

Mecánica Computacional Vol. XXIII, pp. 639-652
G. Buscaglia, E. Dari, O. Zamonsky (Eds.)
Bariloche, Argentina, November 2004

TEORIA DE CÁSCARAS AFINES: DESIGUALDADES BASICAS

Salvador Gigena^{*†}, Daniel Abud^{†♦}, y Moisés Binia^{†♦}

^{*}Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario
Avda. Pellegrini 250 - 2000 Rosario
e-mail: sgigena@fceia.unr.edu.ar

[†] Departamento de Matemáticas
Facultad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba
Avda. Velez Sarsfield 299 - 5000 Córdoba
e-mail: dabud@efn.uncor.edu - mbinia@arnet.com.ar

[♦] Departamento de Ciencias Básicas
Facultad. Regional Córdoba - Universidad Tecnológica Nacional
Avda. Vladislao Frías s/n - 5000 Córdoba
e-mail: dabud@efn.uncor.edu

Palabras clave: Cáscara afín, grupo afín, radio de curvatura afín, relaciones bidimensionales, acotación.

Resumen. *En trabajos anteriores hemos definido y utilizado los conceptos de “cáscara afín”, “normal unimodular afín” y “geometría afín de superficies”. Se establecieron, entre otros conceptos, las condiciones de compatibilidad afín, con fundamento en las condiciones de integrabilidad de la geometría unimodular afín de superficies. También, las ecuaciones de equilibrio de una cáscara sólida en el sentido afín, reduciendo luego estas ecuaciones tridimensionales a las correspondientes ecuaciones bidimensionales en la superficie media, en términos de los invariantes geométricos, unimodulares afines de tal superficie.*

El aumento en el orden de diferenciación y en el número de invariantes proporciona un beneficio que aparece en estas relaciones y que quedará claramente establecido, a posteriori, en los métodos computacionales a desarrollar en un futuro próximo.

En el presente trabajo, expresando la superficie media afín en la forma de Monge se plantearán las relaciones adecuadas para acotar las variables fundamentales en un dominio de trabajo alejado de los bordes y sus influencias.

1 INTRODUCCION

Como esta publicación resultó muy extensa se consideró conveniente dividirla en etapas de acuerdo al desarrollo de la misma. En esta presentación sólo se publica la primera etapa.

En el desarrollo de la teoría clásica, euclidiana, de cáscaras las *Desigualdades Básicas* constituyen un tópico de fundamental importancia. Ha sido tratado por diversos autores, y bajo diferentes hipótesis de trabajo, en numerosos libros y artículos (ver, por ejemplo, [vi], [vii], [viii], [ix], [x], [xi]).

En nuestro artículo, referente a las *Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines* [iv] introdujimos el concepto de Cáscara Afín y demostramos, en tales objetos físico-geométricos, las condiciones de compatibilidad en el sentido de la Geometría Afín que, como estableciéramos entonces, está basada en la consideración de los invariantes geométricos bajo la acción del grupo unimodular afín $ASL(3, \mathbf{R})$.

En otro artículo previo, referente a las *Ecuaciones de equilibrio en Cáscaras Afines* [v], establecimos la relación entre tensión y deformación desarrollando las ecuaciones, tridimensionales y bidimensionales, desde el punto de vista afín.

Es el objetivo del presente trabajo presentar una primera etapa con el desarrollo de las Desigualdades Básicas para Cáscaras Afines. Previamente, como referencia histórica, y también para que sirva de comparación, estableceremos las Desigualdades Básicas para Cáscaras Euclidianas.

2 RESUMEN NOTACIONAL: SUPERFICIE MEDIA EN LA FORMA DE MONGE

Haremos uso extensivo de nuestra propia notación, desarrollada en los artículos [i], [ii], [iii], [iv], [v], a cuyo contenido nos remitimos *brevitatis causae*. En el presente artículo supondremos que la superficie media M_0 es expresada en la forma de Monge, i.e., como una inmersión gráfica definida en términos de coordenadas afines del espacio ambiente (x_1, x_2, x_3) por $x_3 = f(x_1, x_2)$. Así, la primera, segunda y tercera formas fundamentales afines de M_0 quedan expresadas por las ecuaciones que se muestran a continuación.

Entonces, la primera forma fundamental afín de M_0 :

$$I_{ua} = \sum_{a,b} g_{ab} du^a du^b \quad (1)$$

$$I_{ua} = F^{-1/4} \sum_{a,b} \partial_{ab} f du^a du^b \quad (2)$$

con $F := \left| \det(\partial_{ab} f) \right|$, la segunda forma fundamental afín de M_0 , queda:

$$II_{ua} = \sum_{a,b,g} g_{abg} du^a du^b du^g \quad (3)$$

es decir,

$$II_{ua} = F^{-1/4} \sum_{a,b,g} h_{abg} du^a du^b du^g \quad (4)$$

donde

$$h_{abg} = \partial_{abg} f - \frac{1}{4} \left(\partial_{ab} f \partial_g (\log F) + \partial_{ag} f \partial_b (\log F) + \partial_{bg} f \partial_a (\log F) \right) \quad (5)$$

la tercera forma fundamental afín de M_0 , nos queda:

$$III_{ua} = \sum_{a,b} B_{ab} du^a du^b \quad (6)$$

con

$$B_{ab} = -\frac{1}{4} \left(\partial_{ab} (\log F) + \frac{1}{4} \partial_a (\log F) \partial_b (\log F) - \sum_{s,l} f^{sl} \partial_{abs} f \partial_l (\log F) \right), \quad (7)$$

donde, por definición, (f^{ab}) representa a la matriz inversa de $\partial_{ab} f$, i.e., se cumple que $\sum_l f^{al} \partial_{lb} f = \mathbf{d}_b^a$.

3 FUNDAMENTO DE LAS DESIGUALDADES BASICAS

Consideramos una cáscara que, en el estado no-deformado, tiene espesor afín constante y está constituida por un material perfectamente elástico, homogéneo e isotrópico. Si la cáscara es sometida a fuerzas a lo largo de su borde, mientras que sus caras están libres de tracción, se deforma y llega a una posición de equilibrio, satisfaciendo en ese estado apropiadas ecuaciones no lineales de equilibrio.

Nos proponemos en este trabajo considerar exclusivamente el comportamiento de la cáscara en el interior, “lejos” de la influencia de los bordes, en el sentido de la distancia afín. Más precisamente, las estimativas *a priori* se realizarán con fundamento en el desarrollo teórico de las Ecuaciones Diferenciales no lineales de tipo Monge-Ampère. En este sentido, la reducción de los objetos geométricos y físicos tridimensionales inherentes a la cáscara c , en términos de la descripción bidimensional de la superficie media M_0 , dependerá de la acotación de un único parámetro

$$\mathbf{q} = \max\left(\frac{h}{D}, \frac{h}{R}, \mathbf{e}\right) \quad (8)$$

donde \mathbf{e} es la máxima deformación en la cáscara, $2h$ es el espesor afín de la cáscara, D es la distancia afín al borde, y R está asociado a la cota superior del radio afín de curvatura generalizado de la superficie media, a través de la hipótesis básica que supondremos se cumple y que representaremos por la condición de que, para cualquier elección que se tome para el origen P_0 del sistema afín de coordenadas, en las que se referencia a la superficie media M_0 , se satisfagan las desigualdades:

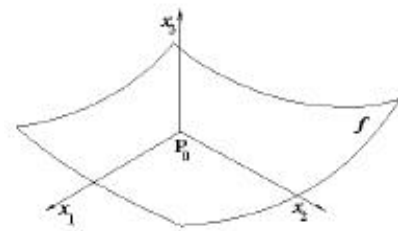
$$\begin{aligned} |\partial_{abg} f| &\leq R^{-1/2} \\ |\partial_{abgh} f| &\leq R^{-1} \\ |\partial_{abghl} f| &\leq \left(R^{-1/2}\right)^3 ; \dots \end{aligned} \quad (9)$$

para el número de derivadas de orden superior que sea necesario. Dicho número dependerá del orden de las derivadas, ordinarias y covariantes, de los tensores de deformación y tensión que uno quiera estimar.

Entonces, los términos de error, que involucran a todos los demás objetos físico-geométricos que intervienen en el problema, son estimados en términos de potencias de \mathbf{q} y son válidos para valores de \mathbf{q} menores que un cierto valor \mathbf{q}_0 “constante universal”, que depende sólo del material considerado.

4 PRIMERA ETAPA: DESARROLLO EUCLIDEANO

Dada la superficie media de la cáscara M_0 vamos a suponer que la superficie media está representada en la forma de Monge, i.e., como un gráfico definido por una función $x_3 = f(x_1, x_2)$ suficientemente diferenciable, y con (x_1, x_2) variando sobre un cierto dominio. Más aún, siempre podemos suponer, por medio de un movimiento euclidiano si fuera necesario, que el origen de coordenadas



$0 \in M_0$, que el plano (x_1, x_2) es exactamente el plano tangente a M_0 , en ese punto y que el tercer eje, x_3 , tiene la misma dirección de la normal euclidiana. Por lo tanto tenemos, además, que la función y sus primeras derivadas se anulan en dicho punto, i.e.,

$$f(0, 0) = \partial_a f(0, 0) = 0, \quad \mathbf{a} = 1, 2. \quad (10)$$

Introducimos a seguir un valor real que denominaremos R y que está definido por el requerimiento de que, para todos los puntos (x_1, x_2) en el dominio de definición de f , y para cualquiera que sea la escogencia del origen de coordenadas, las desigualdades:

$$|\partial_{ab}f| \leq \frac{1}{R}, \quad |\partial_{abg}f| \leq \frac{1}{R^2}, \quad |\partial_{abgm}f| \leq \frac{1}{R^3}, \quad \dots \quad (11)$$

sean satisfechas para derivadas de orden superior según se necesite en el desarrollo que sigue (tal número depende del orden de la derivada de la deformación y la tensión que uno quiera estimar). Como se verá más adelante, el valor $\frac{1}{R}$ está íntimamente relacionado con el límite superior para las curvaturas principales euclidianas de la superficie M_0 .

Está claro que, si la superficie media M_0 es representada en la forma de Monge, $x_3 = f(x_1, x_2)$, con respecto a los parámetros curvilíneos especiales $u_1 = x_1$ y $u_2 = x_2$ se tiene que las componentes de la primera y segunda formas fundamentales euclidianas vienen expresadas por las dos siguientes ecuaciones

$$a_{ab} = \mathbf{d}_{ab} + \partial_a f \partial_b f \quad (12)$$

$$L_{ab} = (1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2)^{-1/2} \partial_{ab} f \quad (13)$$

Sea I un número positivo con $I < R$. Entonces, fijado un origen de coordenadas, para puntos de M_0 situados dentro del disco definido por $\sum_a (u_a)^2 < I^2$, de las relaciones anteriores obtenemos las siguientes desigualdades:

$$|\partial_a f| \leq \frac{\sqrt{2} I}{R}, \quad |a_{ab} - \mathbf{d}_{ab}| \leq \frac{2I^2}{R^2}, \quad |L_{ab}| \leq \frac{1}{R} \quad (14)$$

En efecto, puesto que habíamos supuesto que $f(0, 0) = \partial_a f(0, 0) = 0$ con $\mathbf{a} = 1, 2$. Entonces tendremos para cada \mathbf{a} , por el Teorema del Valor Medio:

$$|\partial_a f(H) - \partial_a f(0)| \leq \|\nabla(\partial_a f)\| \cdot \|H\| \quad (15)$$

Además, de

$$\|\nabla(\partial_a f)\| = \sqrt{(\partial_{a1} f)^2 + (\partial_{a2} f)^2} \quad (16)$$

obtenemos

$$\|\nabla(\partial_a f)\| \leq \sqrt{2 \max(\partial_{ab} f)^2} < \sqrt{2} \frac{1}{R} \quad (17)$$

así que tomando $\|H\| < I$ resulta:

$$\boxed{|\partial_a f| \leq \frac{\sqrt{2}}{R} I} \quad (18)$$

Similarmente, de la ecuación (12):

$$a_{ab} - \mathbf{d}_{ab} = \partial_a f \partial_b f \quad (19)$$

resulta

$$|a_{ab} - \mathbf{d}_{ab}| \leq |\partial_a f| |\partial_b f| \quad (20)$$

finalmente

$$\boxed{|a_{ab} - \mathbf{d}_{ab}| \leq 2 \frac{I^2}{R^2}} \quad (21)$$

Por otro lado se cumple que,

$$1 \leq \left| 1 + (|\partial_a f|)^2 + (|\partial_b f|)^2 \right| \leq 1 + (|\partial_a f|)^2 + (|\partial_b f|)^2 \quad (22)$$

así que de la expresión (13):

$$L_{ab} = \frac{\partial_{ab} f}{\sqrt{1 + (\partial_a f)^2 + (\partial_b f)^2}} \quad (23)$$

resulta

$$|L_{ab}| = \frac{|\partial_{ab} f|}{\sqrt{1 + (|\partial_a f|)^2 + (|\partial_b f|)^2}} \leq |\partial_{ab} f| \quad (24)$$

y, entonces

$$\boxed{|L_{ab}| \leq \frac{1}{R}} \quad (25)$$

Otras desigualdades básicas euclidianas pueden ser obtenidas en forma similar. Por ejemplo, de

$$a_{ab} = \mathbf{d}_{ab} + \partial_a f \partial_b f, \quad (26)$$

derivando según la regla de Leibnitz,

$$\partial_g a_{ab} = \partial_{ag} f \partial_b f + \partial_a f \partial_{bg} f \quad (27)$$

que en términos de las desigualdades, nos queda:

$$|\partial_g a_{ab}| \leq |\partial_{ag} f| |\partial_b f| + |\partial_a f| |\partial_{bg} f| \quad (28)$$

así,

$$|\partial_g a_{ab}| \leq 2 \frac{1}{R} \frac{\sqrt{2}}{R} I < \frac{2\sqrt{2}}{R} \quad (29)$$

para valores de I tales que $I < R$.

Vamos a mostrar también la acotación para la siguiente derivada: $|\partial_{gm} a_{ab}|$: Partiendo de $\partial_g a_{ab} = \partial_{ag} f \partial_b f + \partial_a f \partial_{bg} f$ y, derivando otra vez, obtenemos:

$$\partial_{gm} a_{ab} = \partial_{agm} f \partial_b f + \partial_{ag} f \partial_{bm} f + \partial_{am} f \partial_{bg} f + \partial_a f \partial_{bgm} f, \quad (30)$$

que, en términos de desigualdades, nos queda:

$$|\partial_{gm} a_{ab}| \leq |\partial_{agm} f \partial_b f| + |\partial_{ag} f \partial_{bm} f| + |\partial_{am} f \partial_{bg} f| + |\partial_a f \partial_{bgm} f| \quad (31)$$

es decir que, $|\partial_{gm} a_{ab}| \leq \frac{1}{R^2} \frac{\sqrt{2}}{R} I + \frac{1}{R} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \frac{1}{R} + \frac{\sqrt{2}}{R} I \frac{1}{R^2}$.

O sea,

$$|\partial_{gm} a_{ab}| \leq \frac{2}{R^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{R} I + 1 \right). \quad (32)$$

Pero, como estamos suponiendo tomar $0 < I < R$, entonces $\frac{I}{R} < 1$, y resulta:

$$\boxed{|\partial_{gm} a_{ab}| \leq \frac{6}{R^2}} \quad (33)$$

Similarmente, para la siguiente derivada se puede verificar que

$$\boxed{|\partial_{gms} a_{ab}| \leq \frac{10}{R^3}} \quad (34)$$

Con respecto a las componentes de la segunda forma fundamental euclidiana, de la ecuación

(23), derivando tenemos:

$$\partial_g(L_{ab}) = \frac{\partial_{abg}f \sqrt{1+(\partial_1f)^2+(\partial_2f)^2} - \partial_{ab}f \left(1+(\partial_1f)^2+(\partial_2f)^2\right)^{-1/2} (\partial_1f\partial_{1g}f + \partial_2f\partial_{2g}f)}{1+(\partial_1f)^2+(\partial_2f)^2} \quad (35)$$

que desarrollando

$$\partial_g(L_{ab}) = \frac{\partial_{abg}f \left(1+(\partial_1f)^2+(\partial_2f)^2\right) - \partial_{ab}f (\partial_1f\partial_{1g}f + \partial_2f\partial_{2g}f)}{\left(1+(\partial_1f)^2+(\partial_2f)^2\right)^{3/2}} \quad (36)$$

de la que obtenemos ahora las desigualdades:

$$\left|\partial_g(L_{ab})\right| \leq \left|\partial_{abg}f\right| \left|1+(\partial_1f)^2+(\partial_2f)^2\right| + \left|\partial_{ab}f\right| \left(|\partial_1f||\partial_{1g}f| + |\partial_2f||\partial_{2g}f|\right) \quad (37)$$

y, reemplazando por las acotaciones ya efectuadas

$$\begin{aligned} \left|\partial_g(L_{ab})\right| &\leq \frac{1}{R^2} \left|1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{R}I\right)^2\right| + \frac{1}{R} 2\frac{\sqrt{2}}{R}I\frac{1}{R} \\ &\leq \frac{1}{R^2}(1+4) + 2\frac{\sqrt{2}}{R^2} \\ &\leq \frac{1}{R^2}(5+2\sqrt{2}) \end{aligned} \quad (38)$$

lo que finalmente resulta,

$$\boxed{\left|\partial_g(L_{ab})\right| \leq \frac{9}{R^2}} \quad (39)$$

Derivando otra vez la expresión

$$\partial_g(L_{ab}) = \frac{\partial_{abg}f \left(1+(\partial_1f)^2+(\partial_2f)^2\right) - \partial_{ab}f (\partial_1f\partial_{1g}f + \partial_2f\partial_{2g}f)}{\left(1+(\partial_1f)^2+(\partial_2f)^2\right)^{3/2}} \quad (40)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 \partial_{gm}(L_{ab}) = & \frac{\partial_{abgm}f \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^3} + \\
 & + \frac{\partial_{abg}f 2(\partial_1 f \partial_{1m}f + \partial_2 f \partial_{2m}f) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^3} - \\
 & - \frac{\partial_{abm}f (\partial_1 f \partial_{1g}f + \partial_2 f \partial_{2g}f) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^3} \tag{41} \\
 & - \frac{\partial_{ab}f (\partial_{1m}f \partial_{1g}f + \partial_1 f \partial_{1gm}f + \partial_{2m}f \partial_{2g}f + \partial_2 f \partial_{2gm}f) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^3} - \\
 & - \frac{3\partial_{abg}f \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{1}{2}} (\partial_1 f \partial_{1m}f + \partial_2 f \partial_{2m}f)}{\left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^3} + \\
 & + \frac{3\partial_{ab}f \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{1}{2}} (\partial_1 f \partial_{1g}f + \partial_2 f \partial_{2g}f) (\partial_1 f \partial_{1m}f + \partial_2 f \partial_{2m}f)}{\left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^3}
 \end{aligned}$$

lo que nos da las desigualdades,

$$\begin{aligned}
 |\partial_{gm}(L_{ab})| \leq & \left| \partial_{abgm}f \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{3}{2}} \right| + \\
 & + \left| \partial_{abg}f 2(\partial_1 f \partial_{1g}f + \partial_2 f \partial_{2g}f) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{3}{2}} \right| + \\
 & + \left| \partial_{abm}f (\partial_1 f \partial_{1g}f + \partial_2 f \partial_{2g}f) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{3}{2}} \right| + \tag{42} \\
 & + \left| \partial_{ab}f (\partial_{1m}f \partial_{1g}f + \partial_1 f \partial_{1gm}f + \partial_{2m}f \partial_{2g}f + \partial_2 f \partial_{2gm}f) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{3}{2}} \right| + \\
 & + \left| 3\partial_{abg}f \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right) \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{1}{2}} (\partial_1 f \partial_{1m}f + \partial_2 f \partial_{2m}f) \right| + \\
 & + \left| 3\partial_{ab}f \left(1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\right)^{\frac{1}{2}} (\partial_1 f \partial_{1g}f + \partial_2 f \partial_{2g}f) (\partial_1 f \partial_{1m}f + \partial_2 f \partial_{2m}f) \right|
 \end{aligned}$$

nos queda:

$$\begin{aligned}
 |\partial_{gm}(L_{ab})| &\leq \left(\frac{1}{R^3} \left(1 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{R} \mathbf{I} \right)^2 \right) + 3 \frac{1}{R^2} \left(2 \frac{\sqrt{2}}{R} \mathbf{I} \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} 2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{\sqrt{2}}{R} \mathbf{I} \frac{1}{R^2} \right) \right) \left(1 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{R} \mathbf{I} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{R^2} \left(1 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{R} \mathbf{I} \right)^2 \right) + \frac{1}{R} 2 \frac{\sqrt{2}}{R} \mathbf{I} \frac{1}{R} \right) 3 \left(1 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{R} \mathbf{I} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} 2 \frac{\sqrt{2}}{R} \mathbf{I} \frac{1}{R} \\
 &\leq \left(\frac{5}{R^3} + \frac{8}{R^3} + \frac{4}{R^3} + \frac{6}{R^3} \right) 5^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{5}{R^2} + \frac{4}{R^2} \right) 3 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \frac{4}{R} \\
 &\leq \frac{23}{R^3} 5^{\frac{3}{2}} + \frac{108}{R^3} 5^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 223 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R^3} \right)
 \end{aligned} \tag{43}$$

es decir, tendremos

$$\boxed{|\partial_{gm}(L_{ab})| \leq \frac{444}{R^3}} \tag{44}$$

Analizando ahora, para la cáscara (el volumen) y recordando las ecuaciones (7) de [iv] que

$$dS^2 = \sum_{i,k} A_{ik} du^i du^k \tag{45}$$

siendo

$$A_{ab} = a_{ab} - 2tL_{ab} + t^2 L_{ag} L_{b}^g, \quad A_{a3} = 0, \quad A_{33} = 1 \tag{46}$$

entonces

$$A_{ik} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{47}$$

ahora tenemos que acotar la expresión:

$$\mathbf{h}_{ik} = A_{ik} - \mathbf{d}_{ik} \tag{48}$$

para lo cual comenzamos acotando

$$A_{ab} - \mathbf{d}_{ab} = (a_{ab} - \mathbf{d}_{ab}) - 2tL_{ab} + t^2 L_{ag} L_b^g \quad (49)$$

luego, haciendo

$$A_{ab} - \mathbf{d}_{ab} = (a_{ab} - \mathbf{d}_{ab}) - 2tL_{ab} + t^2 L_{ag} \alpha^{gr} L_{rb} \quad (50)$$

que, nos fornece las desigualdades

$$\begin{aligned} |A_{ab} - \mathbf{d}_{ab}| &\leq |(a_{ab} - \mathbf{d}_{ab})| + 2|t||L_{ab}| + |t|^2 |L_{ag}| |\alpha^{gr}| |L_{rb}| \\ &\leq 2\frac{I^2}{R^2} + 2\frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} 4\left(1 + 2\frac{I^2}{R^2}\right) \end{aligned} \quad (51)$$

y, como estamos suponiendo que $I < R$, nos queda:

$$\boxed{|A_{ab} - \mathbf{d}_{ab}| \leq 2 + 2\frac{h}{R} + 12\left(\frac{h}{R}\right)^2} \quad (52)$$

A partir de todas las desigualdades básicas, establecidas para los objetos geométricos euclidianos de la superficie media, detalladas en esta sección, se pueden establecer estimativas para las derivadas covariantes de cualquier orden, tanto para las componentes del tensor de deformación como para las del tensor de tensión. Ver, por ejemplo, el artículo de F. John, [vii].

5 SEGUNDA ETAPA: DESARROLLO AFIN

El resumen notacional introducido en la sección 2 implica, en particular, que la función f satisface la siguiente ecuación diferencial de tipo Monge-Ampère:

$$\det(\partial_{ab} f) = \pm F \quad (53)$$

y para tal tipo de ecuaciones, con condiciones de contorno como es el presente caso, valen acotaciones para la función f y sus derivadas. También, puesto que a su vez la función F es estrictamente positiva en todo el dominio donde está definida la función f existen cotas inferiores y superiores para la F .

En consecuencia, y a fin de facilitar la presente exposición, podemos también suponer que están acotados: las derivadas segundas de la función f , i.e., las componentes de la matriz Hessiana $(\partial_{ab} f)$, las componentes de la matriz inversa de la anterior, que denotaremos (f^{ab}) , y los coeficientes del tensor pseudo-métrico, tanto covariantes como contravariantes, i.e., g_{ab} y g^{ab} , hechos que expresaremos por las siguientes inecuaciones: $|\partial_{ab} f| < K$,

$$|f^{ab}| < K, \quad |g_{ab}| < K, \quad |g^{ab}| < K.$$

Además, como también están acotadas las derivadas de orden superior, y para unificar la notación, supondremos que existe un *radio de curvatura afín máximo generalizado* que estará íntimamente relacionado con el límite superior de las curvaturas principales afines de la superficie media M_0 , que denotaremos también R y que, para el presente caso afín, queda especificado por las condiciones de que:

$$|\partial_{abg} f| < \frac{1}{R^{1/2}} \quad (54)$$

y para las derivadas sucesivas,

$$\begin{aligned} |\partial_{abgh} f| &\leq R^{-1} \\ |\partial_{abghl} f| &\leq \left(R^{-1/2}\right)^3; \dots \end{aligned} \quad (55)$$

para un orden tal de derivación que resulte suficiente para el desarrollo de estimativas que se juzguen útiles al desarrollo de la presente teoría.

Usando estas hipótesis se obtiene la correspondiente acotación para las componentes del tensor de la tercera forma fundamental:

$$B_{ab} = -\frac{1}{4} \left(\partial_{ab} (\log F) + \frac{1}{4} \partial_a (\log F) \partial_b (\log F) - \sum_{s,l} f^{sl} \partial_{abs} f \partial_l (\log F) \right), \quad (56)$$

si tenemos en cuenta, además, las dos siguientes, bien conocidas identidades:

$$\partial_a \log F = \sum_{r,s} f^{rs} \partial_{ars} f, \quad (57)$$

$$\partial_{ab} \log F = \sum_{r,s} f^{rs} \partial_{abrs} f - \sum_{r,s} f^{rq} f^{ts} \partial_{qta} f \partial_{rsb} f,$$

con lo cual resulta:

$$|B_{ab}| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{R} (4K + 32K^2) = (K + 8K^2) \frac{1}{R}. \quad (58)$$

A seguir, calculamos las derivadas parciales de esas componentes

$$\begin{aligned} \partial_g B_{ab} = & -\frac{1}{4} \left(\begin{aligned} & \partial_g f^{rt} \partial_{abrt} f + f^{rt} \partial_{abrtg} f - (\partial_g f^{rh} \partial_{hma} f)(f^{mt} \partial_{brt} f) - \\ & -(f^{rh} \partial_{hma} f)(f^{mt} \partial_{brt} f) - (f^{rh} \partial_{hma} f)(\partial_g f^{mt} \partial_{brt} f) - \\ & -(f^{rh} \partial_{hma} f)(f^{mt} \partial_{brtg} f) \end{aligned} \right) + \\ & + \frac{1}{16} \left(\begin{aligned} & (\partial_g f^{rt} \partial_{tra} f)(f^{sl} \partial_{bsl} f) + (f^{rt} \partial_{trag} f)(f^{sl} \partial_{bsl} f) + \\ & (f^{rt} \partial_{tra} f)(\partial_g f^{sl} \partial_{bsl} f) + (f^{rt} \partial_{tra} f)(f^{sl} \partial_{bsll} f) \end{aligned} \right) - \\ & - \frac{1}{4} \left(\begin{aligned} & (\partial_g f^{sl} \partial_{abs} f)(f^{rt} \partial_{lrt} f) + (f^{sl} \partial_{abs} f)(f^{rt} \partial_{lrt} f) + \\ & (f^{sl} \partial_{abs} f)(\partial_g f^{rt} \partial_{lrt} f) + (f^{sl} \partial_{abs} f)(f^{rt} \partial_{lrtg} f) \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

Entonces, usando la identidad

$$\sum_l f^{ls} \partial_{lm} f = \mathbf{d}_m^s, \quad (60)$$

de la cual se obtiene que

$$\partial_a f^{sg} = -\sum_l f^{lg} f^{ms} \partial_{alm} f, \quad (61)$$

encontramos por cálculo directo la siguiente estimativa

$$|\partial_g B_{ab}| \leq \frac{1}{R^{3/2}} (K + 19K^2 + 24K^3). \quad (62)$$

Con lo expuesto hasta ahora, se pueden también conseguir estimativas para las componentes del tensor (pseudo)-Riemanniano $G = G_{ij} du^i du^j$ de la cáscara sin deformar C (ver [iv], ecuación (58) y siguientes), y sus derivadas sucesivas, tanto parciales como covariantes.

Por ejemplo, del trabajo citado sabemos que

$$G_{ab} := g_{ab} - 2tB_{ab} + t^2 \sum_l B_a^l B_{bl}, \quad (63)$$

con lo cual obtenemos, primeramente, que

$$G_{ab} = g_{ab} - 2tB_{ab} + t^2 \sum_{1,m} g^{1m} B_{am} B_{bl} , \quad (64)$$

y, en consecuencia

$$|G_{ab}| \leq K + 2K(1+8K) \frac{h}{R} + 4K^2(1+8K) \left(\frac{h}{R} \right)^2. \quad (65)$$

En forma similar se pueden realizar otras estimativas de derivadas de orden superior. Todas estas estimativas son utilizadas en la obtención del objetivo final, a ser presentado en trabajos posteriores, que es la acotación de las derivadas covariantes, de orden superior, para las componentes de los tensores de deformación y tensión.

REFERENCIAS

- [i] Gigena, S. *Constant Affine Mean Curvature Hypersurfaces of Decomposable Type*, Proc. of Symp. in Pure Math., American Math. Society, Vol. 54, (1993), Part 3, 289-316
- [ii] Gigena, S. *Hypersurface Geometry and Related Invariants in a Real Vector Space*, libro en 4 capítulos, pp. 1-127, (Introduction i-vii), Octubre/1996.
- [iii] Gigena, S. *Ordinary Differential Equations in Affine Geometry*, Le Matematiche, Vol. LI, (1996), Fasc.I, 119-151.
- [iv] Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D.; *Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines*, Mecánica Computacional, Vol. XXI, (2002), 1862-1881.
- [v] Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D.; *Ecuaciones de equilibrio en Cáscaras Afines*, ENIEF (2003).
- [vi] Godoy, L.A., Prato, C.A., Flores, F.G., *Introducción a la Teoría de Elasticidad*, 2ª. Edición, Universitas, Editorial Científica Universitaria, Córdoba, 2000.
- [vii] John, F. *Estimates for the Derivatives of the Stresses in a Thin Shell and Interior Shell Equations*, Comm. Pure Appl. Math. N° 18, (1965), 235-267.
- [viii] Koiter, W.T. *On the mathematical foundation of shell theory*, Proc. Int. Congr. of Mathematics, Nice, 1970, Vol. 3, Paris, (1971), 123-130.
- [ix] Love, A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition, Dover, 1944.
- [x] Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, New Jersey, 1969
- [xi] Mollmann, H. *Introduction to the Theory of Thin Shells*, J. Wiley Sons, 1981.