carga del elemento estructural en cuestión. En otras ocasiones los orificios deben practicarse para permitir el paso de otros elementos, como cañerías, cables, o pasajes entre distintas partes de estructuras para permitir el acceso a ellas. En estas situaciones en que los elementos estructurales tienen orificios, es necesario el análisis de los efectos de la concentración de tensiones. Es claro que la proximidad entre los orificios, sus geometrías y las dimensiones relativas de los mismos afectan el campo de tensiones del elemento estructural. Es por ello que los valores del factor de concentración de tensiones calculados para un solo orificio no son directamente aplicables a modelos donde hay cercanos más de un orificio. Para materiales isótropos se ha estudiado la concentración de tensiones generada por múltiples agujeros circulares en placas de dimensiones finitas o infinitas, sometidas a diferentes estados de carga en su plano medio. Varios de estos estudios se encuentran resumidos en libros que son de permanente consulta por los ingenieros de diseño (Pilkey, 1997). Por otro lado, son escasos los estudios sobre el factor de concentración de tensiones en placas de material ortótropo con agujeros (Bambill et al., 2005). En la literatura se encuentran ejemplos del efecto de un solo orificio en materiales ortótropos (Ukadgaonker et al., 2000), pero poca información está disponible para el diseñador acerca del factor de concentración de tensiones en dichos materiales cuando además del orificio principal se practican otros en su cercanía. Entre los trabajos encontrados en la bibliografía merece nombrarse el trabajo de Henshaw et al. (1996) que considera distintas posiciones de tres orificios circulares, próximos entre sí, en una placa de material ortótropo. En este estudio es posible observar que la concentración de tensiones en el borde del orificio principal puede ser disminuida con la práctica de los orificios secundarios, para algunas posiciones y tamaños relativos de los orificios secundarios.

2 PLANTEO DEL PROBLEMA

La propuesta es encontrar configuraciones geométricas adecuadas para reducir la concentración de tensiones en cercanías del orificio principal, variando las relaciones de dimensión entre orificios satélites y orificio principal, la orientación de los mismos con respecto a la dirección de carga y las direcciones elásticas principales.

En la Figura 1 se muestra el modelo original (placa con orificio circular) y en la Figura 2 la alternativa propuesta donde agregado de dos orificios secundarios cercanos al principal.

Se analiza la influencia de la presencia de los orificios secundarios buscando obtener un alivio de las tensiones que aparecen en el modelo original.

El factor de concentración de tensiones se define como

$$K_+ = \frac{\sigma_+}{\sigma_1} \quad (1.a)$$

$$K_- = \frac{\sigma_-}{\sigma_1} \quad (1.b)$$

donde: σ_+ es la tensión de tracción máxima en el modelo con agujero, σ_- es la tensión de compresión máxima en el modelo con agujero y σ_1 es la mayor de las tensiones principales en el modelo sin orificio, en este caso $\sigma_1 = N_x$.

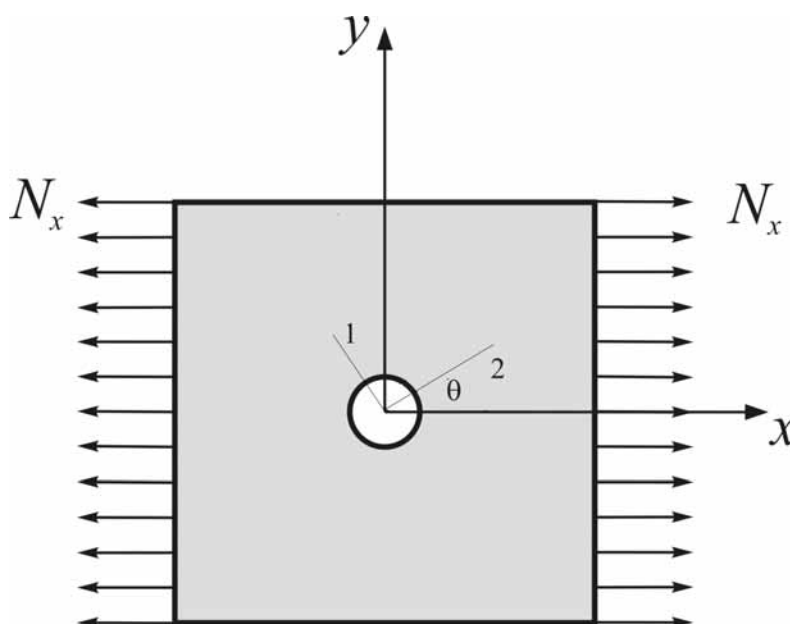


Figura 1. Placa con orificio central.

Las dimensiones de la placa ortótropa con un orificio principal circular de diámetro d pueden ser consideradas infinitas. A los efectos de realizar los cálculos se adoptó $d/l = 0,01$, donde l es la menor dimensión de lado de la placa.

En la Figura 2, puede observarse la configuración a estudiar. $d = d_c$ es el diámetro del orificio principal y d_a es el diámetro de los orificios secundarios. La orientación medida con el ángulo θ indica las direcciones elásticas principales del material ortótropo con respecto al eje coordenado x , que coincide con la dirección de las cargas N_x .

La posición de los orificios secundarios con respecto a la dirección x , se mide con el ángulo ϕ y con h se indica su distancia con respecto al centro del orificio principal. (Fig. 2 y 3).

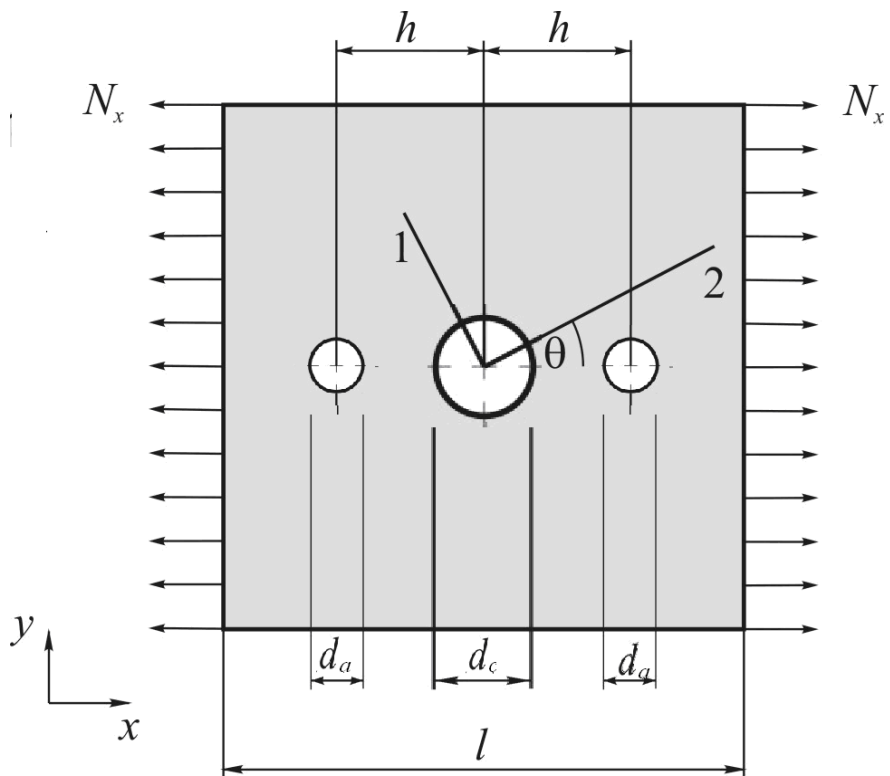


Figura 2. Placa con orificio central y orificios secundarios

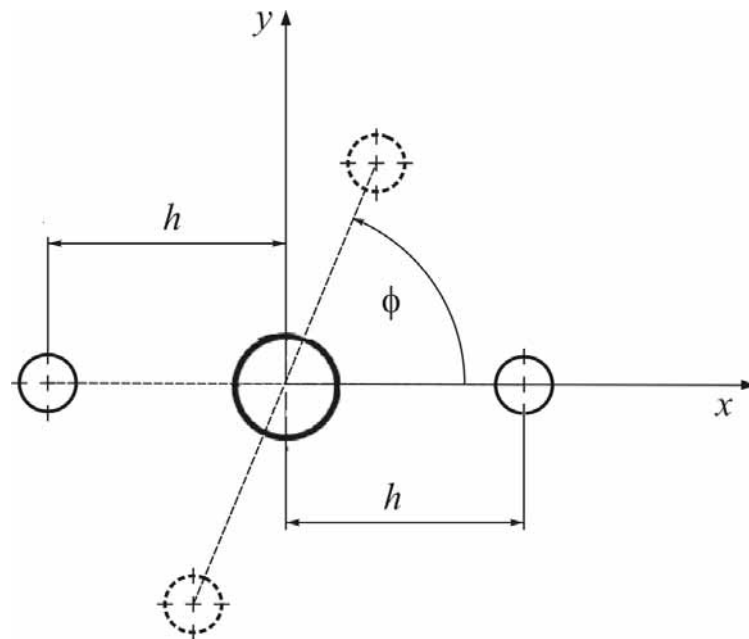


Figura 3: Disposición de los orificios secundarios con respecto al orificio principal

Nomenclatura:

y, x , ejes cartesianos de coordenadas
1, 2, direcciones de los ejes principales de elasticidad del material
E_1, E_2 , módulos de elasticidad del material
$G_{12}=G$, módulo de elasticidad transversa del material
ν_1, ν_2 , coeficientes de Poisson del material
N_x , magnitud de la tensión normal aplicada
d_c, d_a diámetro de los orificios circulares
l , lado menor de la placa
h , distancia entre el centro del orificio principal y el centro de los orificios secundarios
θ , ángulo de orientación de los ejes principales de elasticidad con respecto al eje x
ϕ , ángulo de orientación de la línea que une los centros de los orificios con respecto al eje x

Tabla 1. Nomenclatura

Para resolver el problema planteado se utilizó el programa FlexPDE¹. Este código, permite definir el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver, el dominio del problema y las condiciones a cumplir. Admite la utilización de elementos unidimensionales, elementos triangulares en 2D y elementos tetraédricos para 3D. En cada elemento se pueden utilizar funciones de forma lineal, cuadrática o cúbica. Una ventaja que brinda el código elegido, es la capacidad de realizar un proceso de refinamiento adaptativo del mallado que permitió encontrar resultados para las configuraciones cambiantes que se analizaron en forma relativamente sencilla. El proceso consistió en construir automáticamente un mallado inicial del dominio definido, estimar el error de la solución y refinar la malla en zonas donde no se alcanzaba la precisión buscada.

El problema resuelto corresponde a un problema de elasticidad plana. Las ecuaciones de equilibrio para el caso plano de tensiones $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ en ausencia de fuerzas de volumen resultan en el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Las relaciones entre los corrimientos en el plano, (u en dirección x y v en dirección y), y las tensiones para un material con características elásticas ortótropas, se obtienen de las relaciones constitutivas dadas en (3)

¹ FlexPDE es un entorno de resolución de problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con elementos finitos y scripts.

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\sigma_y &= C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{23} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\tau_{xy} &= C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

donde las constantes C_{ij} , con $i, j=1, 2$ y 3 , se pueden expresar para un ángulo general de orientación de los ejes de elasticidad θ como muestran las expresiones (4) extraídas de la bibliografía (Jones, 1999):

$$\begin{aligned}
C_{11} &= M_{11} \cos^4(\theta) + 2(M_{12} + 2M_{33}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + M_{22} \sin^4(\theta) \\
C_{12} &= (M_{11} + M_{22} - 4M_{33}) (\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)) + M_{12} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \\
C_{13} &= (M_{11} - M_{12} - 2M_{33}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) + (M_{12} - M_{22} + 2M_{33}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\
C_{23} &= (M_{11} - M_{12} - 2M_{33}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) + (M_{12} - M_{22} + 2M_{33}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\
C_{22} &= M_{11} \sin^4(\theta) + 2(M_{12} + 2M_{33}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + M_{22} \cos^4(\theta) \\
C_{33} &= (M_{11} + M_{22} - 2M_{12} - 2M_{33}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + M_{33} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta))
\end{aligned} \tag{4}$$

con:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}, & M_{12} &= \frac{\nu_1 E_2}{(1-\nu_1\nu_2)} \\
M_{22} &= \frac{E_2}{(1-\nu_1\nu_2)}, & M_{21} &= \frac{\nu_2 E_1}{(1-\nu_1\nu_2)} \\
M_{33} &= G
\end{aligned} \tag{5}$$

Las condiciones de borde consideradas corresponden a bordes libres. Es decir que la tensión normal a la curva que define el borde interior es nula. Esto no es así para los bordes externos que, dependiendo de la carga aplicada, poseen valores de tensión no nulos.

Las ecuaciones presentadas fueron codificadas en el programa mencionado. La definición del dominio del problema se establece a través de comandos particulares. Es así que por medio de segmentos de rectas, arcos y trazadores cúbicos (spline) es posible definir el dominio. Las condiciones de borde, geométricas o naturales, también se codifican por medio de comandos particulares. El elemento seleccionado para obtener los resultados de este trabajo fue el elemento triangular cuadrático (FlexPDE).

3 RESULTADOS NUMÉRICOS:

Se consideró un material ortótropo tipo “plywood” y una relación $h/d_c = 2$ constante en todos los casos. En todas las tablas los valores angulares están expresados en grados sexagesimales.

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G (GPa)	ν_1	ν_2	E_1/E_2	G/E_2
“plywood”	11,29	5,89	0,69	0,07	0,03652	1,92	0,117

Tabla 2. Constantes elásticas del material ortótropo

Para cada uno de los casos analizados se consideraron las posiciones de los ejes de ortotropía variando de 0° hasta 90° ; ($\theta = 0^\circ, 22,5^\circ, 45^\circ, 67,5^\circ$ y 90°).

Se adoptó la relación $d/l = 0,01$ y como posibles posiciones de los agujeros circulares satélites, a $\phi = 0^\circ, 22,5^\circ, 45^\circ, 67,5^\circ$ y 90° .

K_+	
θ	$d/l=0,01$
0,0	5,54
22,5	4,76
45,0	3,20
67,5	3,72
90,0	4,25

Tabla 3. Factor K_+ para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. Material “plywood”, $d_a/d_c=1$

K_-	
θ	$d/l=0,01$
0,0	-0,74
22,5	-0,90
45,0	-1,10
67,5	-1,40
90,0	-1,44

Tabla 4. Factor K_- para distintos tamaños del orificio central d_c/l y orientaciones elásticas. Material “plywood”,

Las Tabla 3 4 presentan los coeficientes de concentración de tensiones K_+ y K_- que se producen en la placa que tiene solamente el orificio principal

La Tabla 5 muestra los cambios que se producen en los valores de K_+ cuando la placa tiene simultáneamente otros dos orificios secundarios de igual tamaño que el principal, cercanos una distancia h del principal. Puede observarse que solo para $\phi=0$ hay una disminución del factor K_+ , para la todos las posiciones de los ejes elásticos en $\phi = 0^\circ$ y un aumento para las restantes ($\phi \neq 0^\circ$).

En la Figura 3 se presenta el detalle de la distribución de tensiones principales de tracción, para uno de el caso $\theta=0^\circ$ y $\phi=0^\circ$.

θ	K_+				
	ϕ				
	0	22,5	45	67,5	90
0,0	4,47	6,20	6,71	6,34	5,88
22,5	4,74	4,90	5,68	5,83	4,96
45,0	3,15	2,73	3,93	4,25	3,55
67,5	3,61	3,90	4,30	4,27	3,97
90,0	3,57	4,56	4,97	4,94	4,53

Tabla 5. Factor K_+ para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. Material “plywood”, $d_a/d_c=1$

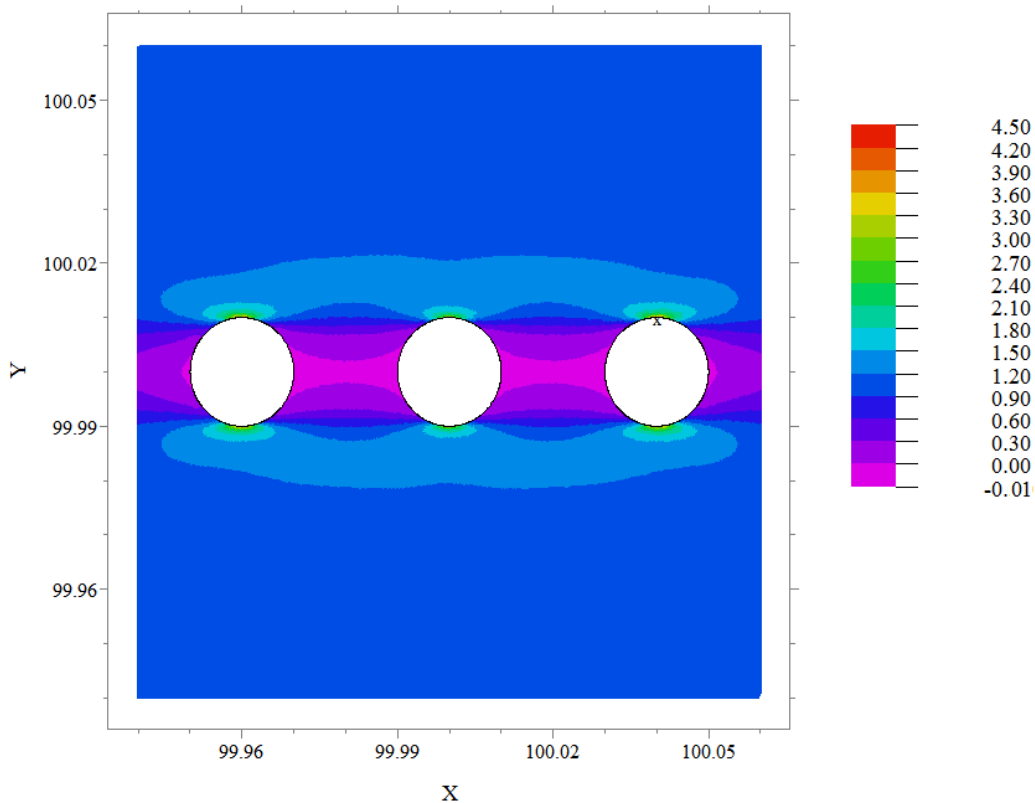


Figura 3: Detalle de la distribución de tensiones principales de tracción para $\theta=0^\circ$, $\phi=0^\circ$ y $d_a/d_c=1$

θ	K_-				
	ϕ				
	0	22,5	45	67,5	90
0,0	-0,62	-1,23	-1,08	-0,87	-0,61
22,5	-0,80	-1,30	-1,14	-0,92	-0,83
45,0	-1,00	-1,64	-1,62	-1,18	-1,03
67,5	-1,24	-1,72	-2,24	-1,97	-1,19
90,0	-1,24	-2,05	-2,16	-1,78	-1,14

Tabla 6. Factor K_- para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. Material “plywood”, $d_a/d_c=1$

La Tabla 6 siguiente es para el mismo caso y está referida al factor K_- , en ella se observa que para $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 90^\circ$ hay un alivio en la concentración de tensiones de compresión, para cualquier posición de los ejes elásticos de material y un aumento de los factores K en valor absoluto para las restantes orientaciones de los orificios.

Las Tablas 7 y 8 contienen los factores de concentración de tensiones para la relación de diámetros de 0,80. en general las variaciones en el factor K_+ mantiene la tendencia de lo encontrado para la relación $d_a/d_c=1$ y la Figura 4 muestra el detalle de la distribución de tensiones principales de tracción para $\theta = 0^\circ$, $\phi = 0^\circ$ y $d_a/d_c=0,8$.

θ	K_+				
	ϕ				
	0	22,5	45	67,5	90
0,0	4,52	6,16	6,36	6,10	5,72
22,5	4,72	4,60	5,63	5,51	4,89
45,0	3,14	2,74	3,74	4,16	3,41
67,5	3,58	3,88	4,12	4,09	3,88
90,0	3,53	4,50	4,75	4,73	4,40

Tabla 7. Factor K_+ para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. Material "plywood", $d_a/d_c=0,8$

θ	K_-				
	ϕ				
	0	22,5	45	67,5	90
0,0	-0,59	-1,12	-0,98	-0,86	-0,61
22,5	-0,79	-1,20	-1,08	-0,90	-0,79
45,0	-1,00	-1,53	-1,61	-1,10	-1,02
67,5	-1,22	-1,61	-2,15	-1,86	-1,18
90,0	-1,19	-1,88	-1,96	-1,76	1,17

Tabla 8. Factor K_- para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. Material "plywood", $d_a/d_c=0,8$

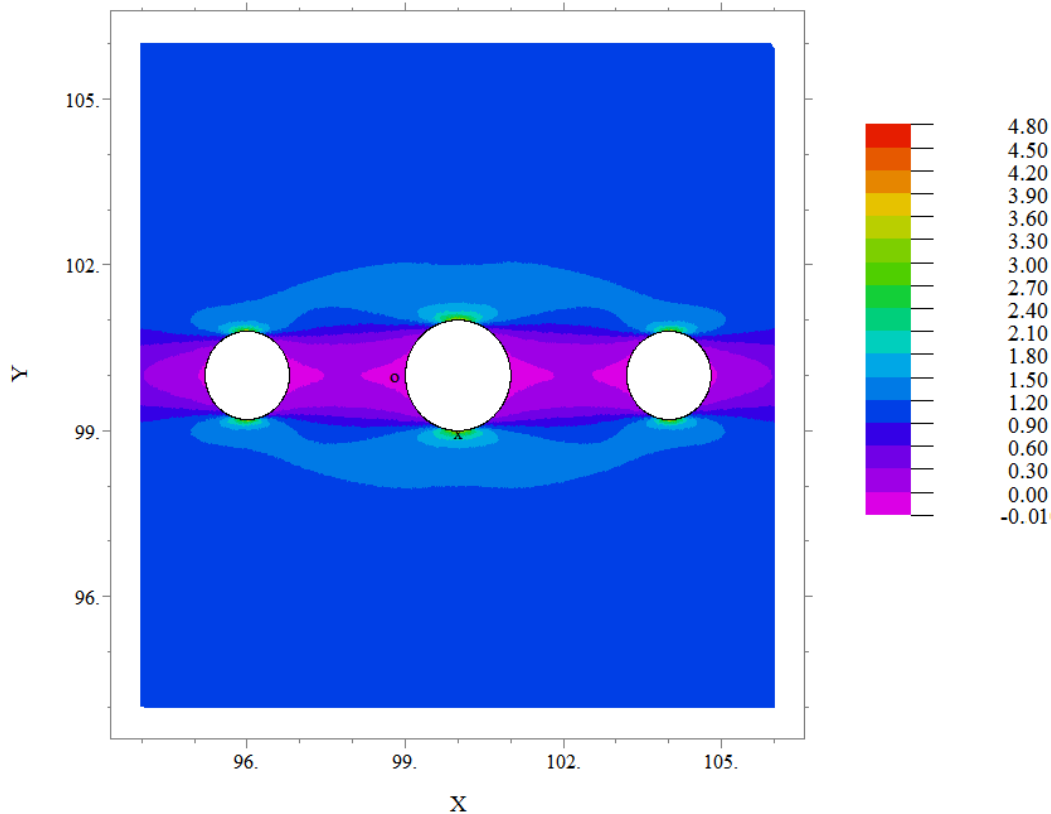


Figura 3: Detalle de la distribución de tensiones principales de tracción para $\theta = 0^\circ$, $\phi = 0^\circ$ y $d_a/d_c=0,8$.

θ	K_+				
	ϕ				
	0	22,5	45	67,5	90
0,0	5,02	6,09	6,24	5,98	5,66
22,5	4,68	4,37	5,59	5,35	4,86
45,0	3,12	2,82	3,54	4,15	3,35
67,5	3,54	3,85	4,05	4,00	3,84
90,0	3,88	4,45	4,67	4,65	4,35

Tabla 9. Factor K_+ para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. Material “plywood”, $d_a/d_c=0,6$

θ	K_-				
	ϕ				
	0	22,5	45	67,5	90
0,0	-0,55	-1,03	-0,95	-0,85	-0,67
22,5	-0,78	-1,12	-1,05	-0,88	-0,83
45,0	-1,00	-1,39	-1,58	-1,05	-1,03
67,5	-1,23	-1,54	-2,11	-1,74	-1,21
90,0	-1,14	-1,76	-1,88	-1,74	-1,31

Tabla 10. Factor K_- para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. Material “plywood”, $d_a/d_c=0,6$

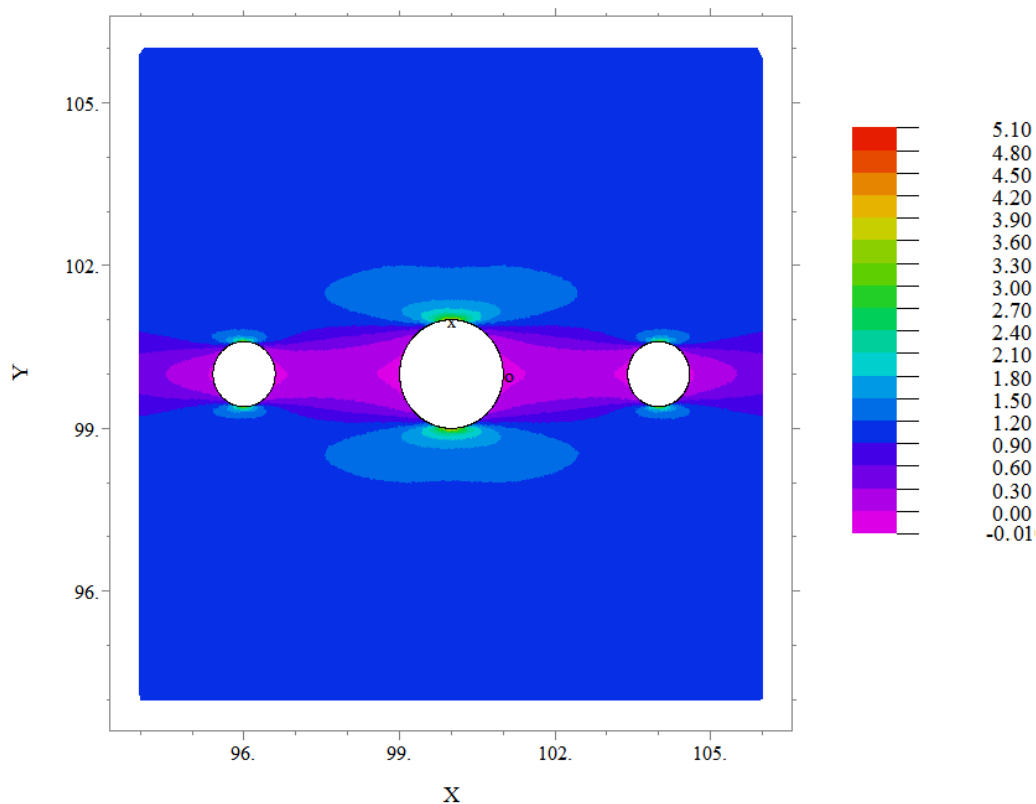


Figura 4: Detalle de la distribución de tensiones principales de tracción para $\theta = 0^\circ$, $\phi = 0^\circ$ y $d_a/d_c = 0,6$.

Las Tablas 9 y 10 se refieren a la relación $d_a/d_c = 0,60$ y las Tablas 11 y 12 a la relación $d_a/d_c = 0,40$, se puede ver que al disminuir los orificios satélite de tamaño se reduce el efecto sobre los factores de concentración de tensiones. En particular para 0,40 la influencia de los orificios satélite no logra casi disminuir los factores de concentración de tensiones K_+ para ninguna orientación ϕ y para el caso de K_+ hay un pequeño alivio de tensiones en la orientación $\phi = 0^\circ$ y prácticamente ninguna en $\phi = 90^\circ$; para las demás se mantiene o crece.

θ	K_+				
	ϕ				
	0	22,5	45	67,5	90
0,0	5,34	6,01	6,08	5,94	5,68
22,5	4,62	4,61	5,66	5,24	4,85
45,0	3,15	3,01	3,31	4,06	3,31
67,5	3,57	3,84	4,00	3,94	3,82
90,0	4,11	4,39	4,62	4,58	4,34

Tabla 11. Factor K_+ para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. Material “plywood”, $d_a/d_c = 0,4$

θ	K				
	ϕ				
	0	22,5	45	67,5	90
0,0	-0,59	-0,96	-0,92	-0,83	-0,71
22,5	-0,84	-1,05	-1,04	-0,88	-0,86
45,0	-1,06	-1,26	-1,57	-1,07	-1,07
67,5	-1,32	-1,48	-2,03	-1,62	-1,30
90,0	-1,23	-1,66	-1,80	-1,72	-1,39

Tabla 12. Factor K . para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. Material “plywood”, $d_d/d_c=0,4$

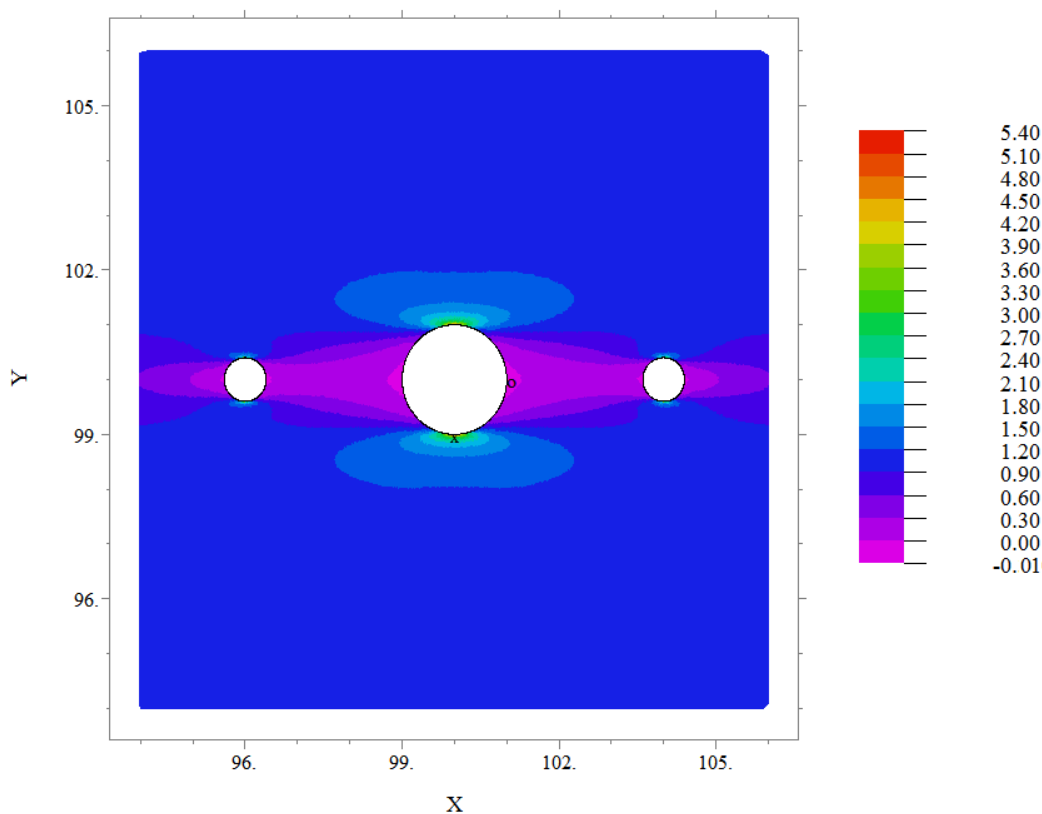


Figura 5: Detalle de la distribución de tensiones principales de tracción para $\theta=0^\circ$, $\phi=0^\circ$ y $d_d/d_c=0,4$

4 CONCLUSIONES

En este estudio se presentan un conjunto de resultados obtenidos para una placa ortótropa con un orificio circular sometida a tracción uniaxial en el plano. Y se estudia el efecto que tiene en la concentración de tensiones inicial la incorporación de otros orificios laterales o secundarios.

No se observa una fuerte influencia de la orientación de los ejes de ortotropía en la

magnitud de las tensiones, para el tipo de material elegido para el análisis.

Es importante hacer notar la aparición de tensiones significativas de compresión ante una carga de tracción uniaxial, $N_x > 0$, lo que debe ser tenido en cuenta, sobre todo en caso de placas delgadas, por la posibilidad de inestabilidad del equilibrio. El procedimiento utilizado resultó sencillo de implementar a pesar de la complejidad analítica del problema y se logra con un código disponible para el ingeniero de diseño. Con la misma herramienta es posible analizar otros elementos de incidencia sobre la concentración de tensiones, como la variación de la distancia de los orificios satélite al orificio principal, o el incremento del número de orificios satélite, entre otros

5 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y por el CONICET.

REFERENCIAS

- Bambill, D. V., Susca, A., Laura P. A. A., Maiz, S., “Concentración de tensión en placa ortótropa sometida a esfuerzo biaxial”. *Mecánica Computacional*, Vol. XXIV: 1093-1103, 2005.
- FlexPDE v.2.20. “A flexible solution system for partial differential equations”. PDE Solutions Inc. 2001.
- Henshaw J. M., Sorem Jr. J. R. and Glaessgen E. H., “Finite element analysis of ply-by-ply and equivalent stress concentrations in composite plates with multiple holes under tensile and shear loading”, *Composite Structures*, 36: 45-58, 1996.
- Jindal, U. C. “Reduction of stress concentration around a hole in a uniaxially loaded plate”, *Journal of Strain Analysis*, 18(2): 135-41 ,1983.
- Jones, R. M., “*Mechanics of composite materials*”, Taylor and Francis, Inc., 1999.
- Kirsch, G. “*Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre*”, Zeit Verem, *Deutsch Ing.*, 42: 797-807, 1898.
- Lekhnitskii S. G., *Anisotropic Plates*, Gordon and Breack Science Publishers, New York, N.Y., 1968.
- Pilkey, W. D. “*Peterson’s stresses concentration factors*”, John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- Ukadgaonker, V. G., Rao, D. K. N. “A general solution for stresses around holes in symmetric laminates under in plane loading”. *Composite Structures*, 49: 339-354, 2000.