

ANÁLISIS MODAL DE LA DISPERSIÓN DE FASE ESPACIAL DE ONDAS SUPERFICIALES UTILIZADA PARA EL AJUSTE DE PERFILES DE SUELO

Marcelo A. Ceballos^a y Carlos A. Prato^a

*^aDepartamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba, Vélez Sarsfield 1611, X5016GCA, Córdoba, Argentina,
<http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct>*

Palabras clave: perfiles de suelo, curvas de dispersión, ajuste de parámetros mecánicos, análisis modal de ondas superficiales.

Resumen. La dispersión de fase espacial de ondas superficiales ha sido recientemente utilizada por los autores como función objetivo para la determinación de velocidades de propagación de ondas de corte de perfiles mecánicos en terrenos donde se proyectan obras civiles de cierta envergadura. Los perfiles inversamente dispersivos que se caracterizan por la presencia de estratos blandos debajo de estratos duros involucran una marcada participación de los modos superiores de propagación en la respuesta superficial del terreno. La dispersión de fase espacial a diferencia de otras funciones objetivo se obtiene considerando la totalidad de los modos de propagación, de manera que la validez de los resultados no se encuentra condicionada por la distribución en profundidad de la rigidez del perfil de suelo. Los parámetros normalmente incluidos en el proceso de inversión son las velocidades de propagación de los distintos estratos del terreno que presentan la máxima sensibilidad respecto a esta función objetivo. La búsqueda de los parámetros óptimos se realiza a través de técnicas de gradientes. En este trabajo se presenta una mejora del modelo de propagación de ondas superficiales basada en la aproximación de la flexibilidad dinámica del semiespacio, sobre el que apoyan los estratos del perfil de suelo, por medio de parámetros modales en el dominio número de onda que son forzados a satisfacer ciertas condiciones de estabilidad. Las restricciones impuestas durante el ajuste de estos parámetros producen matrices físicas para el semiespacio que mantienen durante el ensamble características particulares de las matrices de los estratos de la “formulación de capas delgadas”. La preservación de determinadas submatrices nulas en las matrices ensambladas genera parámetros modales estables del perfil completo que permiten pasar la respuesta del dominio número de onda al dominio espacial en forma analítica con un importante ahorro computacional durante el proceso de ajuste del perfil de suelo.

1 INTRODUCCION

La dispersión de fase espacial como función objetivo para el ajuste de perfiles de suelo (Ceballos y Prato, 2008) ha sido testada como técnica alternativa del análisis espectral de ondas superficiales (SASW, siglas en inglés). La técnica SASW sólo resulta rigurosamente aplicable para perfiles con rigidez creciente en profundidad dado que se basa en la hipótesis que la respuesta superficial se encuentra dominada por el modo fundamental de propagación. Por consiguiente, los resultados de esta técnica son cuestionables para perfiles inversamente dispersivos que presentan estratos blandos debajo de estratos duros, dado que la respuesta se encuentra controlada en ciertos rangos de frecuencia por modos superiores de propagación.

El análisis de fases espaciales de ondas superficiales (SPhASW, siglas en inglés) basado en la dispersión de fase espacial utiliza, al igual que la técnica SASW, la “formulación de capas delgadas” (Kausel, 1981) para la modelación de los estratos supuestos horizontales y paralelos. Sin embargo, la necesidad de una buena aproximación de los modos superiores exige un modelo mejorado del semiespacio que soporta los estratos superiores. El modelo original del semiespacio de la técnica SPhASW (Ceballos y Prato, 2008) incluye una pequeña cantidad de amortiguamiento material histerético para obtener un buen condicionamiento durante la aproximación de las componentes de flexibilidad en el dominio número de onda. En efecto, estas componentes presentan amplitudes no acotadas en correspondencia con el número de onda vinculado a la velocidad de propagación de ondas de Rayleigh.

El modelo de la respuesta del semiespacio propuesto en este trabajo se basa en un ajuste en dos etapas de las componentes de flexibilidad a través de parámetros modales. En una etapa preliminar, las amplitudes no acotadas de la flexibilidad se eliminan “descontándose” el modo exacto de propagación de ondas de Rayleigh, que se agrega a la base modal al final del ajuste. De esta forma, el agregado de amortiguamiento para el condicionamiento del ajuste no resulta necesario, siendo luego posible una incorporación más controlada de amortiguamiento a través de los autovalores. En la primera etapa se ajusta la flexibilidad “remanente” con una fracción polinómica matricial utilizando el criterio de mínimos cuadrados. El modelo modal obtenido, que no resulta simétrico, es luego sometido a un proceso de simetrización y forzado a cumplir la denominada “restricción fundamental” que permite mantener la estructura de las matrices de los estratos de la formulación de capas delgadas. En la segunda etapa se realiza el ajuste fino de los parámetros modales utilizando un proceso iterativo con técnicas de gradientes. La utilización de coordenadas generalizadas para obtener una matriz cuadrada de formas modales permite definir matrices físicas para el semiespacio que pueden ensamblarse en forma directa con las matrices de los estratos.

2 MODELO DEL PERFIL DE SUELO

El movimiento de la superficie del terreno producido por una carga impulsiva vertical se determina en forma exacta con el modelo mecánico del perfil de suelo presentado en el trabajo de Kausel y Roësset (1981). El patrón de ondas producido por el impulso vertical aplicado durante los ensayos resulta axilsimétrico involucrando exclusivamente modos de propagación de ondas de Rayleigh.

2.1 Matrices exactas en el dominio número de onda

Las matrices exactas de los estratos en el dominio del número de onda k permiten calcular los desplazamientos en forma discreta en dirección vertical z y en forma continua en dirección radial x . El perfil de suelo se discretiza verticalmente en estratos cuyo comportamiento mecánico se describe a través de matrices de rigidez de 4×4 con una coordenada vertical y una radial por extremo. La determinación de la respuesta U del perfil de suelo se realiza para

cada número de onda k de la siguiente forma

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{P} \quad (1)$$

La matriz de rigidez del perfil \mathbf{K} y el vector de cargas \mathbf{P} se obtienen a través del ensamble directo de las componentes de cada estrato

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{xx}^{ii} & K_{xz}^{ii} & K_{xx}^{ij} & K_{xz}^{ij} \\ K_{zx}^{ii} & K_{zz}^{ii} & K_{zx}^{ij} & K_{zz}^{ij} \\ \hline K_{xx}^{ji} & K_{xz}^{ji} & K_{xx}^{jj} & K_{xz}^{jj} \\ K_{zx}^{ji} & K_{zz}^{ji} & K_{zx}^{jj} & K_{zz}^{jj} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_x^i \\ P_z^i \\ P_x^j \\ P_z^j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

donde i y j representan extremos genéricos superior e inferior, respectivamente. La única componente no nula del vector de carga, asumiendo un impulso ideal vertical aplicado sobre la superficie del terreno, toma en el dominio número de onda k un valor unitario y en el dominio espacial u la forma de una función delta Dirac

$$P_z^i(k) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P_z^i(u) = \bar{\delta}(u)/u \quad (3)$$

De esta forma, la respuesta vertical sobre la superficie en el dominio k resulta igual a la primer componente vertical de la diagonal principal de la matriz de flexibilidad \mathbf{F} . La matriz de rigidez de un estrato en función de parámetros adimensionales resulta (Kausel y Roësset, 1981)

$$\mathbf{K} = \omega \delta V_s \bar{\mathbf{K}} \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = 2\kappa \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{D} = 2(S_r S_s - 1) + \left(\frac{1}{rs} + rs \right) T_r T_s \quad (5)$$

$$\bar{K}_{11} = \frac{(1-s^2)}{2\bar{D}} \begin{bmatrix} (T_s - rsT_r)/s & (1 - S_r S_s - rsT_r T_s) \\ (1 - S_r S_s - rsT_r T_s) & (T_r - rsT_s)/r \end{bmatrix} - \frac{(1+s^2)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\bar{K}_{22} = \text{Idem } \bar{K}_{11} \text{ con signos cambiados de los términos cruzados} \quad (7)$$

$$\bar{K}_{12} = \frac{(1-s^2)}{2\bar{D}} \begin{bmatrix} (rsT_r S_s - T_s S_r)/s & (S_r - S_s) \\ (S_s - S_r) & (rsT_s S_r - T_r S_s)/r \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{K}_{21} = \bar{K}_{12}^T \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa &= kV_s/\omega & \eta &= h\omega/V_s & \alpha &= \sqrt{(1/2 - \nu)/(1 - \nu)} \\ r &= 1/\kappa \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} & T_r &= \tanh(r\kappa\eta) & S_r &= \text{sech}(r\kappa\eta) \\ s &= 1/\kappa \sqrt{\kappa^2 - 1} & T_s &= \tanh(s\kappa\eta) & S_s &= \text{sech}(s\kappa\eta) \end{aligned} \quad (9)$$

El parámetro h es el espesor del estrato, δ es la densidad, V_s es la velocidad de ondas de corte y ω es la frecuencia de análisis. El parámetro κ es el número de onda adimensional en tanto que η es el espesor adimensional del estrato. El semiespacio debajo del último estrato posee la siguiente matriz de rigidez de 2×2 con coordenadas vinculadas a su extremo

superior

$$K = \omega \delta V_S \bar{K} \quad \text{donde:} \quad \bar{K} = \frac{\kappa}{1-rs} \begin{bmatrix} r(1-s^2) & 2rs-1-s^2 \\ 2rs-1-s^2 & s(1-s^2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

tomando para $\kappa = 0$ los valores indicados a continuación

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i/\alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{F} = \bar{K}^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{bmatrix} \quad (11)$$

La matriz de flexibilidad adimensional adopta la siguiente forma

$$\bar{F} = \frac{1}{\bar{C}} \begin{bmatrix} \sqrt{\kappa^2 - 1} & -\kappa(1 - 2\kappa^2 + 2\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}\sqrt{\kappa^2 - 1}) \\ -\kappa(1 - 2\kappa^2 + 2\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}\sqrt{\kappa^2 - 1}) & \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde

$$\bar{C} = 4\kappa^2 \left(\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} \sqrt{\kappa^2 - 1} - \kappa^2 + 1 \right) - 1 \quad (13)$$

La función \bar{C} presenta una raíz $\kappa_{R,0}$ relacionada con la velocidad de propagación de ondas superficiales u ondas de Rayleigh V_R del semiespacio

$$\kappa_{R,0} = V_S / V_R \quad (14)$$

Esta raíz varía en función del coeficiente de Poisson ν entre $\kappa_{R,0} = 1.1441$ para $\nu = 0$ y $\kappa_{R,0} = 1.0468$ para $\nu = 1/2$. La contribución a la matriz de flexibilidad de este modo fundamental de propagación descrito por [Lamb \(1904\)](#) resulta

$$\bar{F}_0 = \frac{1}{(\kappa^2 - \kappa_{R,0}^2)} \begin{bmatrix} \phi_{x,0}^2 & \kappa/\kappa_{R,0} \phi_{x,0} \phi_{z,0} \\ \kappa/\kappa_{R,0} \phi_{x,0} \phi_{z,0} & \phi_{z,0}^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde

$$\phi_{x,0} = \sqrt{\sqrt{\kappa_{R,0}^2 - 1} / A_0} \quad \phi_{z,0} = \sqrt{\sqrt{\kappa_{R,0}^2 - \alpha^2} / A_0} \quad (16)$$

$$A_0 = \frac{8\kappa_{R,0}^4 - 6\kappa_{R,0}^2(\alpha^2 + 1) + 4\alpha^2}{\sqrt{\kappa_{R,0}^2 - \alpha^2} \sqrt{\kappa_{R,0}^2 - 1}} - 8\kappa_{R,0}^2 + 4 \quad (17)$$

Los coeficientes de (15) pueden obtenerse evaluando el numerador de los coeficientes de (12) en $\kappa_{R,0}$ y expandiendo el denominador \bar{C} en potencias pares de $\kappa_{R,0}$ hasta $\kappa_{R,0}^2$.

La transformación de la carga vertical en la superficie y el desplazamiento obtenido con (1) entre dominios número de onda κ y espacial ρ se realiza a través de la Transformada de Hankel

$$P_z^1(\kappa) = \int_0^\infty u P_z^1(u) J_0(\kappa u) du \quad (18)$$

$$U_z^1(u) = \int_0^\infty \kappa U_z^1(\kappa) J_0(\kappa u) d\kappa$$

donde J_0 representa la función de Bessel de orden 0. La complejidad de las componentes

de la flexibilidad impide la obtención de soluciones analíticas de la respuesta resultando necesario recurrir a implementaciones numéricas con un alto costo computacional. Por otra parte, las amplitudes no acotadas de las componentes de flexibilidad obligan a agregar amortiguamiento para evitar pérdidas de precisión por efectos de la discretización.

2.2 Matrices aproximadas obtenidas con la formulación de capas delgadas

La formulación de capas delgadas (*thin layer formulation*) propuesta por Kausel (1981) permite expresar las componentes de flexibilidad del perfil de suelo como una aproximación a través de parámetros modales de L modos que surgen de resolver un problema particular de autovalores descripto más adelante

$$\begin{aligned} F_{xx}^{ij} &= \sum_{l=1}^L \frac{\phi_{x,l}^i \phi_{x,l}^j}{(\kappa^2 - \kappa_{R,l}^2)} & F_{xz}^{ij} &= \sum_{l=1}^L \frac{\kappa}{\kappa_{R,l}} \frac{\phi_{x,l}^i \phi_{z,l}^j}{(\kappa^2 - \kappa_{R,l}^2)} \\ F_{xz}^{ij} &= \sum_{l=1}^L \frac{\kappa}{\kappa_{R,l}} \frac{\phi_{x,l}^i \phi_{z,l}^j}{(\kappa^2 - \kappa_{R,l}^2)} & F_{zz}^{ij} &= \sum_{l=1}^L \frac{\phi_{z,l}^i \phi_{z,l}^j}{(\kappa^2 - \kappa_{R,l}^2)} \end{aligned} \quad (19)$$

De esta forma, la transformación entre los dominios número de onda y espacial se realiza en forma analítica y exacta aunque arrastrando los errores involucrados en la aproximación de la flexibilidad. El desplazamiento vertical en la superficie U_z^1 en los dominios adimensionales número de onda κ y espacial ρ resulta

$$U_z^1(\kappa) = F_{zz}^{11}(\kappa) = \sum_{l=1}^L \frac{(\phi_{z,l}^1)^2}{(\kappa^2 - \kappa_{R,l}^2)} \quad \Leftrightarrow \quad U_z^1(\rho) = \frac{1}{4i} \sum_{l=1}^L (\phi_{z,l}^1)^2 H_0^{(2)}(\kappa_{R,l} \rho) \quad (20)$$

Los coeficientes de la matriz de rigidez de un estrato se transforman en la formulación de capas delgadas (FCD) de funciones trascendentales de k a polinomios cuadráticos en k que conservan adecuada precisión para espesores relativamente pequeños en relación a la longitud de onda de análisis λ . Por lo tanto, los estratos en algunos casos requieren ser subdivididos en substratos para satisfacer la siguiente condición que permite preservar la exactitud deseada

$$\left. \begin{aligned} h_{\max} &\leq \lambda / 20 \\ &\leq 1 / 20 \cdot V_s / f \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta_{\max} \leq \pi / 10 \quad (21)$$

La matriz de rigidez de un estrato adquiere la siguiente forma

$$K = \omega \rho V_s (\kappa^2 A + \kappa B + G - M) \quad (22)$$

donde

$$A = \frac{\eta}{6(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu) & 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ 0 & 2(1-2\nu) & 0 & (1-2\nu) \\ 2(1-\nu) & 0 & 4(1-\nu) & 0 \\ 0 & (1-2\nu) & 0 & 2(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$B = \frac{1}{2(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 0 & -(1-4\nu) & 0 & -1 \\ -(1-4\nu) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (1-4\nu) \\ -1 & 0 & (1-4\nu) & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$G = \frac{1}{\eta(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-2\nu) & 0 & -(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 & -2(1-\nu) \\ -(1-2\nu) & 0 & (1-2\nu) & 0 \\ 0 & -2(1-\nu) & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$M = \frac{\eta}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

El semiespacio en la formulación de capas delgadas se representa utilizando 8~10 estratos con espesor creciente en profundidad hasta alcanzar un espesor total de 1.5 veces la longitud de onda del modo fundamental de propagación donde ocurren los mayores desplazamientos. Este artificio reproduce con buena precisión el modo fundamental por lo que resulta adecuado para la construcción de la curva de dispersión analítica de la técnica SASW. Sin embargo, el artificio no sólo no reproduce los modos superiores de propagación sino que además genera la aparición de modos espúreos que distorsionan la respuesta en el dominio espacial. La **Figura 1** muestra los coeficientes de la diagonal principal de la flexibilidad del semiespacio en función del número de onda para las coordenadas horizontal x (izquierda) y vertical z (derecha).

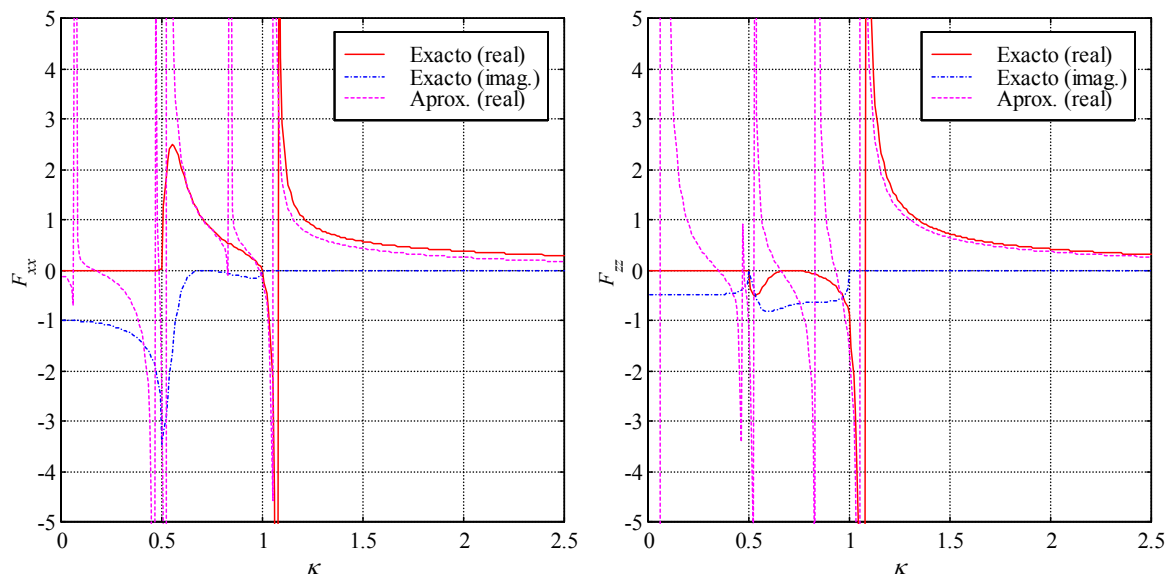


Figura 1. Flexibilidad aproximada del semiespacio homogéneo para FCD ($\nu = 1/3$).

Las matrices exactas de los estratos al igual que las matrices aproximadas de la FCD poseen coeficientes puramente reales. Sin embargo, la matriz exacta del semiespacio resulta compleja mientras que la aproximación propuesta para la FCD genera también coeficientes puramente reales. La FCD resulta satisfactoria para estratos de suelo apoyados sobre un semiespacio suficientemente rígido como para considerarlo indeformable, donde la interfaz del estrato más profundo toma la condición de borde rígido. Por otra parte, la estrategia propuesta posee una exactitud razonable para el modo fundamental de propagación de ondas de Rayleigh a pesar que se viola el espesor máximo recomendable de discretización.

La resolución del problema de autovalores del perfil completo en la FCD

$$(A\kappa_l^2 + B\kappa_l + C)\phi_l = 0 \quad \text{donde} \quad C = G - M \quad (27)$$

permite expresar la respuesta espacial como la superposición de modos de propagación en forma cerrada sin la aplicación explícita de la Transformada de Hankel. Una forma conveniente de resolver este problema de autovalores aprovechando ciertas características de las matrices de los estratos se consigue definiendo las siguientes matrices

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 \\ B_{zx} & A_{zz} \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C_{xx} & B_{xz} \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \quad (28)$$

cuya asimetría genera problemas de autovalores por derecha e izquierda

$$\begin{aligned} \bar{A}ZK_R^2 + \bar{C}Z &= 0 \\ \bar{A}^T Y K_R^2 + \bar{C}^T Y &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

donde

$$Y = \begin{bmatrix} \Phi_x K_R \\ \Phi_z \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z K_R \end{bmatrix} \quad (30)$$

Las formas modales se normalizan a los efectos de satisfacer las siguientes condiciones

$$Y^T \bar{A}Z = K_R \quad Y^T \bar{C}Z = -K_R^3 \quad (31)$$

Reemplazando (28) y (30) en (31), invirtiendo y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z K_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 \\ B_{zx} & A_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_R \Phi_x^T & \Phi_z^T \end{bmatrix}^{-1} &= K_R^{-1} \\ \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 \\ B_{zx} & A_{zz} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z K_R \end{bmatrix} K_R^{-1} \begin{bmatrix} K_R \Phi_x^T & \Phi_z^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{xx}^{-1} & 0 \\ -A_{zz}^{-1} B_{zx} A_{xx}^{-1} & A_{zz}^{-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_x \Phi_x^T & \Phi_x K_R^{-1} \Phi_z^T \\ \Phi_z K_R \Phi_x^T & \Phi_z \Phi_z^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z K_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{xx} & B_{xz} \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_R \Phi_x^T & \Phi_z^T \end{bmatrix}^{-1} &= -K_R^{-3} \\ \begin{bmatrix} C_{xx} & B_{xz} \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix}^{-1} &= - \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z K_R \end{bmatrix} K_R^{-3} \begin{bmatrix} K_R \Phi_x^T & \Phi_z^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_{xx}^{-1} & -C_{xx}^{-1} B_{xz} C_{zz}^{-1} \\ 0 & C_{zz}^{-1} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \Phi_x K_R^{-2} \Phi_x^T & \Phi_x K_R^{-3} \Phi_z^T \\ \Phi_z K_R^{-1} \Phi_x^T & \Phi_z K_R^{-2} \Phi_z^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

De las últimas expresiones de las ecuaciones (32) y (33) surge la restricción fundamental que deben satisfacer los parámetros modales durante la aproximación del semiespacio para mantener las características de las matrices de los estratos

$$\Phi_x K_R^{-1} \Phi_z^T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_z K_R^{-1} \Phi_x^T = 0 \quad (34)$$

2.3 Aproximación modal de la flexibilidad del semiespacio homogéneo

El ajuste de perfiles inversamente dispersivos con contribuciones importantes de modos superiores de propagación requiere una buena aproximación de la flexibilidad del semiespacio. El cociente de polinomios en ω se utiliza exhaustivamente en análisis modal experimental para la aproximación de flexibilidades dinámicas, y también se utiliza para reproducir soluciones analíticas complejas (Wolf, 1994, Ceballos y Prato, 2002, Ceballos, 2004).

La aproximación del semiespacio se efectúa sobre la matriz de flexibilidad “remanente” que surge de descontar de la flexibilidad exacta el modo fundamental de propagación dado en (15)

$$\tilde{F} = \bar{F} - \bar{F}_0 \quad (35)$$

Esta estrategia garantiza la inclusión exacta del modo fundamental a la vez que se obtienen amplitudes acotadas que evitan un mal condicionamiento de la aproximación. La flexibilidad remanente de acuerdo a (11) y (15) toma para $\kappa = 0$ la siguiente forma particular

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} \phi_{x,0}^2 / \kappa_{R,0}^2 - i & 0 \\ 0 & \phi_{z,0}^2 / \kappa_{R,0}^2 - i\alpha \end{bmatrix} \quad (36)$$

La aproximación de la matriz de flexibilidad remanente se realiza por medio de una fracción polinómica matricial (Juang, 1994) que produce el surgimiento de 10 modos

$$\tilde{F} = \text{inv}(I + \kappa^2 Q_2 + \kappa^4 Q_4 + \kappa^6 Q_6 + \kappa^8 Q_8 + \kappa^{10} I) (R_0 + \kappa^2 R_2 + \kappa^4 R_4 + \kappa^6 R_6 + \kappa^8 R_8) \quad (37)$$

donde la matriz R_0 se toma igual a la flexibilidad estática dada en (36). La selección de potencias pares de κ permite, por un lado, conciliar las matrices ajustadas del semiespacio con las matrices de los estratos de la FDC, y por otro lado, elegir la raíz estable de cada autovalor. Reacomodando

$$\begin{aligned} \kappa^2 R_2 + \kappa^4 R_4 + \kappa^6 R_6 + \kappa^8 R_8 - \kappa^2 \tilde{F} Q_2 - \kappa^4 \tilde{F} Q_4 - \kappa^6 \tilde{F} Q_6 - \kappa^8 \tilde{F} Q_8 &= \dots \\ &= \tilde{F} + \kappa^{10} \tilde{F} - R_0 = \tilde{P} \end{aligned} \quad (38)$$

considerando n puntos de ajuste en el intervalo $\kappa = [0 : 2.5]$ se obtiene

$$\hat{U} \hat{K} = \hat{P} \quad \Rightarrow \quad \hat{U} = \hat{P} \hat{K}^\dagger \quad (39)$$

donde † indica pseudo-inversa (ajuste por mínimos cuadrados) mientras

$$\hat{U} = [R_2 \quad R_4 \quad R_6 \quad R_8 \quad Q_2 \quad Q_4 \quad Q_6 \quad Q_8] \quad (40)$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \kappa_1^2 I & \kappa_2^2 I & \dots & \kappa_n^2 I \\ \kappa_1^4 I & \kappa_2^4 I & \dots & \kappa_n^4 I \\ \kappa_1^6 I & \kappa_2^6 I & \dots & \kappa_n^6 I \\ \kappa_1^8 I & \kappa_2^8 I & \dots & \kappa_n^8 I \\ -\kappa_1^2 \tilde{F}_1 & -\kappa_2^2 \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_n^2 \tilde{F}_n \\ -\kappa_1^4 \tilde{F}_1 & -\kappa_2^4 \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_n^4 \tilde{F}_n \\ -\kappa_1^6 \tilde{F}_1 & -\kappa_2^6 \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_n^6 \tilde{F}_n \\ -\kappa_1^8 \tilde{F}_1 & -\kappa_2^8 \tilde{F}_2 & \dots & -\kappa_n^8 \tilde{F}_n \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\hat{P} = [\tilde{P}_1 \quad \tilde{P}_2 \quad \dots \quad \tilde{P}_n] \quad (42)$$

Una forma matricial equivalente a la fracción polinómica matricial en (37) resulta

$$\tilde{F} = \hat{C}(\kappa^2 I - \hat{A})^{-1} \hat{B} \quad \hat{C} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I]$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_6 \\ R_8 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ I & 0 & 0 & 0 & -Q_2 \\ 0 & I & 0 & 0 & -Q_4 \\ 0 & 0 & I & 0 & -Q_6 \\ 0 & 0 & 0 & I & -Q_8 \end{bmatrix} \quad (43)$$

La matriz de flexibilidad aproximada no resulta necesariamente simétrica. El proceso de simetrización propuesto requiere la resolución del siguiente problema de autovalores

$$\hat{A} \Upsilon = \Upsilon K_R^2 \quad (44)$$

que permite una descomposición modal de la forma matricial asociada

$$\tilde{F} = \Phi_L (\kappa^2 I - K_R^2)^{-1} \Phi_R \quad (45)$$

donde

$$K_R^2 = \Upsilon^{-1} \hat{A} \Upsilon \quad \Phi_R = \Upsilon^{-1} \hat{B} \quad \Phi_L = \hat{C} \Upsilon \quad (46)$$

El objetivo es transformar las matrices modales por izquierda Φ_L y por derecha Φ_R de modo tal que una matriz sea la transpuesta de la otra

$$\Phi_L = \Phi \quad \leftrightarrow \quad \Phi_R = \Phi^T \quad (47)$$

La definición de la siguiente matriz simétrica H para cada modo l permite alcanzar este objetivo sacrificando un mínimo de la precisión obtenida con la fracción polinómica matricial

$$H_l = 0.5 \cdot (\phi_{L,l} \phi_{R,l} + \phi_{R,l}^T \phi_{L,l}^T) \quad (48)$$

La matriz H_l debería ser singular si ambas formas modales tuvieran la misma relación entre componentes. Por lo tanto, la descomposición de valores singulares (svd) de H_l y la utilización del primer valor singular permiten obtener una forma modal simetrizada para el modo l con una distorsión mínima

$$[U_l, S_l, V_l] = \text{svd}(H_l) \quad \rightarrow \quad \tilde{H}_l = U_{1,l} S_{1,l} V_{1,l}^T \quad \rightarrow \quad \phi_l = \text{diag}(\tilde{H}_l)^{1/2} \quad (49)$$

Las componentes de las formas modales no pueden tomar valores arbitrarios a los efectos de preservar la estructura especial que poseen las matrices de los estratos de la FCD. El proceso de optimización debe imponer la restricción fundamental (34) a las formas modales para mantener dicha estructura que permite pasar del dominio k al dominio ρ en forma analítica

$$\Phi_x K_R^{-1} \Phi_z^T = -\phi_{x,0} \phi_{z,0} / \kappa_{R,0} \quad (50)$$

donde se despeja la contribución del modo fundamental. Por otra parte, las formas modales son forzadas a satisfacer durante el ajuste fino las condiciones de flexibilidad estática en (36)

$$\Phi_x K_R^{-2} \Phi_x^T = -\phi_{x,0}^2 / \kappa_{R,0}^2 + i \quad (51)$$

$$\Phi_z K_R^{-2} \Phi_z^T = -\phi_{z,0}^2 / \kappa_{R,0}^2 + i\alpha \quad (52)$$

La matriz diagonal Z obtenida con el criterio de mínimos cuadrados permite imponer las restricciones (50) a (52) con una pérdida mínima de precisión

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_x \\ \tilde{\Phi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z \end{bmatrix} (I + Z)^{1/2} \quad (53)$$

donde

$$Z = \text{diag}([z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_{10}]) \quad (54)$$

Reemplazando (53) en (50) a (52) se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi_x K_R^{-1} Z \Phi_z^T &= -\phi_{x,0} \phi_{z,0} / \kappa_{R,0} - \Phi_x K_R^{-1} \Phi_z^T = P_1 \\ \Phi_x K_R^{-2} Z \Phi_x^T &= -\phi_{x,0}^2 / \kappa_{R,0}^2 + i - \Phi_x K_R^{-2} \Phi_x^T = P_2 \\ \Phi_z K_R^{-2} Z \Phi_z^T &= -\phi_{z,0}^2 / \kappa_{R,0}^2 + i\alpha - \Phi_z K_R^{-2} \Phi_z^T = P_3 \end{aligned} \quad (55)$$

Los coeficientes de la matriz diagonal Z reacomodados como vector se calculan como

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{x,1} \phi_{z,1} / \kappa_{R,1} & \phi_{x,2} \phi_{z,2} / \kappa_{R,2} & \dots & \phi_{x,10} \phi_{z,10} / \kappa_{R,10} \\ \phi_{x,1}^2 / \kappa_{R,1}^2 & \phi_{x,2}^2 / \kappa_{R,2}^2 & \dots & \phi_{x,10}^2 / \kappa_{R,10}^2 \\ \phi_{z,1}^2 / \kappa_{R,1}^2 & \phi_{z,2}^2 / \kappa_{R,2}^2 & \dots & \phi_{z,10}^2 / \kappa_{R,10}^2 \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (56)$$

El proceso iterativo de ajuste fino de los 10 modos involucra 6 factores de corrección por cada modo l (partes real e imaginaria del autovalor $\kappa_{R,l}$ y las componentes modales $\phi_{x,l}$ y $\phi_{z,l}$) sumando un total de 60 parámetros de ajuste. La corrección de las componentes de la matriz de flexibilidad remanente del semiespacio se plantea a través de los siguientes p -valores

$$\tilde{F}_{xx}^{corr} = \sum_{l=1}^{10} \frac{((\phi_{x,l}^{\Re} + p_{x,l}^{\Re}) + i(\phi_{x,l}^{\Im} + p_{x,l}^{\Im}))^2}{\kappa^2 - (\kappa_{R,l}^{\Re}(1 + p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_{R,l}^{\Im}(1 + p_{\kappa,l}^{\Im}))^2} \quad (57)$$

$$\tilde{F}_{zz}^{corr} = \sum_{l=1}^{10} \frac{((\phi_{z,l}^{\Re} + p_{z,l}^{\Re}) + i(\phi_{z,l}^{\Im} + p_{z,l}^{\Im}))^2}{\kappa^2 - (\kappa_{R,l}^{\Re}(1 + p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_{R,l}^{\Im}(1 + p_{\kappa,l}^{\Im}))^2} \quad (58)$$

$$\tilde{F}_{xz}^{corr} = \sum_{l=1}^{10} \frac{\kappa((\phi_{x,l}^{\Re} + p_{x,l}^{\Re}) + i(\phi_{x,l}^{\Im} + p_{x,l}^{\Im}))((\phi_{z,l}^{\Re} + p_{z,l}^{\Re}) + i(\phi_{z,l}^{\Im} + p_{z,l}^{\Im}))}{(\kappa_{R,l}^{\Re}(1 + p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_{R,l}^{\Im}(1 + p_{\kappa,l}^{\Im}))[\kappa^2 - (\kappa_{R,l}^{\Re}(1 + p_{\kappa,l}^{\Re}) + i\kappa_{R,l}^{\Im}(1 + p_{\kappa,l}^{\Im}))^2]} \quad (59)$$

Los p -valores de las partes real e imaginaria de los autovalores generan cambios relativos que impiden los cambios de signo por estar acotados a $\pm 1\%$. Los parámetros de ajuste de las componentes modales representan cambios absolutos que permiten cambios de signo aunque se encuentran también acotados a $\pm 1\%$ a los efectos de mantener la validez de la linealización de la matriz de sensibilidad. El sistema de ecuaciones de ajuste de los parámetros modales se obtiene separando parte real e imaginaria de cada una de estas ecuaciones que se plantean para diferentes valores del número de onda κ

$$\tilde{F}_{xx}^{corr} \approx \tilde{F}_{xx} + \sum_{l=1}^{10} \left(\frac{\partial \tilde{F}_{xx}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Re}} p_{\kappa,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xx}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Im}} p_{\kappa,l}^{\Im} + \frac{\partial \tilde{F}_{xx}}{\partial p_{x,l}^{\Re}} p_{x,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xx}}{\partial p_{x,l}^{\Im}} p_{x,l}^{\Im} \right) \quad (60)$$

$$\tilde{F}_{zz}^{corr} \approx \tilde{F}_{zz} + \sum_{l=1}^{10} \left(\frac{\partial \tilde{F}_{zz}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Re}} p_{\kappa,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{zz}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Im}} p_{\kappa,l}^{\Im} + \frac{\partial \tilde{F}_{zz}}{\partial p_{z,l}^{\Re}} p_{z,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{zz}}{\partial p_{z,l}^{\Im}} p_{z,l}^{\Im} \right) \quad (61)$$

$$\tilde{F}_{xz}^{corr} \approx \tilde{F}_{xz} + \sum_{l=1}^{10} \left(\frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Re}} p_{\kappa,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{\kappa,l}^{\Im}} p_{\kappa,l}^{\Im} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{x,l}^{\Re}} p_{x,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{x,l}^{\Im}} p_{x,l}^{\Im} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{z,l}^{\Re}} p_{z,l}^{\Re} + \frac{\partial \tilde{F}_{xz}}{\partial p_{z,l}^{\Im}} p_{z,l}^{\Im} \right) \quad (62)$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve con la función CONLS (*constrained linear least-squares*) de MATLAB que permite implementar las restricciones (50) a (52) y limitar la tasa de cambio de los p -valores en $\pm 1\%$.

Una vez que se logra la convergencia de los parámetros modales de ajuste, se agrega a la base modal del semiespacio el modo fundamental de propagación (puramente real) con el que se totalizan 11 modos. La estrategia usada para definir una matriz cuadrada de formas modales Ψ agregando componentes modales generalizadas sigue satisfaciendo la restricción fundamental

$$\Psi_x K_R^{-1} \Psi_z^T = 0 \quad (63)$$

donde

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_x \\ \Psi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{x,0} & \phi_{x,1} & \phi_{x,2} & \phi_{x,3} & \phi_{x,4} & \phi_{x,5} & \phi_{x,6} & \phi_{x,7} & \phi_{x,8} & \phi_{x,9} & \phi_{x,10} \\ 1 & 0 & \Theta_{x,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Theta_{x,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{x,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{x,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{x,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \phi_{z,0} & \phi_{z,1} & \phi_{z,2} & \phi_{z,3} & \phi_{z,4} & \phi_{z,5} & \phi_{z,6} & \phi_{z,7} & \phi_{z,8} & \phi_{z,9} & \phi_{z,10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{z,7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{z,8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{z,9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{z,10} \end{bmatrix} \quad (64)$$

Las componentes agregadas satisfacen automáticamente (63) restando sólo determinar las constantes $\Theta_{x,l}$ y $\Theta_{z,l}$ que permitan satisfacer la restricción fundamental relacionada con las componentes físicas de la matriz modal

$$\Theta_{x,a} = -\frac{\kappa_{R,a} \phi_{z,0}}{\kappa_{R,0} \phi_{z,a}} \quad a = 2 \dots 6$$

$$\Theta_{z,b} = -\frac{\kappa_{R,b} \phi_{x,1}}{\kappa_{R,1} \phi_{x,b}} \quad b = 7 \dots 10 \quad (65)$$

Definiendo las siguientes matrices de formas modales por izquierda y derecha

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \Psi_x K_R \\ \Psi_z \end{bmatrix} \quad \tilde{Z} = \begin{bmatrix} \Psi_x \\ \Psi_z K_R \end{bmatrix} \quad (66)$$

y utilizando la ecuación (31) se obtienen las siguientes matrices físicas del semiespacio

$$\tilde{A} = \tilde{Y}^{-T} K_R \tilde{Z}^{-1} \quad \tilde{C} = -\tilde{Y}^{-T} K_R^3 \tilde{Z}^{-1} \quad (67)$$

que poseen la forma indicada en la ecuación (28) por cumplirse la restricción fundamental

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{xx} & 0 \\ \tilde{B}_{zx} & \tilde{A}_{zz} \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{xx} & \tilde{B}_{xz} \\ 0 & \tilde{C}_{zz} \end{bmatrix} \quad (68)$$

La aplicación del procedimiento de optimización descrito ha permitido la obtención de matrices discretas que reproducen con buena precisión las curvas de flexibilidad dinámica del semiespacio tal como se aprecia en la Figura 2.

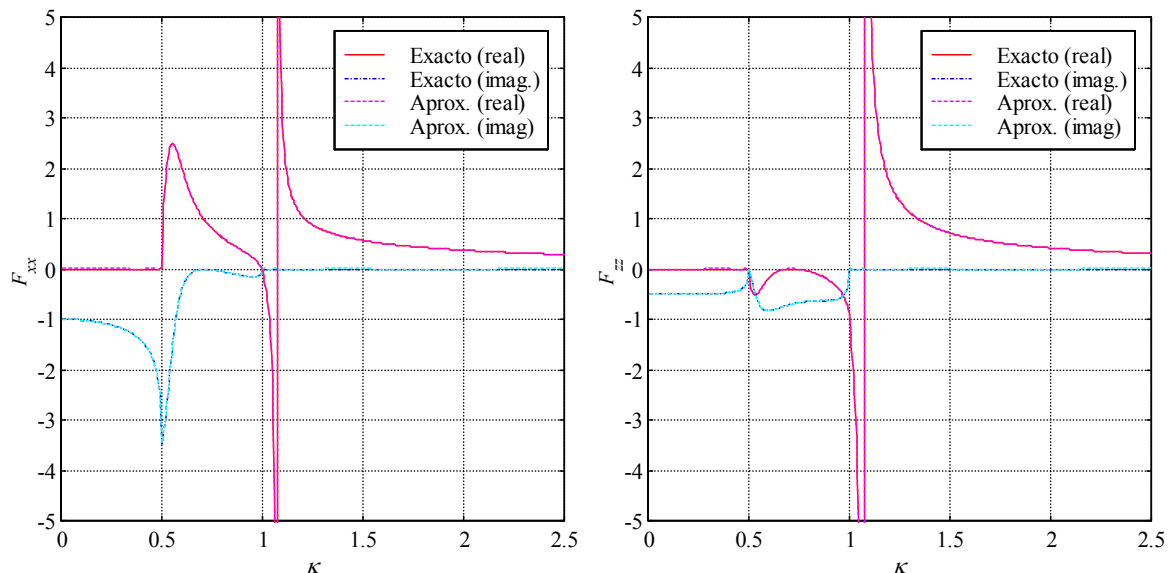


Figura 2. Flexibilidad aproximada del semiespacio homogéneo con ajuste modal ($\nu = 1/3$).

Una cantidad de amortiguamiento material histerético β puede agregarse fácilmente sobre los autovalores de la matriz de rigidez del perfil completo

$$K_R^* = K_R / (1 + i\beta) \quad (69)$$

El agregado de amortiguamiento a las componentes modales permite además mantener la flexibilidad estática sin dejar de satisfacer la restricción fundamental

$$\Phi^* = \Phi / (1 + i\beta) \quad (70)$$

3 DISPERSION DE FASE ESPACIAL DE ONDAS SUPERFICIALES

El ajuste de las velocidades de ondas de corte de los distintos estratos se realiza en base a la minimización de la diferencia entre las versiones analítica y experimental de la dispersión de fase espacial (Ceballos y Prato, 2008). La forma de esta función depende de la configuración y el número de transductores utilizados. La dispersión de fase espacial se calcula en base a la fase espacial relativa entre transductores como se explica a continuación:

1. La fase de la respuesta espacial para cada período excitatriz i de cada transductor m se “sincroniza” para cada velocidad de propagación j en función de la distancia ρ_m al punto de impacto dividiendo la respuesta espectral U_{im} por la función de Hankel $H_0^{(2)}$

$$\bar{U}_{ijm} = \frac{U_{im}}{H_0^{(2)}(\omega_i/V_j \cdot \rho_m)} \quad (71)$$

2. La fase espacial relativa para cada período excitatriz i y cada velocidad de propagación j de cada transductor m es igual al ángulo de cada una de estas amplitudes complejas

$$\varphi_{ijm} = \text{angle}(\bar{U}_{ijm}) \quad (72)$$

3. La dispersión de fase espacial de la frecuencia i y la velocidad j se evalúa relacionando la fase espacial relativa de transductores genéricos m y n de la siguiente forma

$$\Gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=m+1}^M \frac{(\sin \varphi_{ijm} - \sin \varphi_{ijn})^2 + (\cos \varphi_{ijm} - \cos \varphi_{ijn})^2}{M^2} \quad n > m \quad (73)$$

ó en función de las amplitudes espectrales transformadas a amplitudes espaciales

$$\Gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=m+1}^M \frac{1}{M^2} \left[\frac{\bar{U}_{ijm}}{|\bar{U}_{ijm}|} - \frac{\bar{U}_{ijn}}{|\bar{U}_{ijn}|} \right] \left[\frac{\bar{U}_{ijm}^*}{|\bar{U}_{ijm}|} - \frac{\bar{U}_{ijn}^*}{|\bar{U}_{ijn}|} \right] \quad (74)$$

$$\Gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=m+1}^M \frac{1}{M^2} \left[2 - \frac{\bar{U}_{ijm} \bar{U}_{ijn}^* + \bar{U}_{ijn} \bar{U}_{ijm}^*}{\sqrt{|\bar{U}_{ijm}| |\bar{U}_{ijn}| |\bar{U}_{ijn}| |\bar{U}_{ijm}|}} \right] \quad (75)$$

En la fase experimental se utiliza una expresión en función de densidades espectrales cruzadas que permite promediar registros de distintas pruebas y reducir la influencia de ruidos experimentales

$$\Gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=m+1}^M \frac{1}{M^2} \left[2 - \frac{S_{ijmn} + S_{ijnm}}{\sqrt{S_{ijmn} S_{ijnm}}} \right] \quad (76)$$

4 CASOS ESTUDIADOS

La forma que toma la dispersión de fase espacial se muestra a través de 3 perfiles descriptos en la [Tabla 1](#). El coeficiente de Poisson adoptado en todos los casos es $\nu = 1/3$. La dispersión de fase espacial se representa a través de curvas de nivel en función del período excitatriz T y la velocidad de propagación V . La [Figura 3](#) a [Figura 5](#) muestran la dispersión de fase espacial obtenida utilizando 6 transductores con separaciones de 2 m y 6 m para los casos analizados; las distancias totales cubiertas por los transductores son 12 m y 36 m. Las figuras muestran la dependencia de la velocidad de propagación dominante (línea continua gruesa negra) con la separación de los transductores. La zona sobre la línea de trazos (roja) representa longitudes de onda mayores a la distancia entre el impacto y el último transductor. La zona por debajo de la línea de trazos y puntos (azul) representa longitudes de onda con un muestreo deficiente que pueden resultar afectadas por el fenómeno de *aliasing* (pueden observarse las bandas de dispersión de fase espacial mínima no vinculadas a velocidades de propagación dominantes). La zona de valores recomendados para el ajuste se encuentra

comprendida entre ambas líneas descriptas. La posición de estas líneas delimitantes depende del número y la separación de los transductores de acuerdo a las siguientes expresiones

$$\left. \begin{aligned} V_{MAX} &= Ms/T && \text{línea de trazos roja (longitud de onda completa)} \\ V_{MIN} &= 2s/T && \text{línea de trazos y puntos azul (aliasing)} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Estrato	Espesor [m]	Caso A		Caso B		Caso C	
		δ [tn/m ³]	V_s [m/s]	δ [tn/m ³]	V_s [m/s]	δ [tn/m ³]	V_s [m/s]
1	4	1.60	200	1.60	200	2.20	600
2	4	1.80	300	2.10	500	1.80	300
Semiesp.	∞	2.00	400	2.00	400	2.00	400

Tabla 1. Casos de estudio de la dispersión de fase espacial.

Las líneas punteadas (verdes) representan velocidades asociadas a los distintos modos de propagación en función del período excitatriz, siendo el modo fundamental aquel con menores velocidades de propagación.

El caso A representa un perfil de suelo normalmente dispersivo donde las velocidades de propagación dominantes se encuentran íntimamente ligadas al modo fundamental (Figura 3). El caso B consiste en un perfil con un estrato duro atrapado entre un semiespacio y un estrato superior más blandos. Las velocidades dominantes para períodos bajos (Figura 4 izquierda: frecuencias altas y longitudes de ondas cortas) se relacionan con el modo fundamental. Sin embargo, a medida que aumenta el período excitatriz (Figura 4 derecha) las velocidades dominantes comienzan a resultar dominadas por modos superiores con valores más acordes a la velocidad del estrato medio más duro. El caso C representa un perfil tipo pavimentado con un estrato superior más duro. Las velocidades dominantes para períodos bajos (Figura 5 izquierda) se asocian a modos superiores. Sin embargo, a medida que aumenta el período excitatriz (Figura 5 derecha) empiezan a dominar las longitudes de onda largas reduciéndose la influencia del estrato superior duro y apareciendo en forma más notoria el modo fundamental.

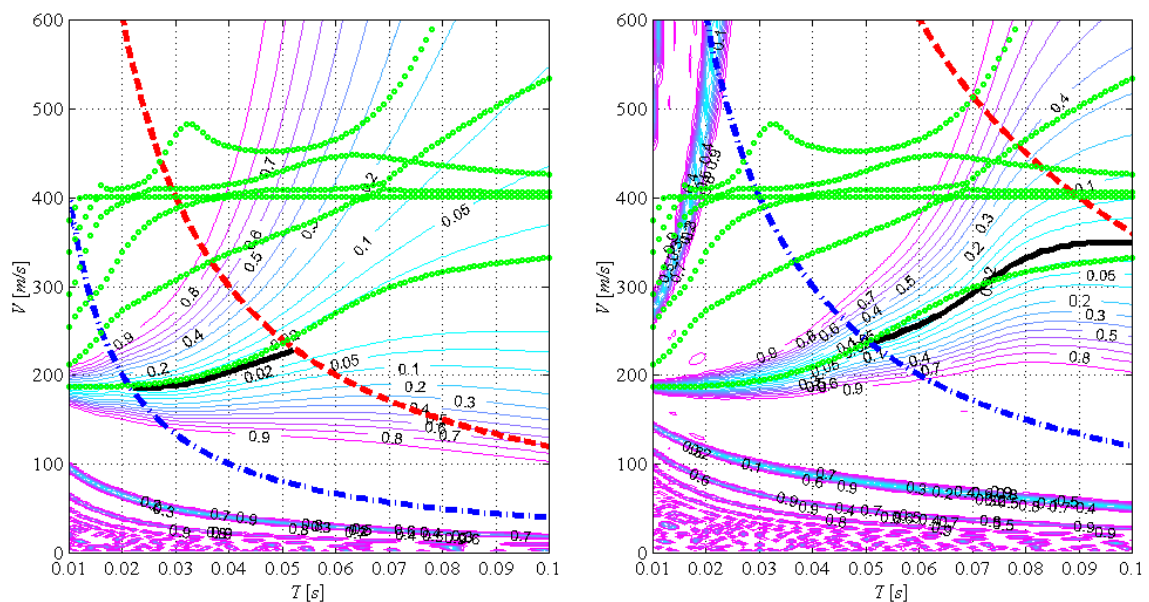


Figura 3. Caso A: dispersión de fase espacial con 6 transductores separados 2 m (izq.) y 6 m (der.).

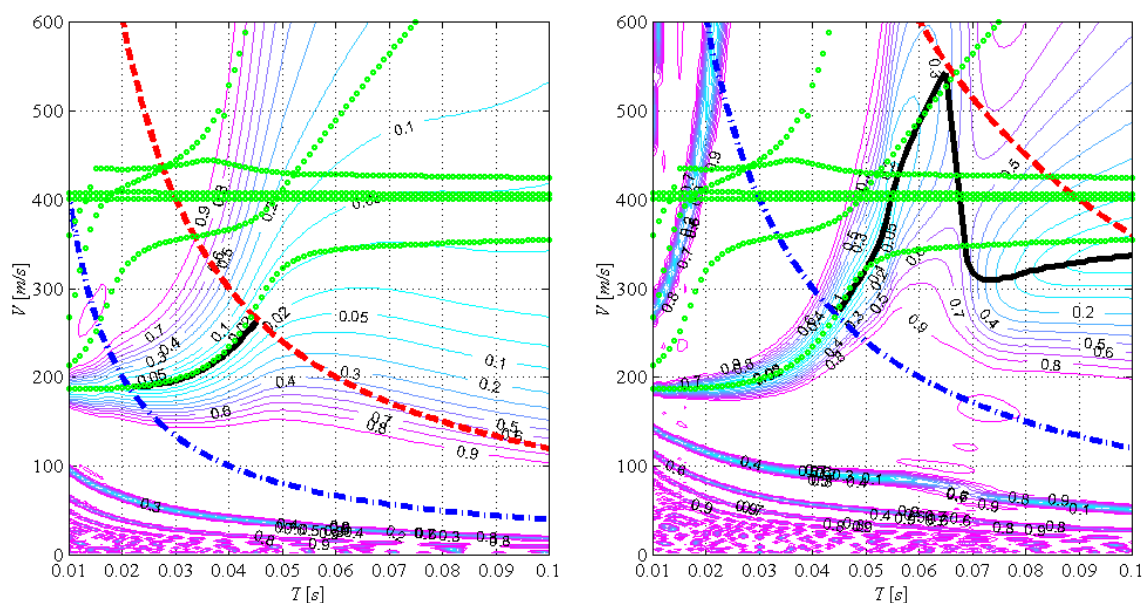


Figura 4. Caso B: dispersión de fase espacial con 6 transductores separados 2 m (izq.) y 6 m (der.).

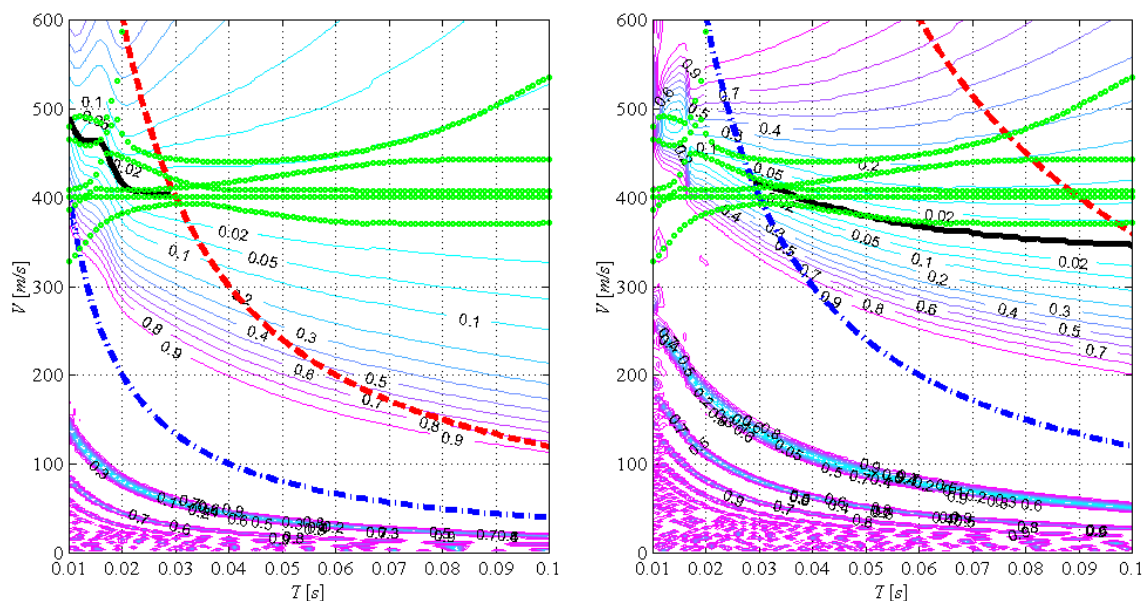


Figura 5. Caso C: dispersión de fase espacial con 6 transductores separados 2 m (izq.) y 6 m (der.).

5 CONCLUSIONES

La aproximación de la matriz de flexibilidad exacta de un semiespacio homogéneo a través de técnicas de análisis modal ha permitido la obtención de un modelo que reproduce en forma exacta el modo fundamental de propagación y puede acoplarse a las matrices de los estratos de la tradicional formulación de capas delgadas. El modelo es también exacto para $\kappa = 0$ y posee las mismas características especiales de las matrices de los estratos. Esto permite determinar la respuesta en el dominio espacial en forma analítica, en función de los parámetros modales del perfil completo de suelo, sin la aplicación explícita de la transformada de Hankel que involucra un alto costo computacional. Los parámetros modales obtenidos resolviendo un problema de autovalores en κ^2 permiten garantizar la estabilidad del

sistema al poderse seleccionar la raíz estable de los autovalores (parte imaginaria negativa).

El análisis modal de la dispersión de fase espacial, utilizada como función objetivo para el ajuste del perfil de suelo, permite demostrar la capacidad de este parámetro para identificar las velocidades de propagación dominantes independientemente del tipo de perfil analizado. La tendencia actual consiste en utilizar múltiples transductores para la identificación de diferentes patrones de propagación. Una ventaja importante de esta función objetivo es que sólo depende de las fases de la respuesta resultando un parámetro adimensional independiente de la amplitud del impulso aplicado sobre la superficie del terreno.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el CONICET y la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba.

REFERENCIAS

- Ceballos, M. A., and Prato, C. A., Modal Description of Foundation Dynamics, *XX International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, CA, U.S.A., 2002.
- Ceballos, M. A., *Análisis Modal Experimental Aplicado a la Calibración de Modelos de Sistemas con Interacción Suelo-Estructura*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 2004.
- Ceballos, M. A., y Prato, C. A., *Ajuste Experimental de Perfiles de Suelo a través del Análisis de Fases Espaciales de Ondas Superficiales*, XVII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus aplicaciones (ENIEF 2008), Universidad Nacional de San Luis, Argentina, 10-13 Noviembre de 2008.
- Juang, J.- N., *Applied System Identification*, PTR Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U.S.A., 1994.
- Kausel, E., An Explicit Solution for the Green Functions for Dynamic Loads in Layered Media, *MIT Research Report R81-13*, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge, U.S.A., 1981.
- Kausel, E., and Roesset, J. M., Stiffness Matrices for Layered Soils, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 71, No. 6, pp. 1743-1761, 1981.
- Lamb, H., On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A203, pp. 1-42, 1904.
- Wolf, J. P., *Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models*, PTR Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U.S.A., 1994.