

DETERMINACIÓN DE FRECUENCIAS NATURALES DE UNA PLACA ANULAR EMPOTRADA EN EL CENTRO A TRAVÉS DE DISTINTOS MÉTODOS

J. Pombo¹, W. Tuckart¹, R. Rossi²

¹UNS –Dto. Ingeniería
Avda. Alem 1253 1° Piso- Bahía Blanca-8000- Argentina
jpombo@criba.edu.ar

²UNS –Dto. Ingeniería- IMA
Avda. Alem 1253 1° Piso- Bahía Blanca-8000- Argentina

Palabras Claves:

Resumen. *En el presente trabajo se describe el estudio analítico, numérico y experimental de la determinación de las primeras frecuencias naturales de una placa anular empotrada en el borde interno y libre en el externo, realizado en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.*

El objetivo de este trabajo consiste en comparar los resultados obtenidos mediante la utilización de dos modelos teóricos diferentes (solución analítica y el método de elementos finitos) y los obtenidos a través de ensayos experimentales. Para las determinaciones con el método de elementos finitos se utilizó modelo con elemento placa del software Proffesional Mech/VE de Algor, mientras que para los ensayos experimentales fue construido un modelo físico con el que se efectuaron análisis en vibración libre, utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT) y en vibración forzada, mediante la técnica de Figuras de Lissajous.. Los resultados muestran, para este caso particular, que la frecuencia fundamental (la de menor valor) corresponde la forma modal con un línea nodal diametral, en lugar de la forma sin líneas nodales de la frecuencia $f(0,0)$. Se presenta además, un ejemplo de aplicación de las conclusiones obtenidas para el caso práctico real de un absorbedor dinámico de vibraciones, instalado para reducir la amplitud en una máquina con cierto nivel de vibración.

1. INTRODUCCIÓN

Un amplio rango de componentes en ingeniería poseen forma y proporciones que pueden ser descritas en términos de placas o membranas. Por ejemplo, diversos objetos de buques o aviones.

Una placa es un tablero, usualmente plano, en el cual el espesor es siempre pequeño en relación con las otras dimensiones (Turner, [6]). Suponiendo un material perfectamente homogéneo e isotrópico, una placa puede ser considerada como una viga bidimensional. (Den Hartog, [4]).

El caso de vibraciones en placas circulares fue estudiado por Wha ¹, en 1962, y en particular el de vibraciones transversales en placas anulares uniformes fue analizado por Vogel, S. M. and D.W. Skinner ² en 1965. Posteriormente Rao y Prasad ³ en 1975, incluyeron los efectos de inercia rotatorios y de deformación de corte transversal en las ecuaciones para la determinación de las frecuencias naturales.

En el desarrollo de la teoría de las vibraciones en placas, no existe una solución exacta para un sistema general. A través de una variedad de métodos es posible el estudio de la vibración de sistemas de placas bajo distintas condiciones de borde.

2. SOLUCIÓN ANALÍTICA

La ecuación de vibraciones transversales de placas delgadas de espesor constante está dada por:

$$D \nabla^4 W(x, y, t) = p(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) \quad (1)$$

Donde:

- D es la rigidez a la flexión de la placa $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$
- ρ es la densidad del material de la placa
- ∇^4 es el operador biarmónico.
- $p(x, y, t)$ denota la fuerza externa, función de las coordenadas espaciales y la variable temporal sobre la placa por unidad de área.

Esta ecuación es aplicable a problemas de vibraciones de placas o losas con rigidez a la flexión cuando la amplitud de oscilación es pequeña en relación con su espesor. Con esta teoría de placas delgadas vibrantes se obtiene la siguiente fórmula para el cálculo de las frecuencias naturales (Ref 4)

$$\text{Frecuencia Natural [Hertz]} = f_{ij} = \frac{\ddot{e}_{ij}^2}{2\delta a^2} \left[\frac{E h^3}{12 \tilde{a} (1 - \tilde{\delta}^2)} \right]^{1/2} \quad (2)$$

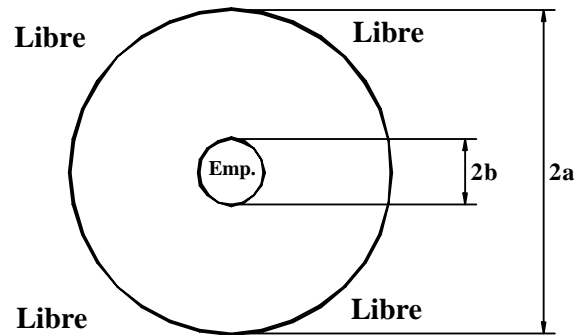


Figura 1: condiciones de borde de la placa anular estudiada

donde :

i : número de diámetros nodales.

j : número de círculos nodales.

a : radio exterior.

b : radio interior

h : espesor de la placa.

E : módulo de elasticidad.

γ : masa por unidad de área de la placa.

ν : módulo de Poisson.

λ : parámetro que es función de las condiciones de borde, la geometría y el módulo de Poisson de la placa.

Una placa circular tiene modos de vibración simétricos con respecto del centro, así como también modos en que uno o más diámetros del círculo son líneas nodales, a lo largo de las cuales son nulas las deflexiones durante la vibración. En la figura 2 se muestran varios modos de vibración de una placa circular, donde las líneas nodales están representadas por los límites entre las zonas de distinto color.

Los subíndices i y j indican las líneas nodales, de esta manera se tendrá:

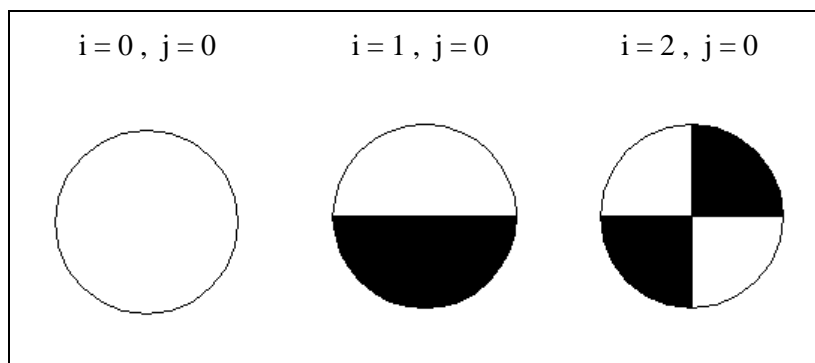


Figura 2: identificación de los subíndices i y j .

Como se observa en la misma figura el subíndice i indica el número de líneas nodales diametrales y el subíndice j el número de líneas nodales circulares.

Volviendo a la placa anular empotrada en su borde interior, interpolando valores de la tabla 11-2 dada por R. Blevins⁴, para un cociente $b/a = 0.205$ se obtiene:

$$f(0, 0) : \lambda^2 = 5.50$$

$$f(2, 0) : \lambda^2 = 6.84$$

$$f(1, 0) : \lambda^2 = 4.81$$

$$f(3, 0) : \lambda^2 = 12.87$$

reemplazando estos valores en (2) con: $a = 0.2415$ m, $h = 0.0035$ m, $E = 20.6 \times 10^{10}$ N/m², $\tilde{\alpha} = 274.75$ MPa resulta:

Modo [i, j]	Frecuencia [Hz]
f (0,0)	78,81 Hz
f (1,0)	69.74 Hz
f (2,0)	95,30 Hz
f (3,0)	189.10 Hz

Tabla 1: frecuencias obtenidas con la solución analítica.

3. ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Para este análisis fue utilizado el programa Algor con distintos números de elementos tipo placa (formulación de Veubeke⁵). Los resultados obtenidos fueron los indicados en la Tabla 2:

Número de Elementos	Número Nodos	Grados de Libertad	Frecuencia [Hz]			
			f (0,0)	f (1,0)	f (2,0)	f (3,0)
400	440	1200	77.25	72.02	95.55	184.40
900	960	2700	77.43	72.21	95.98	185.90
1800	1872	5400	77.56	72.33	96.21	186.60

Tabla 2: frecuencias obtenidas con elementos finitos. Modelo con $b = 4.95$.

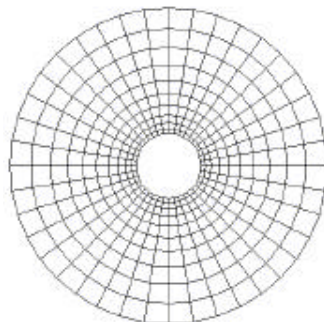


Figura 3: modelo de E.F.
1052

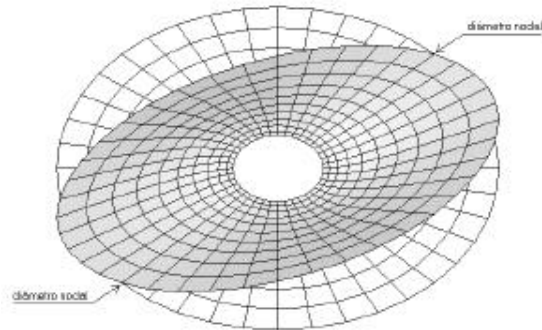


Figura 4: forma nodal para $f(1,0)$.

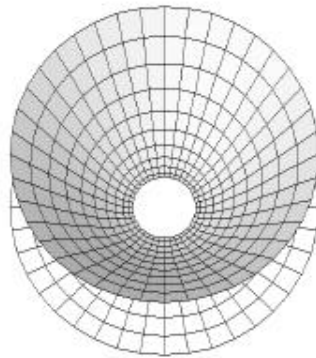


Figura 5: forma nodal para $f(0,0)$.

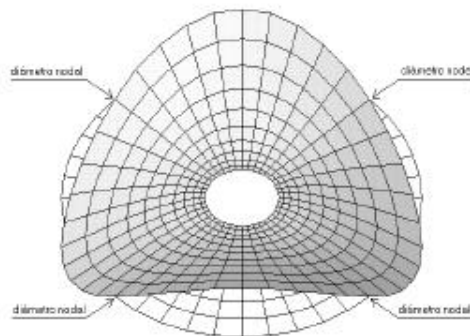


Figura 6: forma nodal para $f(2,0)$.

Para considerar la imperfección del empotramiento del modelo experimental, se disminuyó el radio interno en el modelo con elementos finitos, en aproximadamente un 10% de la diferencia de radios:

$$b \cong 4.95 - 0.1 (24.15 - 4.95) \cong 3 \text{ cm}$$

Esta técnica empírica es usual en el caso de vigas en voladizo.

En la Tabla 3 se dan los resultados obtenidos para las distintas frecuencias obtenidos con esta modificación del radio del borde interno perfectamente empotrado.

Número de elementos	Frecuencia [Hz]			
	$f(0,0)$	$f(1,0)$	$f(2,0)$	$f(3,0)$
400	65.25	55.77	84.50	180.80
900	65.42	55.91	85.02	183.00
1800	65.52	56.00	85.28	185.00

Tabla 3: frecuencias obtenidas con elementos finitos. Modelo con $b = 3$.

Finalmente en la Tabla 4 se transcriben los valores redondeados a números enteros.

Modo [i, j]	Frecuencia [Hz]
$f(0,0)$	$\cong 66$
$f(1,0)$	$\cong 56$
$f(2,0)$	$\cong 85$
$f(3,0)$	$\cong 185$

Tabla 4: valores finales redondeados obtenidos con método de elementos finitos.

4. DESARROLLO DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL

Para obtener experimentalmente las distintas frecuencias naturales se construyó un modelo físico de acero SAE 1010, el cual fue excitado mediante técnicas que logran hacerla vibrar en forma libre y también en forma forzada. (Ver figura 7).

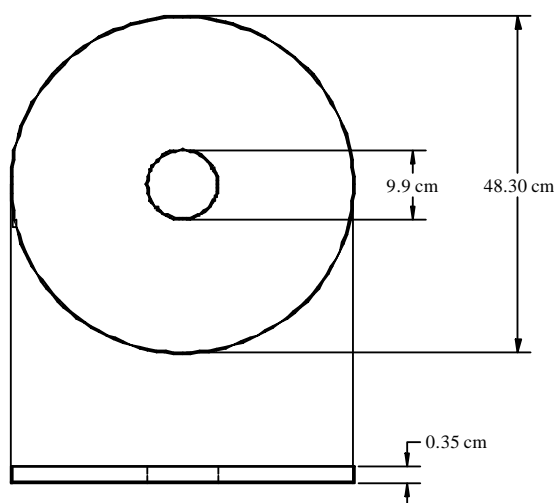


Figura 7: esquema del modelo físico ensayado.

Para la vibración libre, simplemente fue excitada mediante la aplicación de impactos, con lo cual si la duración del mismo es adecuada, se logra obtener como respuesta un movimiento vibratorio que será la combinación de las distintas frecuencias naturales. Mediante análisis espectral, con equipos que realizan la transformada rápida de Fourier (FFT) previa digitalización de la señal analógica proveniente del sensor de proximidad, se logró la separación de las distintas frecuencias.

Para hacerlo vibrar en forma forzada o en una determinada frecuencia se utilizó un oscilador, un amplificador y un parlante el cual fue colocado muy cerca del modelo de placa, de manera que se pudiera obtener una excitación forzada de amplitud suficiente como para medir las distintas frecuencias naturales, con la ayuda de los sensores de proximidad (ver figura 8).

En la determinación de las distintas frecuencias naturales fue utilizada la técnica de buscar la máxima amplitud de vibración en función de la frecuencia y la comparación de la fase entre la señal de excitación y la de respuesta, obteniéndose un cambio de fase de 180° entre las frecuencias anteriores y posteriores a la frecuencia natural.

Identificadas las frecuencias naturales, se estableció la ubicación de las líneas nodales, manteniendo la excitación forzada en cada una de dichas frecuencias y se desplazó el sensor de medición comparando su fase y amplitud con la de excitación. A través de la utilización de la técnica de las figuras de Lissajous en un osciloscopio, se obtuvo una disminución en la amplitud de vibración en la ubicación de la línea nodal y un cambio de fase de 180° entre la posición hacia un lado y hacia otro de la línea nodal.

En la Tabla 5 se dan los valores hallados con el modelo experimental:

Modo [i, j]	Frecuencia [Hz]
f (0,0)	69
f (1,0)	54
f (2,0)	82
f (3,0)	180

Tabla 5: resultados obtenidos con el modelo experimental.

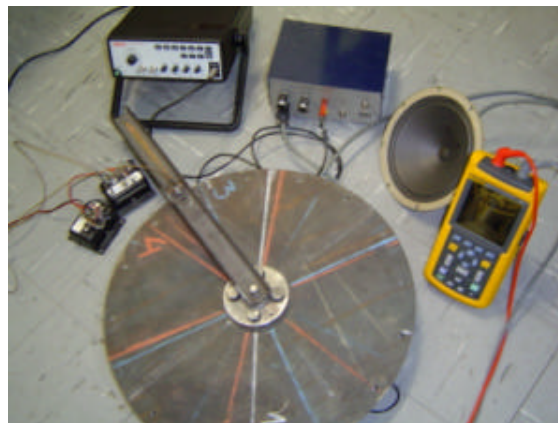


Figura 8: instrumental utilizado para la determinación de las frecuencias naturales

5. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS

En la Tabla 7 se dan los valores de las frecuencias obtenidas con los tres métodos utilizados con este trabajo. Finalmente, en la Figura 5 se realiza la comparación gráfica.

Modo de Vibración [i, j]	Frecuencia de Vibración [Hz]		
	S. A.	M. E. F.	E.
0,0	78,81	66	69
0,1	69,74	56	54
0,2	95,30	85	82
0,3	189,10	185	180

Tabla 7: resultados obtenidos según los distintos métodos: S. A. solución analítica, M.E.F. método de elementos finitos y E. Experimental

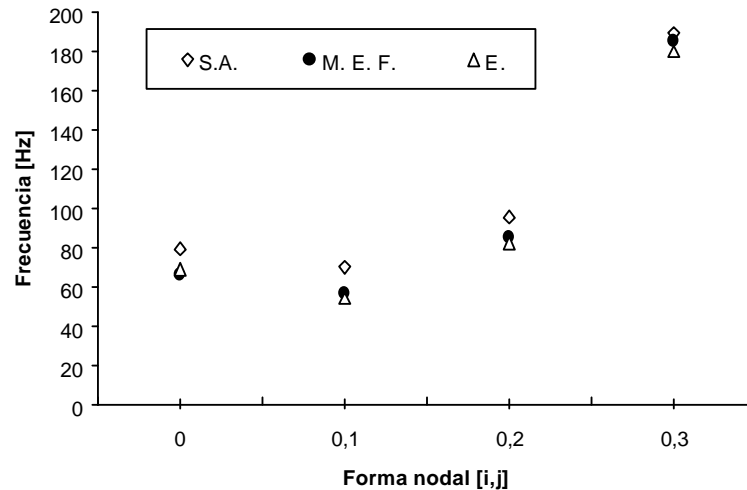


Figura 9: valores de frecuencia de vibración determinados por distintos métodos

6. CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados obtenidos se puede concluir que:

- En la placa anular empotrada en el borde interior libre en el borde externo, la frecuencia de vibración con una línea nodal es menor, que la que no tiene ninguna línea nodal diametral (ver figuras 4 y 5).
- La técnica de disminuir el radio interno en el modelo con E. F. adoptada en este trabajo, para tener en cuenta la deformabilidad del empotramiento en el modelo experimental, resulta adecuada para mejorar la concordancia de los resultados y produce un efecto que disminuye en las sucesivas frecuencias naturales (ver Tablas 2 y 3).

7. EJEMPLO DE APLICACIÓN

El principio del absorbedor dinámico de vibración es una de las formas que puede ser utilizada para reducir la vibración de una máquina o equipo. Fue introducido en la literatura en 1928 por J. Ormondroyd y J. P. Den Hartog. Así en ciertos casos es posible diseñar un sistema secundario resorte – masa, llamado absorbedor, el cual debe ser acoplado a la masa primaria, sintonizado a la misma frecuencia de vibración, de manera que introducirá una fuerza de oposición igual a la fuerza perturbadora, para suprimir “teóricamente” por completo el movimiento vibratorio del sistema original. En general, la acción del absorbedor es efectiva sólo cuando la primera frecuencia es la componente mayor de la vibración “original” y solamente si la fuerza actuante mantiene la frecuencia constante. La mayor ventaja que posee este tipo de sistemas es que puede ser colocados en la máquina en condiciones de funcionamiento, es decir que no es necesario desafectarla del sistema, para poder reducir las amplitudes de vibración.

En el caso en particular que se presenta, fue utilizada una placa anular empotrada en el borde interior y libre en su contorno externo, como absorbedor dinámico de vibraciones en una caja reductora de grandes dimensiones de un molino cementero (Ver figura 10).

La elección de una placa circular para esta aplicación, se debe a que el vientre de la vibración la máquina se encontró en el centro de la cara de la carcasa.

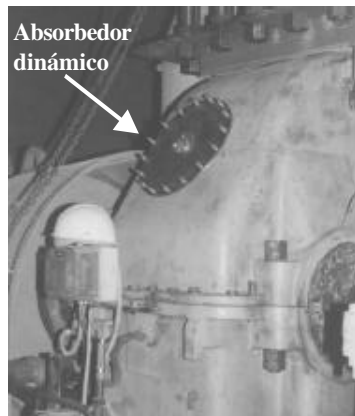


Figura 10: imagen de absorbedor dinámico montado en una caja reductora.

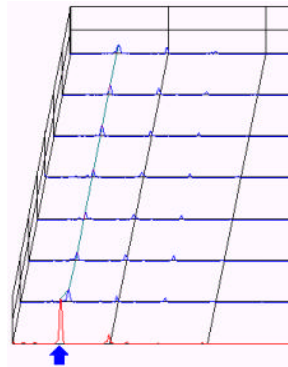


Figura 11: cascada de espectros donde se observa la disminución de la amplitud de vibración, con la colocación del absorbedor dinámico.

8. REFERENCIAS

- ¹ T. Wha, "Vibration of Circular Plates", J. Acoust Soc. Am. 34, pp. 275-281. (1983)
- ² S. M. Vogel, and D.W. Skinner, "Natural Frequency of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates", J. Appl. Mech 32, pp. 926- 931. (1965)
- ³ Rao y Prasad, "Vibrations of Annular Plates Including the Effects Of Rotary Inertia and Traverse Shear Deformation", J. Sound and Vib. 42, pp. 305-324. (1975)
- ⁴ R. Blevins, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Co., (1979).
- ⁵ B. Fraeijs de Veubeke, "A Conforming Finite Element for Plate Bending", Int. J. Solids Structures. 4, pp. 95-108. (1968)

9. BIBLIOGRAFIA

- (1) "Vibration of Plates", A. Leissa, Nasa SP-160, 1969
- (2) "Dynamic Vibration Absorber", J.B. Hunt; edit MPE; 1979.
- (3) "Selection and performance of Vibration Test", A. Curtis, N. Tinling H. Abstein Jr.; Naval Research Laboratory Washington D. C., 1971.
- (4) "Mecánica de las Vibraciones" J.P. Den Hartog, 4 ed. Com. Edit. Continental, 1964.
- (5) "Problemas de Vibración en Ingeniería", S. Timoshenko, D. H. Young, Com. Edit. Continental, 1960.
- (6) "Introduction to Plate and Shell Theory"; C. Turner, American Elsevier, 1965.
- (7) "Stiffened Plates, Bending, Stability and Vibrations", M. Troitsky, Elsevier Scientific, 1976.
- (8) "Mechanical Vibration and Shock Measurements", J. T. Broch, Brüel & Kjaer, Larsen & Son, 1979.
- (9) "Introducción a la Teoría de Vibraciones de Sistemas Discretos y Continuos", Patricio Laura, Eudeba, 1973.

10. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración prestada Dra. Marta Rosales, Área Estabilidad, Dto. Ingeniería, Universidad Nacional del Sur.