

## UTILIZACION DE RBFS PARA LA INTERPOLACION DE DATOS BATIMETRICOS

Nahuel Domingo Caruso<sup>a</sup>, Ma. Cristina Sanziel<sup>b</sup>, Margarita Portapila<sup>a</sup> and Henry Power<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Centro Universitario de Rosario de Investigación Hidro-ambiental, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Pellegrini 250, Rosario, Argentina, ncaruso@fceia.unr.edu.ar, margap@fceia.unr.edu.ar*

<sup>b</sup>*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Consejo de Investigaciones, Universidad Nacional de Rosario, sanziel@fceia.unr.edu.ar*

<sup>c</sup>*School of Mechanical, Materials, Manufacturing Engineering and Management, The University of Nottingham, University Park, Nottingham, NG7 2RD, United Kingdom henry.power@nottingham.ac.uk*

**Keywords:** interpolación, RBF's, colocación hermitiana.

**Abstract.** Como es sabido los datos batimétricos que resultan de procesos de medición se presentan en forma dispersa. Para la implementación de un método numérico es necesario disponer de valores batimétricos en puntos que determinará la discretización adoptada del dominio a estudiar, los que en general, difieren de los datos medidos.

En este trabajo se propone un método de interpolación multivariable con Funciones de Base Radial (RBF), considerando diferentes formas de colocación (no- Hermitianas y Hermitianas). En el presente trabajo se construyen las funciones interpolantes, como combinaciones lineales de distintos tipos de RBFs. Se estudia la exactitud del método comparando resultados para las diferentes RBFs y los distintos tipos de colocación. Finalmente se comparan los resultados obtenidos a través del método propuesto con interpolaciones espaciales resultantes de aplicar los métodos de Kriging y Shepard. Para poder hacer un análisis de error se propone una función de prueba que se define en función de las magnitudes batimétricas reales del estuario del Río de la Plata.

## 1 INTRODUCCION

Los datos batimétricos se presentan en forma dispersa como resultado de campañas de mediciones que se realizan para distintos períodos de tiempo. Usualmente para la implementación de un método numérico, es necesario disponer de valores en puntos que determinará la discretización adoptada del dominio a estudiar, los que en general difieren de los datos medidos. Las formas más usuales de obtener estos datos son a través de interpolación con funciones cuadráticas o adoptando los valores del punto más cercano. Por otro lado para variables hidrológicas es usual interpolar usando métodos como el de Krigging y el de Cubic Shepard Interpolation.

Siguiendo la idea de esquemas de aproximación de datos dispersos para aplicaciones a dinámica de fluidos propuestos por Kansa ([Kansa \(1990\)](#)), en este trabajo se propone la utilización de un método de interpolación multivariable utilizando funciones de base radial y considerando distintos tipos de colocaciones, tanto no hermitianas como hermitianas. Estas mismas RBF han sido utilizadas para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales ([Rocca et al. \(2005\)](#), [Kansa and Hon \(2000\)](#), [Power and Barraco \(2002\)](#), [Franke and Schaback \(1998\)](#), [Rocca and Power \(2006\)](#))).

En la sección 2 se describen las RBFs y las técnicas de colocación hermitianas y no hermitianas. En la sección 3 se construye una función “suave” la cual permitirá definir las funciones interpolantes a través de sus valores y los de sus derivadas, como así también calcular los errores. Además se construyen tres tipos de funciones interpolantes, una no hermitiana y dos hermitianas.

En la sección 4 se exhiben los resultados numéricos. En la sección 5 se hace un breve resumen de las conclusiones.

## 2 INTERPOLACION CON FUNCIONES DE BASE RADIAL

Dado un conjunto de datos dispersos:

$$\{(x_i, z_i) : 1 \leq i \leq N\}$$

con  $x_i \in \mathfrak{R}^n$  y  $z_i \in \mathfrak{R}$ , se quiere encontrar una función  $f$  tal que sea la única dentro de un espacio de funciones anteriormente propuesto, que verifique que:

$$f(x_i) = z_i \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Es sabido que para el caso  $n = 1$ , dado un conjunto de  $N$  datos, proponiendo el espacio  $\Pi_{N-1}(\mathfrak{R})$  (polinomios en una variable real de grado no mayor a  $N - 1$ ) existe un único polinomio que verifica las  $N$  condiciones. O más generalmente, si un *Espacio de Haar*  $H \subseteq C(\mathfrak{R})$  de dimensión  $N$  es fijado, entonces siempre es posible encontrar una interpolante en  $H$  que verifique (1). Desafortunadamente si se trabaja con  $n \geq 2$  no es posible encontrar tal espacio de Haar ([Mairhuber \(1956\)](#)). Se remarca que  $H$  depende solamente de  $N$  (la cantidad de datos) ([Wendland \(2005\)](#)).

Por este motivo es que, para interpolar datos dispersos, en este trabajo, se utilizarán conjuntos de funciones que, además de la cantidad de datos, tengan en cuenta la ubicación de los puntos donde están dados los datos. Se interpolará entonces con “funciones de base radial” (Radial Basis Function, RBF) ([Buhmann \(2003\)](#))

Una RBF es una función de la forma

$$x \in \mathfrak{R}^n \longrightarrow \Phi(x) = \phi(\|x\|)$$

donde  $\phi : \mathfrak{R}_0^+ \rightarrow \mathfrak{R}$  y  $\|\cdot\|$  indica la norma euclídea.

Las más conocidas RBF son las que se mencionan en la Tabla 1

Table 1: RBFs más populares

|                             |                           |
|-----------------------------|---------------------------|
| $e^{-\frac{r^2}{c}}$        | gaussiana                 |
| $(r^2 + c^2)^{\frac{m}{2}}$ | multiquadric general      |
| $r^{2m-2} \log(r)$          | thin-plate spline general |
| $r^m$                       | polinómica                |

donde  $m$  es un entero no nulo ( $m$  impar en el caso de las multiquadrics y las polinómicas) y  $r = \|x\|$ . Cabe señalar que las RBFs de tipo gaussianas y las multiquádricas inversas (i.e. cuando  $m < 0$ ) son *definidas positivas*, mientras que las thin-plate spline, las polinómicas y las multiquádricas ( $m > 0$ ) son *condicionalmente definidas positivas de orden  $m$*  (Schaback (1995)).

Para hallar la función interpolante de los  $N$  datos dispersos

$$\{(x_i, z_i) : 1 \leq i \leq N\}$$

construida con funciones RBF, se supondrá que  $z_i = F(x_i)$ , es decir que son los valores de una cierta función  $F$ .

Para el caso de las RBFs *definidas positivas* se propone una interpolación de la forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (2)$$

donde los  $\alpha_i$  son coeficientes a determinar, con las condiciones dadas por (1). Se obtiene así un sistema  $A\alpha = b$ , para el cual  $A = (\phi(\|x_j - x_i\|))_{1 \leq j, i \leq N}$ ,  $\alpha = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq N}$  y  $b = (z_j)_{1 \leq j \leq N}$ . Este sistema tiene única solución (Micchelli (1986)).

Mientras que para las RBFs *condicionalmente definidas positivas de orden  $m$* , se propone una interpolante:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(\|x - x_i\|) + \sum_{k=1}^q \beta_k p_k(x) \quad (3)$$

donde los  $\alpha_i$  y los  $\beta_k$  son coeficientes a determinar, y  $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$  es una base de  $\Pi_{m-1}(\mathfrak{R}^n)$  (Madych and Nelson (1990)). Se agregan además condiciones de contracción:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(x_j) = 0 \quad 1 \leq k \leq q, \quad (4)$$

de las (1) y (4) se llega a un sistema  $A\tilde{\alpha} = \tilde{b}$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} \Phi & P \\ P^t & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned}\Phi_{i,j} &= \phi(\|x_i - x_j\|) & i, j &= 1, \dots, N \\ P_{i,j} &= p_j(x_i) & i &= 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, q\end{aligned}$$

En el trabajo (Micchelli (1986)) se demuestra la existencia de la interpolante, en tanto que en (Madych and Nelson (1990)) se muestran cotas para el error de interpolación.

Para el caso en que además de las condiciones (1) se dispone también de los datos:

$$L^{\gamma_i} F(y_i) = z_{\gamma_i} \quad i = 1, \dots, M \quad (5)$$

donde los  $L^{\gamma_i}$  son combinaciones lineales de derivadas de  $F$  de a lo sumo orden  $\tilde{m}$  evaluadas en un conjunto de puntos  $y_i$  contenido en  $\mathfrak{R}^n$ , se propone como función interpolante para el caso de las RBF definidas positivas:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(\|x - x_i\|) + \sum_{i=1}^M \alpha_{N+i} \tilde{L}^{\gamma_i} \phi(\|x - y_i\|) \quad (6)$$

y para el caso de las RBF condicionalmente definidas positivas

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(\|x - x_i\|) + \sum_{i=1}^M \alpha_{N+i} \tilde{L}^{\gamma_i} \phi(\|x - y_i\|) + \sum_{k=1}^q \beta_k p_k(x) \quad (7)$$

donde  $\phi$  y  $\alpha_i$ , son como los definidos anteriormente y los operadores  $\tilde{L}^{\gamma_i}$  actúan sobre el centro  $y_i$ . Además para el caso de las RBF condicionalmente definidas positivas debe ser  $\tilde{m} \leq m$ . Este tipo de interpolante, donde se consideran también las derivadas de la función, se denomina colocación **hermitiana** (Ling et al. (2006)). En contraposición con este esquema se denomina **no hermitiana** a la interpolación que sólo utiliza los valores de la función.

Imponiendo (1), (5) y además las condiciones adicionales para el caso de las condicionalmente definidas positivas:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(x_j) + \sum_{j=1}^M \alpha_{N+j} L^{\gamma_j} p_k(y_j) = 0 \quad k = 1, \dots, q \quad (8)$$

se obtiene un sistemas  $A\tilde{\alpha} = \tilde{b}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} \Phi & L^{\gamma} \Phi & P \\ (L^{\gamma} \Phi)^t & L^{\gamma} \tilde{L}^{\gamma} \Phi & L^{\gamma} P \\ P^t & (L^{\gamma} P)^t & o \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ l^{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Phi$  y  $P$  como antes y

$$\begin{aligned}L^{\tilde{\gamma}} \Phi_{i,j} &= L^{\gamma_i} \phi(\|x_i - y_j\|) & i &= 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, M \\ L^{\tilde{\gamma}} \tilde{L}^{\gamma} \Phi_{i,j} &= L^{\gamma_i} \tilde{L}^{\gamma_j} \phi(\|y_i - y_j\|) & i, j &= 1, \dots, M \\ L^{\gamma} P_{i,j} &= L^{\gamma_i} p_j(y_i) & i &= 1, \dots, M \quad j = 1, \dots, q \\ l_i &= z_{\gamma_i} & i &= 1, \dots, M\end{aligned}$$

para el caso de las RBF condicionalmente definidas positivas.

Para el caso de las RBF definidas positivas el sistema es similar pero no aparecen las partes correspondientes al polinomio que se agregó en (7). En Wu (1992) se demuestra la existencia y unicidad de las interpolantes definidas por (6) y (7).

### 3 IMPLEMENTACION NUMERICA.

#### 3.1 CONSTRUCCION DE UNA FUNCION SUAVE.

A partir de los datos batimétricos se construye una función “suave”:

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

suficientemente derivable, de modo de obtener una función *prueba* cuya gráfica se asemeje a la batimetría real. Esta función permitirá definir las funciones interpolantes a través de sus valores y los de sus derivadas, para el caso de las colocaciones **hermitianas**, como así también calcular los errores.

Para la construcción de la mencionada función se considera el conjunto *D* de datos batimétricos ya proyectados a un plano horizontal ( Fig.1):

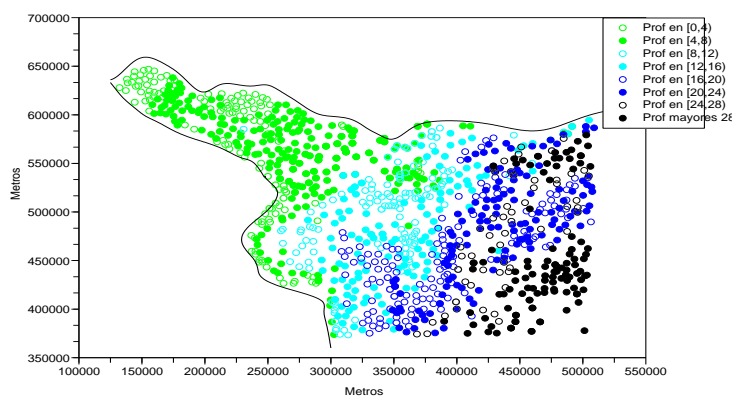


Figure 1: Datos batimétricos.

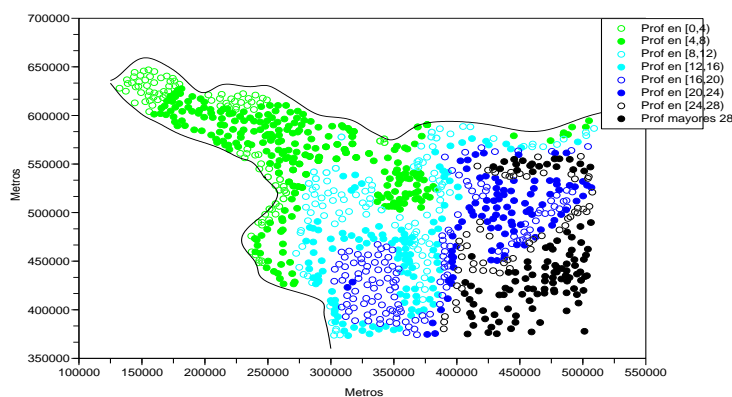


Figure 2: Valores de la Función S(x,y)

$$D = \{(x_i, y_i, z_i) : \text{con } (x_i, y_i) \in X \subset \mathbb{R}^2, \quad i = 1, \dots, N\}$$

Se tomará una partición del conjunto  $X$  tal que

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{k_0} \quad \text{para algún } k_0 \in N$$

Esta partición depende de un parámetro  $t > 0$ , que separa en “franjas” al conjunto de valores  $z_i \quad i = 1, \dots, N$ . Es decir, dado el dato  $(x_i, y_i, z_i)$  se considerará que

$$(x_i, y_i) \in X_j \text{ si } z_i \in [(j-1)t, jt)$$

Lo que se intenta hacer es construir una función  $S(x, y)$  tal que para gran parte de los  $(x_i, y_i) \in X$  se verifique:

$$z_i \in [t(k-1), tk) \Rightarrow S(x_i, y_i) \in [t(k-1), tk)$$

Nótese que cuanto más pequeño sea elegido el parámetro  $t > 0$ , tanto más se aproximará la gráfica de la función  $S$  a la batimetría.

Se propone entonces:

$$S(x, y) = G(x, y) + \sum_{j=1}^r h_j(x, y) \quad (9)$$

siendo

$$G(x, y) = K\varphi_1(x, y)\varphi_2(x, y).$$

Las funciones  $\varphi_1(x, y)$  y  $\varphi_2(x, y)$  definen implícitamente curvas en el plano  $(x, y)$  que imitan a la línea de costa y caracterizan a los puntos del dominio, es decir

$$(x_i, y_i) \in X \iff \varphi_1(x_i, y_i)\varphi_2(x_i, y_i) \geq 0,$$

la constante  $K$  es un coeficiente de peso para mantenerse en el rango de los valores reales.

Por otra parte las funciones  $h_j(x, y)$  son de la forma

$$h_j(x, y) = k_j e^{-\lambda_j \left( \frac{(x-\tilde{x}_j)^2}{a_j} + \frac{(y-\tilde{y}_j)^2}{b_j} \right)}$$

donde la cantidad  $r$  y los parámetros  $k_j, \lambda_j, a_j, b_j, \tilde{x}_j$  y  $\tilde{y}_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) se eligen de tal modo que los valores de la función  $S$  se asemejen localmente a los datos batimétricos (Fig. 2)

### 3.2 CONSTRUCCION DE FUNCIONES INTERPOLANTES.

Se definirán tres funciones interpolantes  $f_1, f_2, f_3$ . Para definir las se utilizarán RBFs *condicionalmente definida positiva de orden 1*

$$\phi(\|(x, y) - (x_j, y_j)\|) = \sqrt{\frac{\|(x, y) - (x_j, y_j)\|^2}{c^2} + 1}$$

siguiendo el trabajo de [Hardy \(1988\)](#).

La interpolante  $f_1$  se construye según la Ec.(3) considerando los datos,

$$z_i = S(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, c1$$

La interpolante  $f_2$ , se construye según la Ec.(7) con los datos

$$z_i = S(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, c1$$

$$z_{\gamma_i} = \frac{\partial S}{\partial x}(x_i, y_i) \quad i = c1 + 1, \dots, c1 + c2$$

y la interpolante  $f_3$ , se construye también con la Ec.(7), con los datos

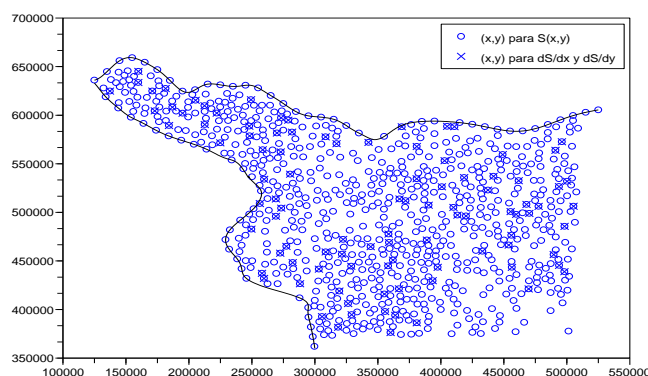


Figure 3: Datos para las interpolantes.

$$z_i = S(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, c1$$

$$z_{\gamma_i} = \frac{\partial S}{\partial x}(x_i, y_i) \quad i = c1 + 1, \dots, c1 + c2$$

$$z_{\gamma_i} = \frac{\partial S}{\partial y}(x_i, y_i) \quad i = c1 + c2 + 1, \dots, c1 + c2 + c3$$

donde, para este caso se consideran:

$$\{(x_i, y_i) : i = c1 + 1, \dots, c1 + c2\} = \{(x_i, y_i) : i = c1 + c2 + 1, \dots, c1 + c2 + c3\}$$

y

$$\{(x_i, y_i) : i = c1 + 1, \dots, c1 + c2\} \subset \{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, c1\}$$

es decir el conjunto de los puntos donde se toman los valores de la derivada de la función respecto de  $x$  coincide con el conjunto en el que se toman las derivadas respecto de  $y$ , y es un subconjunto del conjunto de puntos donde se toman los valores de la función.

En la figura 3 pueden visualizarse estos conjuntos.

#### 4 RESULTADOS NUMERICOS.

A fin de obtener los resultados numéricos se desarrollaron algoritmos que fueron implementados en software libre SCILAB (<http://www.scilab.org/>)

Para la construcción de las funciones interpolantes se resolvieron sistemas de ecuaciones lineales cuyo tamaño se muestra en la Tabla 2.

Table 2: Tamaño de los sistemas

|                |                 |
|----------------|-----------------|
| Interpolante 1 | 800 incógnitas  |
| Interpolante 2 | 900 incógnitas  |
| Interpolante 3 | 1000 incógnitas |

En la Tabla 3 se exhiben los resultados numéricos obtenidos para cada una de las funciones interpolantes y para distintos valores del parámetro de forma  $c$ . Se presentan: el número de condición de las matrices de los sistemas de ecuaciones resueltos, los errores absoluto y relativo máximos y el error residual medio (MSR) definido como:

$$MSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_0} (|f_j(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) - S(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)|)^2}{n_0}}$$

Para medir los errores se consideraron las coordenadas  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$   $i = 1, \dots, n_0$  de los puntos de una grilla regular suficientemente densa (Fig 4).

En dicha tabla se observa que todos los errores disminuyen, para la misma interpolante, a medida que aumenta el valor del parámetro de forma  $c$ .

Para un mismo parámetro de forma, los errores correspondientes a las distintas interpolantes disminuyen levemente, pero debe advertirse el incremento del número de condición de los sistemas cuando se pasa de una colocación no hermitiana a hermitianas con una y dos derivadas respectivamente.

Las ventajas del método de interpolación propuesto se pueden observar en la Tabla 4 donde se comparan los resultados derivados de esta metodología con los de métodos standard como el Kriging y el Cubic Shepard Interpolation.

Cabe señalar que los errores en todos los casos fueron calculados haciendo las diferencias entre los valores de las funciones interpolantes y la función *suave* construida 'ad hoc'.

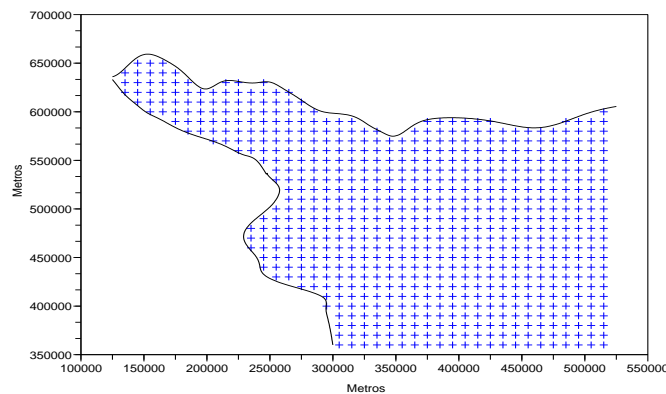


Figure 4: Datos de la grilla uniforme.



Table 3: Resultados obtenidos

| Interp | Parám de Forma | Nro de cond de la matriz | Error Abs Máx | Error Rel Máx | MSR      |
|--------|----------------|--------------------------|---------------|---------------|----------|
| $f_1$  | 1000           | 3,395665E+07             | 1,593641      | 3,270717      | 0,232524 |
| $f_2$  |                | 1,484022E+08             | 1,593640      | 3,270716      | 0,232522 |
| $f_3$  |                | 5,021736E+10             | 1,593638      | 3,270715      | 0,232506 |
| $f_1$  | 5000           | 1,374390E+06             | 1,245073      | 2,497960      | 0,148805 |
| $f_2$  |                | 3,510775E+08             | 1,245073      | 2,497959      | 0,148803 |
| $f_3$  |                | 3,045020E+10             | 1,245072      | 2,497946      | 0,148803 |
| $f_1$  | 7000           | 9,363130E+05             | 1,248220      | 2,327623      | 0,126431 |
| $f_2$  |                | 5,309077E+08             | 1,248220      | 2,327622      | 0,126430 |
| $f_3$  |                | 9,274968E+09             | 1,248219      | 2,327621      | 0,126429 |
| $f_1$  | 9000           | 2,390567E+06             | 1,252056      | 2,217230      | 0,110775 |
| $f_2$  |                | 7,714314E+08             | 1,252056      | 2,217229      | 0,110774 |
| $f_3$  |                | 9,733391E+09             | 1,252055      | 2,217228      | 0,110773 |
| $f_1$  | 10000          | 3,815977E+06             | 1,253997      | 2,174405      | 0,104884 |
| $f_2$  |                | 9,163580E+08             | 1,253997      | 2,174405      | 0,104883 |
| $f_3$  |                | 1,706472E+10             | 1,253996      | 2,174406      | 0,104883 |
| $f_1$  | 11000          | 6,081584E+06             | 1,255885      | 2,136716      | 0,100084 |
| $f_2$  |                | 1,078914E+09             | 1,255885      | 2,136715      | 0,100084 |
| $f_3$  |                | 5,605419E+10             | 1,255884      | 2,136714      | 0,100083 |
| $f_1$  | 13000          | 1,534983E+07             | 1,259394      | 2,071364      | 0,093298 |
| $f_2$  |                | 1,461086E+09             | 1,259394      | 2,071364      | 0,093298 |
| $f_3$  |                | 1,234066E+10             | 1,259393      | 2,071363      | 0,093297 |
| $f_1$  | 15000          | 3,837021E+07             | 1,262458      | 2,014187      | 0,089581 |
| $f_2$  |                | 1,927270E+09             | 1,262457      | 2,014186      | 0,089581 |
| $f_3$  |                | 2,103487E+10             | 1,262456      | 2,014185      | 0,089580 |
| $f_1$  | 20000          | 3,628542E+08             | 1,267934      | 1,890762      | 0,088955 |
| $f_2$  |                | 3,533801E+09             | 1,267933      | 1,890761      | 0,088954 |
| $f_3$  |                | 2,980083E+10             | 1,267932      | 1,890760      | 0,088953 |

## 5 CONCLUSIONES.

El método de interpolación que se propone en el presente trabajo permite obtener resultados de mayor precisión, aún en su versión más simple (interpolante  $f_1$ ) si se lo compara con otros métodos standard. A su vez, cuando se utilizan las interpolantes  $f_2$  y  $f_3$ , donde se consideran otras características de los datos a interpolar (en nuestro caso las derivadas en las direcciones de los ejes coordenados) los resultados obtenidos mejoran levemente a pesar de estar resolviendo sistemas mal condicionados.

Por otra parte cuando, como en los ejemplos exhibidos, la función RBF utilizada es del tipo multiquadric, se dispone de un parámetro (el parámetro de forma  $c$ ) cuya adecuada elección disminuye el error.

Table 4: Comparación de resultados entre otros métodos standard y RBF

| Método                      | Error Abs Máx | Error Rel Máx | MSR      |
|-----------------------------|---------------|---------------|----------|
| Interpolante $f_3(c=15000)$ | 1,262456      | 2,014185      | 0,089580 |
| Interpolante $f_3(c=20000)$ | 1,267932      | 1,890760      | 0,088953 |
| Cubic Shepard Interpolation | 1.549798      | 2.025377      | 0.154446 |
| Kriging                     | 1.802343      | 3.680607      | 0.269037 |

## AGRADECIMIENTOS.

*Este trabajo fue parcialmente subvencionado por el Proyecto de Investigación "Modelo de Distribución de Contaminantes en el Río de la Plata" (convenio entre La Secretaría de Ambiente y Desarrollo Sustentable de la Nación, Buenos Aires, Argentina y el CURIHAM) y por el Proyecto "Desarrollo de técnicas numéricas para métodos sin mallas (ING 259)" de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario.*

## REFERENCES

- Buhmann M. *Radial Basic Functions, Theory and Implementations*. Cambridge University Press, 2003.
- Franke C. and Schaback R. Convergence order estimates of meshless collocation methods using radial basis functions. *Advances in Computational Mathematics*, 8:381–399, 1998.
- Hardy R. Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method. 20 years of discovery 1968-1988. *Comput Math Applications*, 19:163–208, 1988.
- Kansa E. Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-1. surface approximations and partial derivative estimates. *Computers Math. Applic.*, 19(8-9):127–145, 1990.
- Kansa E.J. and Hon Y.C. Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions: Applications to elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with applications*, 39:123–137, 2000.
- Ling L., Opfer R., and Schaback R. Results on meshless collocation techniques. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(4):247–253, 2006.
- Madych W.R. and Nelson S.A. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions. *Mathematics of Computation*, 54:211–230, 1990.
- Mairhuber J.C. On haar's theorem concerning chebychev approximation problems having unique solutions. *Proc. Am. Math. Soc.*, 7:609–615, 1956.
- Micchelli C. Interpolation of scattered data, distance matrices and conditionally positive definite function. *Constr. Approx.*, 2:11–22, 1986.
- Power H. and Barraco V. A comparison analysis between unsymetric and symmetric radial basis function collocation methods for the numerical solution of partial differential equations. *Computers and Mathematics with Application*, 43:551–583, 2002.
- Rocca A.L. and Power H. A hermite radial basis function collocation approach for the numerical simulation of crystallization processes in a channel. *Communications in Numerical Methodin Engineering*, 22:119–135, 2006.
- Rocca A.L., Rosales A.H., and Power H. Radial basis function hermite collocation approach for the solution of time dependent convection-diffusion problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(4):359–370, 2005.
- Schaback R. Multivariate interpolation and approximation by translates of a basis function.

- Approximation Theory VIII, World Scientific Publishing Co, 1995.*
- Wendland H. *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2005.
- Wu Z. Hermite-birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions. *Approximation Theory*, 8(2):99–123, 1992.