

UNA REVISIÓN DE LOS CONCEPTOS DE LA MECÁNICA DE FRACTURA FRACTAL DISCRETA

Franco E. Dotti^{a,b}, Florencia Reguera^{a,b}, Víctor H. Cortínez^{a,b} y Marcelo T. Piovan^{a,b}

^aGrupo Análisis de Sistemas Mecánicos, Centro de Investigación en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina <http://www.frbb.utn.edu.ar/gasm>

^bConsejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET), Rivadavia 1917, 1033 Capital Federal.

Palabras Clave: Fractura Fractal, Factores de intensidad de tensiones, Mirror-Mist-Hackle.

Resumen: En el presente artículo se realiza una completa revisión de los conceptos de la teoría de Mecánica de Fractura Fractal Discreta. El objetivo del trabajo se centra en la comprensión de los efectos de la fractalidad de una fisura, mediante la obtención de los factores de intensidad de tensiones del modo I de fractura. Se analiza además la capacidad de la teoría de explicar cualitativamente al fenómeno de transición Mirror-Mist-Hackle y se presentan comparaciones de la mencionada teoría con soluciones analíticas y estudios numéricos para casos clásicos de la mecánica de fractura.

1 INTRODUCCIÓN

La teoría de *Mecánica de Fractura Fractal Discreta* (DFFM, por sus siglas en inglés), propuesta por Wnuk y Yavari (2007) y basada en sus anteriores trabajos (Yavari, 2001; Yavari et al., 2002; Wnuk y Yavari, 2003; Wnuk y Yavari, 2005) es un modelo generalizado que engloba los conceptos de dos diferentes enfoques de la Mecánica de Fracturas: la teoría clásica introducida por Griffith (1921) –con su extensión denominada *Mecánica de Fractura Elástica Lineal* (LEFM)– y la llamada *Mecánica de Fractura Cuantizada* (QFM), introducida por Pugno y Ruoff (2004) y Pugno (2006).

A modo introductorio, en los capítulos 2 y 3 se desarrollan estas dos teorías madre en forma resumida para luego desembocar en la nueva concepción fractal de fractura, cuyos conceptos son analizados en los capítulos 4 y 5.

2 MECÁNICA DE FRACTURA ELÁSTICA LINEAL (LEFM)

La teoría clásica lineal de mecánica de fracturas, cuyo aporte seminal fue realizado por Griffith (1921), postula que la fractura frágil ocurre como resultado de una competencia entre la energía de deformación liberada y la energía de superficie requerida para crear nuevas superficies de fractura. Esta teoría predice que, para cierta longitud de la fisura, existe una única tensión crítica por encima de la cual la fisura se propaga y por debajo de la cual se mantiene en equilibrio.

El criterio de falla energético en la LEFM puede establecerse de varias formas matemáticas equivalentes. Se considera aquí la energía potencial total de un cuerpo elástico con fisura sujeto a cargas externas, que puede ser escrita de la siguiente manera

$$\Pi_{tot}(\sigma, \ell) = \Pi(\sigma, \ell) + S(\ell), \tag{1}$$

donde σ y ℓ representan la tensión aplicada en las lejanías de la fisura y la longitud de fisura (igual a $2a$ para la fisura de Griffith, ver Figura 1), respectivamente.

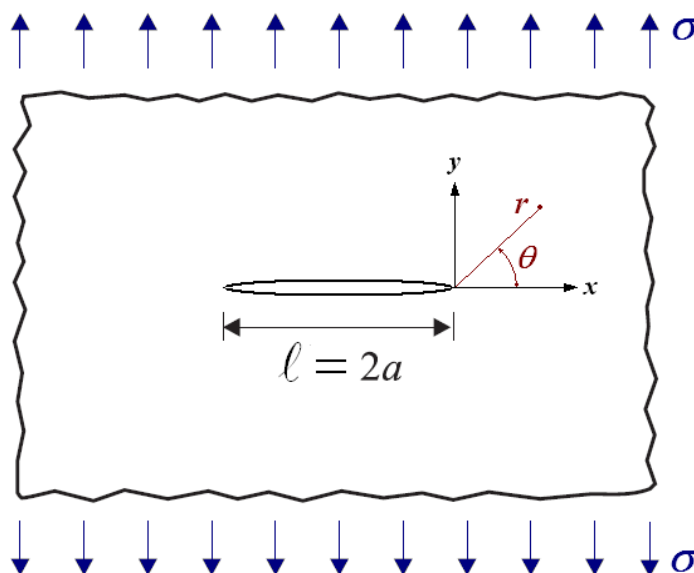


Figura 1: Fisura en una placa infinita (fisura de Griffith).

El término $S(\ell)$ corresponde a la energía de superficie y representa una medida de la resistencia del material a la extensión de la fisura. Esta energía de superficie es proporcional al área $A(\ell)$ de las nuevas superficies creadas y fue definida por Griffith como

$$S(\ell) = 2A(\ell)\gamma, \tag{2}$$

siendo la energía específica de fractura γ independiente de la longitud de la fisura y, por lo tanto, considerada como propiedad del material. Como se indicará en párrafos subsiguientes, γ puede depender de aspectos de la fisura, aunque en el tratamiento de la LEFM se la considere independiente.

El término $\Pi(\sigma, \ell)$ de la ecuación (1) es la energía potencial disponible para la fractura, es decir, la diferencia entre el trabajo de las fuerzas externas y la energía de deformación. Consideremos entonces una fisura bidimensional rodeada en su extremo por una trayectoria Γ que encierra un área Ω , como se muestra en la Figura 2.

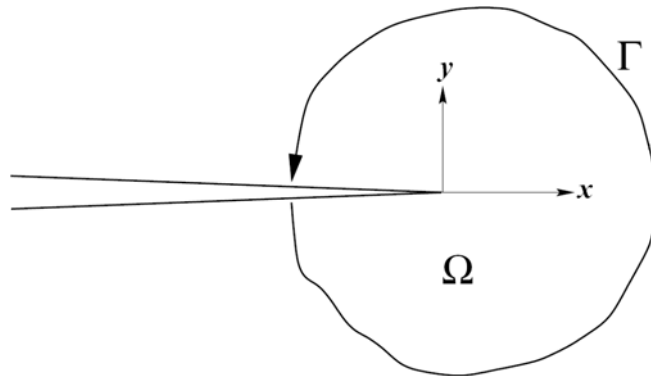


Figura 2: Extensión virtual de la fisura para la definición de la energía potencial.

Bajo condiciones cuasi-estáticas y en ausencia de fuerzas por unidad de volumen (se considera despreciable el peso de la placa), la energía potencial del sistema consistente en un cuerpo elástico cargado por cargas de tracción t_i , conteniendo una fisura se escribe como (Saouma, 2004)

$$\Pi(\sigma, \ell) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma, \tag{3}$$

donde σ_{ij} y ε_{ij} son los tensores de tensión y de deformación de Cauchy, respectivamente y u_i es el vector de desplazamiento asociado al vector de tracciones t_i .

Para el caso de una placa bidimensional que contiene una fisura orientada perpendicularmente con respecto a las tensiones σ aplicadas en las lejanías de la misma (ver Figura 1), Griffith (1921) calculó ambos términos del lado derecho de la ecuación (1), siendo

$$\Pi = -\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E'}, \tag{4}$$

$$S = 4a\gamma, \tag{5}$$

donde E' es igual al Módulo de Young E para el caso de tensión plana e igual a $E/(1 - \nu^2)$ para el caso de deformación plana y ν es el coeficiente de Poisson.

Griffith postula que, en el punto de fractura incipiente, la energía potencial total Π_{tot} del cuerpo alcanza un valor estacionario. Por ello, derivando la expresión (1) con respecto a la longitud de fisura, se obtiene

$$-\frac{d\Pi}{d\ell} = \frac{dS}{d\ell} = G_c = 2\gamma, \tag{6}$$

donde se introduce la tasa crítica de disipación de energía G_c .

Ahora, teniendo en cuenta las expresiones (4) y (5), que $d\ell = 2da$ y que en el momento de fractura incipiente es $\sigma = \sigma_{crit}^{LEFM}$ se puede escribir

$$\frac{d\Pi}{da} = -\frac{\pi(\sigma_{crit}^{LEFM})^2 a}{E'}, \quad (7)$$

$$\frac{dS}{da} = 4a. \quad (8)$$

Igualando las expresiones (7) y (8) por lo expuesto en la expresión (6), resulta una predicción para la tensión de falla

$$\sigma_{crit}^{LEFM} = \sqrt{\frac{2E'\gamma}{\pi a}}. \quad (9)$$

Utilizando la notación contemporánea, se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\sigma_{crit}^{LEFM} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a}}, \quad (10)$$

donde el factor crítico de intensidad de tensiones K_c es una propiedad del material (constante de mayor utilización en la actualidad que γ) que puede obtenerse mediante ensayos experimentales. En el caso de que la tensión aplicada no alcance el valor requerido para fractura incipiente, de la (10) se define el factor de intensidad de tensiones para la placa de Griffith como

$$K = \sigma\sqrt{\pi a}. \quad (11)$$

Una magnitud fundamental en mecánica de fractura es la tasa de disipación de energía G . Combinando las ecuaciones (6) y (9) se puede escribir

$$\sigma_{crit}^{LEFM} = \sqrt{\frac{G_c E'}{\pi a}}. \quad (12)$$

Igualando con (10), se puede expresar la tasa crítica de disipación de energía G_c como

$$G_c = \frac{K_c^2}{E'} = \frac{(\sigma_{crit}^{LEFM})^2 \pi a}{E'}. \quad (13)$$

Para tensiones inferiores a la tensión crítica, se define la tasa de disipación de energía, G de la siguiente manera

$$G = \frac{K^2}{E'} = \frac{\sigma^2 \pi a}{E'}. \quad (14)$$

3 MECÁNICA DE FRACTURA CUANTIZADA (QFM)

La manera fundamental en la que la QFM se aparta del tratamiento clásico consiste en un cambio en la noción de “extensión de la fisura”. Para la LEFM la extensión de la fisura es tratada como infinitesimal, da , mientras que para la QFM dicha magnitud se reemplaza con una forma de propagación que involucra un incremento finito en la longitud de la fisura.

Novozhilov (1969) sugirió que la naturaleza de propagación de la fisura es discreta e introdujo por primera vez el concepto de cuanto de fractura, a_0 . La constante a_0 es una propiedad del material relacionada con la distancia interatómica y la fuerza intermolecular del mismo. El nombre de Mecánica de Fractura Cuantizada (Quantized Fracture Mechanics, en inglés) y la teoría en sí misma se deben a los aportes de por Pugno y Ruoff (2004) y Pugno (2006). Ellos reemplazan la ecuación (6) por una expresión que intercambia los diferenciales por diferencias finitas, es decir

$$-\frac{\Delta_{a_0} \Pi}{\Delta \ell} = \frac{\Delta_{a_0} S}{d\ell}. \quad (15)$$

Ahora, respetando el postulado de Griffith, la ecuación (15) no es del todo correcta en términos físicos. Según dicho postulado, la energía potencial total debe alcanzar un máximo en el punto mismo de propagación, pero

$$\frac{\Delta_{a_0} \Pi_{tot}}{\Delta \ell} = \frac{\Pi_{tot}(\ell + \Delta \ell) - \Pi_{tot}(\ell)}{\Delta \ell} \leq 0, \quad (16)$$

dado que la energía potencial inmediatamente luego de la propagación $\Pi_{tot}(\ell + \Delta \ell)$ a lo sumo puede ser igual pero nunca puede ser mayor que dicha energía en el punto mismo de propagación $\Pi_{tot}(\ell)$. Si por analogía con la ecuación (1) se plantea que

$$\frac{\Delta_{a_0} \Pi_{tot}}{\Delta \ell} = \frac{\Delta_{a_0} \Pi}{\Delta \ell} + \frac{\Delta_{a_0} S}{\Delta \ell}, \quad (17)$$

mediante una combinación con la (16) se obtiene

$$\frac{\Delta_{a_0} \Pi}{\Delta \ell} + \frac{\Delta_{a_0} S}{\Delta \ell} \leq 0, \quad (18)$$

o, lo que es lo mismo

$$-\frac{\Delta_{a_0} \Pi}{\Delta \ell} \geq \frac{\Delta_{a_0} S}{\Delta \ell} = G_c. \quad (19)$$

Así la ecuación (19) –y no la (15)– es la análoga a la (6), correspondiente a la LEFM.

El siguiente paso será encontrar una expresión correspondiente a la tensión crítica para la teoría QFM. Si se hace referencia al caso bidimensional de Griffith (ver Figura 1), se tiene que $\Delta \ell = 2\Delta a$ (dado que $\ell = 2a$). Ahora, el paso discreto de propagación de la fisura corresponde a un cuanto de fractura, entonces $\Delta a = a_0$ y por lo tanto $\Delta \ell = 2a_0$. A partir de lo planteado se redefine la expresión (4) de la energía potencial disponible para la fractura como

$$\Pi = -\frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} = -\frac{\pi \sigma^2 (\ell/2)^2}{E'} = -\frac{\pi \sigma^2 \ell^2}{4E'}. \quad (20)$$

De la ecuación (19) y teniendo en cuenta los cálculos de Griffith para el caso de la Figura 1, se puede expresar el factor crítico de intensidad de tensiones G_c como

$$G_c \leq -\frac{\Delta_{a_0} \Pi}{\Delta \ell} = \frac{\Pi(\ell) - \Pi(\ell + \Delta \ell)}{\Delta \ell} = \frac{1}{2a_0} \left[-\frac{\pi \sigma^2 (2a)^2}{4E'} + \frac{\pi \sigma^2 (2a + 2a_0)^2}{4E'} \right]$$

por lo que

$$\frac{\pi\sigma^2}{E'} \left(a + \frac{a_0}{2} \right) \geq G_c. \quad (21)$$

La tensión crítica se define como la mínima que satisface la inecuación (21), es decir

$$\sigma_{crit}^{QFM} = \sqrt{\frac{E' G_c}{\pi \left(a + \frac{a_0}{2} \right)}} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi \left(a + \frac{a_0}{2} \right)}}, \quad (22)$$

siendo esta última la expresión de la teoría QFM análoga a la (10) de la LEFM. Es interesante observar que, a diferencia de aquella, la (22) predice una tensión finita cuando la profundidad de fisura tiende a cero, esto es, en ausencia de daño. Así se tiene

$$\sigma_0 = \lim_{a \rightarrow 0} \sigma_{crit}^{QFM} = K_c \sqrt{\frac{2}{\pi a_0}}. \quad (23)$$

Es importante ver que la tensión σ_0 sigue siendo una tensión crítica (para una fisura infinitamente pequeña) y es tal que, al ser alcanzada en el material sin fisura, genera la propagación. Es así que σ_0 puede asociarse físicamente con la tensión intermolecular del material. Teniendo en cuenta lo planteado, de la expresión (23) puede estimarse el tamaño del cuanto de fractura a_0 como

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_c}{\sigma_0} \right)^2. \quad (24)$$

En principio, si las magnitudes K_c y σ_0 pueden medirse en una cuidadosa prueba de laboratorio, puede obtenerse el cuanto de fractura de la expresión (24). De todas formas, una estimación aproximada está dada por $a_0 \sim 12b_0$, donde b_0 es la distancia intermolecular del material. Dado que, para la mayoría de los materiales sólidos, b_0 es del orden de $2 \cdot 10^{-10} m$, el cuanto de fractura en sólidos puede estimarse en aproximadamente $2.4 nm$.

4 MÉCANICA DE FRACTURA FRACTAL DISCRETA (DFFM)

4.1 Introducción

Las superficies de fractura son usualmente irregulares y el tratamiento clásico de las fisuras, donde se las modela como curvas o superficies suaves es, en el mejor de los casos, una aproximación. Mediante observaciones experimentales se ha determinado que la fractura en sólidos presenta superficies rugosas y que esta rugosidad evoluciona en el proceso de propagación de la fisura. Este fenómeno de transición en la fractura se denomina efecto Mirror-Mist-Hackle (Johnson y Holloway, 1966; Hull, 1999) y se ilustra brevemente en la Figura 3 (Extraída de Johnson y Holloway, 1966). Como se observa, las superficies de fractura reales son rugosas y aparentemente aleatorias. No obstante este grado de irregularidad, los objetos rugosos suelen tener un cierto orden oculto a simple vista. Parecería entonces mucho más apropiado modelar una fisura con geometría fractal, implicando conjuntos irregulares pero con propiedades específicas en el escalamiento.

La teoría DFFM, introducida por Wnuk y Yavari (2007) propone un modelo generalizado que contiene los conceptos de las teorías LEFM y QFM, agregando una importante característica de naturaleza geométrica: la fractalidad de las superficies de fractura. Esta fractalidad es descripta por la dimensión fractal del compás D_C para fisuras fractales auto-

similares y por el exponente H de rugosidad (o de Hurst) para fisuras fractales auto-semejantes. Vale la pena hacer una aclaración en este punto. En caso de considerarse la fisura como un fractal auto-similar, todas las diferentes definiciones de dimensión fractal producen el mismo valor por lo que podría utilizarse cualquiera de ellas. Si la fisura es un fractal auto-semejante (como un movimiento browniano escalar), el concepto de “dimensión fractal” se convierte en ambiguo y es necesario especificar de cuál se trata. La más apropiada para el modelado de superficies fractales es la dimensión del compás (ver Mandelbrot, 1985).

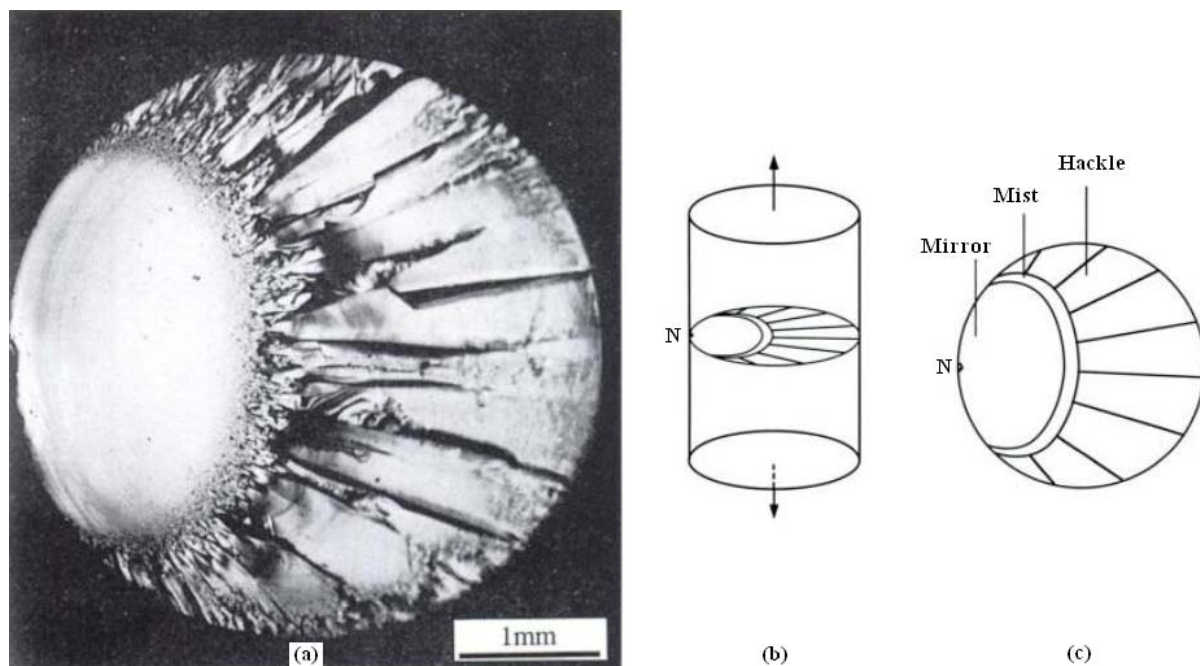


Figura 3: Regiones Mirror, Mist y Hackle sobre una superficie de fractura en una varilla de vidrio de 5mm de diámetro, ensayada a tracción uniaxial. La fisura se inicia en un pequeño defecto en la zona N, sobre la superficie de la varilla. (a) Imagen de microscopio de la superficie de fractura mostrando una zona Mirror aproximadamente elipsoidal, limitada por una delgada banda Mist que deviene en una gran zona Hackle. (b) Geometría del espécimen ensayado mostrando la zona de fractura, normal al eje longitudinal. (c) Croquis de las regiones Mirror, Mist y Hackle sobre la superficie de fractura.

4.2 Distribución de tensiones en la zona de la punta de una fisura fractal

Se asume que la fisura fractal es una curva (o superficie) fractal y que se modela con un único fractal con dimensión del compás D_C (o exponente de Hurst H). En un sólido bidimensional con una fisura, los puntos extremos de la curva fractal representan las puntas de fisura y el eje de la fisura se define como la línea que conecta esos puntos. En el caso de un sólido tridimensional, los filos de la fisura son curvas fractales con dimensión entre 1 y 2.

Según ha demostrado Mandelbrot (1985), la dimensión del compás varía asintóticamente con el exponente de Hurst con la forma $D_C = 1/H$, por lo que ésta puede exceder el valor 2 (de hecho puede adoptar valores arbitrariamente grandes). Suponiendo que la fisura, en tanto entidad física, no tiene dimensión fractal más allá de 2, se establece

$$D_C = \begin{cases} \frac{1}{H}, & \frac{1}{2} \leq H \leq 1 \\ 2, & 0 \leq H \leq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (25)$$

Esto implica que la variación de la dimensión del compás será tal cual la definición de Mandelbrot pero cumpliendo con la restricción de que $1 \leq D_c \leq 2$.

Una gráfica simple de la dimensión del compás versus el exponente de Hurst puede verse en la **Figura 4**. Allí se observa que las fisuras con exponente de Hurst menores que $\frac{1}{2}$ se comportan como si este valiera $\frac{1}{2}$.

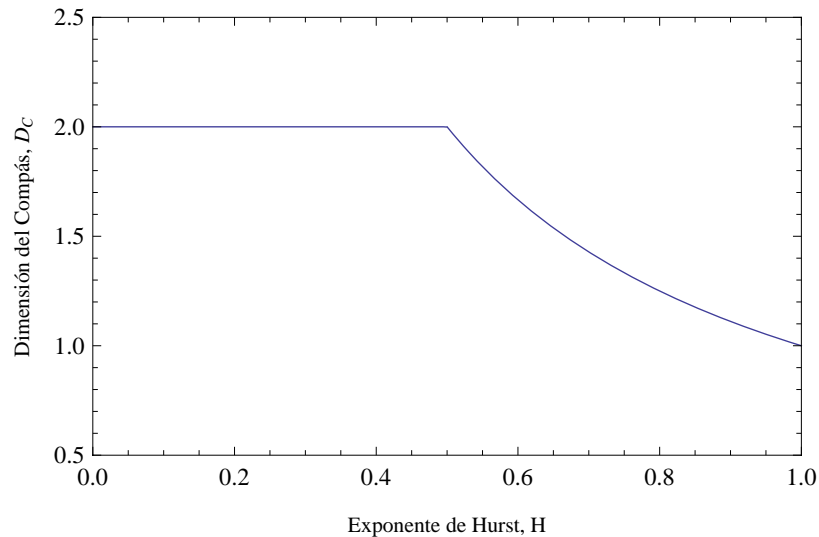


Figura 4: Gráfica de la variación de la dimensión del compás con respecto al exponente de Hurst.

Para el sólido infinito \mathcal{R} de la **Figura 5a** sujeto a un estado uniforme de tensiones en el infinito σ , la distribución de tensiones es uniforme en todos sus puntos. Si se considera ahora la existencia de una fisura fractal, con longitud aparente $2a$ y dimensión fractal D_c , la distribución es aún uniforme en casi todos los puntos, salvo en una región Ω_c alrededor de la fisura. Existe un disco \mathcal{R}_c tal que $\Omega_c \subseteq \mathcal{R}_c$ (ver **Figura 5b**).

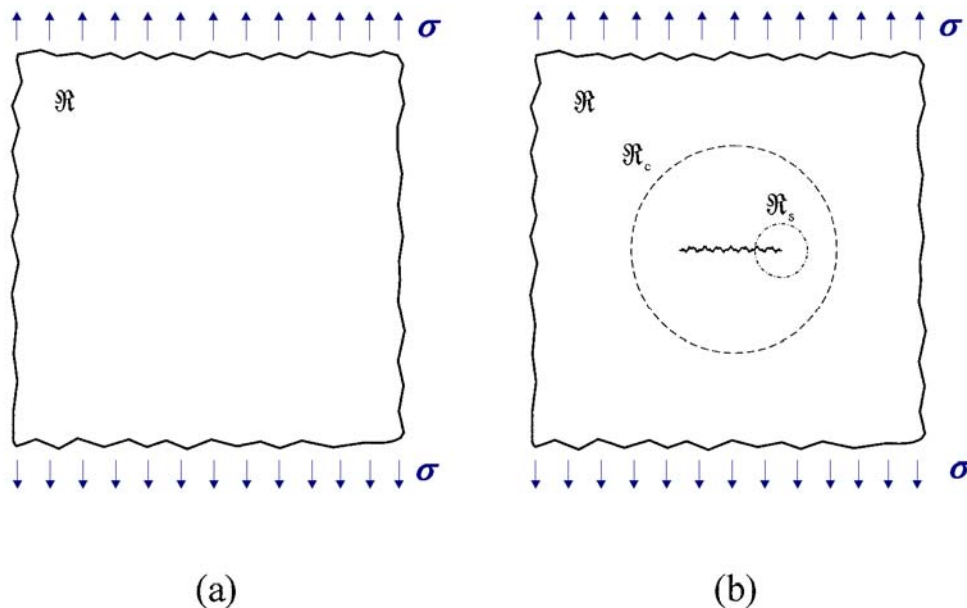


Figura 5: (a) Un sólido infinito sin fisura, sujeto a una tensión de tracción uniforme en el infinito. (b) Un sólido infinito con una fisura fractal ubicada perpendicular a la tensión aplicada, mostrando la zona afectada por la fisura.

Como se plantea en la teoría LEFM, la energía de superficie requerida para la propagación de fisuras suaves (no fractales) es proporcional a la longitud de las nuevas superficies creadas. Esto quedó establecido para un sólido general en la ecuación (2) y para una placa bidimensional en la (5). Esta afirmación asume implícitamente que la fisura, hablemos de un sólido bidimensional, es una curva rectificable. Debido a que los fractales son curvas no rectificables, este criterio no puede ser utilizado ya que lleva a la conclusión de que las fisuras fractales son imposibles pues la energía de superficie requerida para propagar la fisura fractal es infinita, por más pequeña que sea dicha propagación. Borodich (1997) modificó el criterio de Griffith para fisuras fractales definiendo una energía de superficie por unidad de medida fractal. Así, la energía de superficie requerida para propagar una fisura fractal será

$$S = 2t\gamma_f m_{D_c}, \quad (26)$$

donde t es el espesor de la placa bidimensional, $\gamma_f = \gamma_f(D_c)$ es la energía de superficie por unidad de dimensión fractal y m_{D_c} es la medida de división en el cálculo de la dimensión del compás, proporcional a a^{D_c} . Es importante notar que, a diferencia de lo expuesto para la teoría LEFM, aquí la energía específica de superficie γ_f no es únicamente propiedad del material sino también de la dimensión fractal de la fisura: en general, es posible la existencia de fisuras con distinta dimensión fractal en el mismo material.

La dimensión fractal D_c es una medida de la irregularidad de un conjunto fractal. La longitud real de la fisura fractal \tilde{a} es, por supuesto, mayor que su longitud nominal a (Rigurosamente, la longitud real de la fisura fractal es infinita. El término \tilde{a} se refiere a las longitudes de todas las curvas pre-fractales, es decir, de todas las colecciones de segmentos de línea con longitud finita, generadas para números finitos de iteraciones). Bajo estas condiciones, Yavari et al. (2002) proponen que $\tilde{a} \propto a^{D_c}$ y así, en base a lo planteado en las ecuaciones (25) y (26), postulan que:

$$S \propto a^{D_c} = \begin{cases} a^{\frac{1}{H}}, & \frac{1}{2} \leq H \leq 1 \\ a^2, & 0 \leq H \leq \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (27)$$

Si se supone ahora que una de las puntas de la fisura de la Figura 5b (por ejemplo, la derecha) experimenta una propagación virtual infinitésima δa , la energía de superficie requerida para esta extensión estará dada por

$$\delta S \propto \delta(a^{D_c}). \quad (28)$$

La energía de deformación del sistema mostrado en la Figura 5b puede escribirse de la siguiente forma

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA, \quad (29)$$

que difiere en un término de la (3), correspondiente a la teoría LEFM, ya que el vector de tensiones t_i no está definido en una superficie (o curva) fractal. El cambio en la energía de deformación debido a la propagación virtual de la fisura estará dado por

$$\delta\Pi = \delta \int_{\mathfrak{R}_C} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA \cong \delta \int_{\mathfrak{R}_C} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA, \quad (30)$$

porque la variación es predominante en la zona \mathfrak{R}_C .

Un suceso importante en los estudios teóricos de mecánica de fractura fractal es el cambio de orden en la singularidad de tensión en la zona de la punta de la fisura. Para una “versión fractal” de la fisura de Griffith, la singularidad clásica $\sigma_{ij} \propto r^{-1/2}$ (donde r es la distancia a una punta de la fisura, ver [Figura 1](#)) es reemplazada por una más débil, dada por $\sigma_{ij} \propto r^{-\alpha}$ donde α es un coeficiente que depende de la dimensión fractal del compás D_C y por lo tanto, del exponente de Hurst, H . Suponiendo que el material es isótropo, lineal y elástico se asumen, en las cercanías de la punta de la fisura, las siguientes expresiones asintóticas para tensiones y deformaciones

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K_I^f r^{-\alpha} f_{ij}(\theta), \quad (31)$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = K_I^f r^{-\alpha} C_{ijkl} f_{kl}(\theta), \quad (32)$$

donde K_I^f es el factor de intensidad de tensiones del modo I para la fisura fractal (cuya dimensión es $[K_I^f] = FL^{\alpha-2}$), C_{ijkl} es el tensor de elasticidad de cuarto orden y $\alpha = \alpha(D_C)$ es el coeficiente fractal. Las expresiones (31) y (32) son válidas únicamente en un disco \mathfrak{R}_S de radio r_S . Obviamente, $r_S = r_S(\alpha, D_C)$ por lo que, de acuerdo con el análisis dimensional, debe ser $r_S \propto \alpha$.

El cambio en la energía de deformación se da principalmente en \mathfrak{R}_S , por lo que en la ecuación (30) puede reemplazarse \mathfrak{R}_C por \mathfrak{R}_S con un error insignificante. Así

$$\delta\Pi \cong \delta \int_{\mathfrak{R}_S} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA, \quad (33)$$

expresión que puede reescribirse como:

$$\delta\Pi \propto r_S^{-\alpha} r_S^{-\alpha} r_S^2 \propto a^{-\alpha} a^{-\alpha} a^2 = a^{2-2\alpha}, \quad (34)$$

debido a que, en la expresión (33), tanto σ_{ij} como ε_{ij} son proporcionales a $r_S^{-\alpha}$ y a que de la integración en el área se obtiene un factor proporcional a r_S^2 .

De acuerdo con el criterio de Griffith, ya expuesto para la teoría LEFM, se tiene $\delta\Pi = \delta S$, por lo que de las expresiones (28) y (34) se obtiene α en términos de D_C

$$\alpha = \frac{2-D_C}{2}, \quad 1 \leq D_C \leq 2, \quad (35)$$

para fisuras fractales auto-similares y también α en términos de H

$$\alpha = \begin{cases} \frac{2H-1}{2H}, & \frac{1}{2} \leq H \leq 1 \\ 0, & 0 \leq H \leq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (36)$$

si el fractal considerado para modelar la fisura es auto-semejante.

Es interesante analizar los límites de la ecuación (36), con la ayuda de la gráfica presentada en la Figura 6. Cuando la dimensión del compás D_C se acerca a 1, sucede que α se aproxima a $\frac{1}{2}$ y el coeficiente de Hurst H a 1. Esto es un caso límite, que corresponde a una fisura suave, no fractal. El otro caso límite se obtiene cuando $D_C = 2$ o bien $\alpha = 0$ o, lo que es lo mismo, $H = 0$. Esta fisura es una curva fractal infinitamente irregular y representa un vacío bidimensional llenando todo el plano, similar a una cavidad elíptica. También es de gran importancia notar que para fisuras auto-semejantes, es decir con $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$, se obtiene $\alpha = 0$, por lo que la teoría DFFM predice tensiones finitas en la zona de la punta de la fisura.

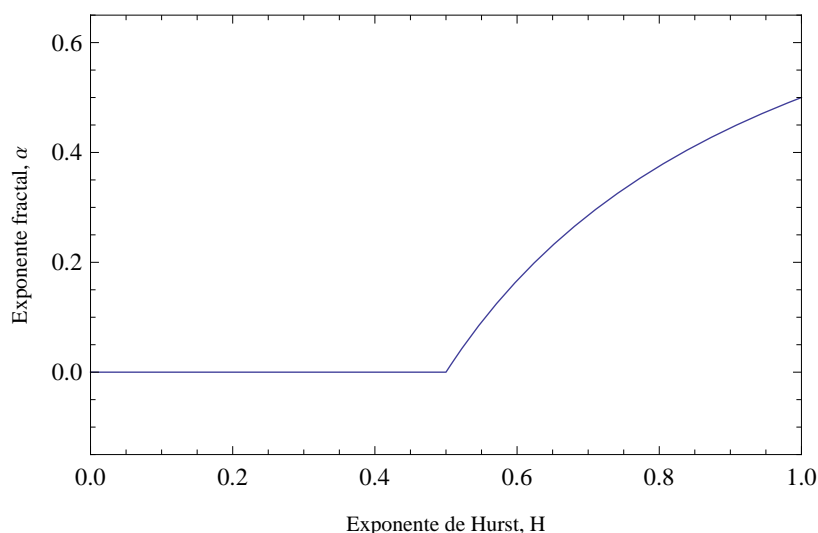


Figura 6: Gráfica de la variación del exponente fractal, α , con respecto al exponente de Hurst, H .

En resumidas cuentas, para el modo I de fractura fractal se tendrá, reemplazando (35) y (36), respectivamente en (31), la siguiente distribución tensional para fisuras auto-similares

$$\sigma_{ij}^f(r, \theta) = K_I^f r^{\frac{D_C-2}{2}} f_{ij}(\theta, D_C), \quad (37)$$

y la siguiente distribución para fisuras auto-semejantes

$$\sigma_{ij}^f(r, \theta) = K_I^f r^{\frac{1-2H}{2H}} f_{ij}(\theta, H). \quad (38)$$

4.3 Factores de intensidad de tensiones para fisura fractal en una placa bidimensional

Teniendo en cuenta que los campos de tensiones planteados en (37) y (38) corresponden a un problema elástico lineal al igual que sucede en la teoría LEFM, Yavari et al. (2002) proponen que el factor fractal de intensidad de tensiones K_I^f sea proporcional a la tensión σ aplicada en la lejanía de la fisura, es decir

$$K_I^f = \sigma \Phi(a, D_C). \quad (39)$$

La analogía con la expresión clásica de K_I y un simple análisis dimensional sugieren la siguiente dependencia del factor fractal de intensidad de tensiones con respecto a los parámetros del problema

$$K_I^f = \chi(D_C) \sigma \sqrt{\pi a^{2-D_C}} = \chi(\alpha) \sigma \sqrt{\pi a^{2\alpha}}, \tag{40}$$

Donde $\chi(D_C)$ es una función desconocida tal que cumpla $\chi(D_C = 1) = 1$. Es importante ver que cuando D_C se acerca a uno, la expresión (40) se transforma en la (11), que corresponde al factor de intensidad de tensiones clásico.

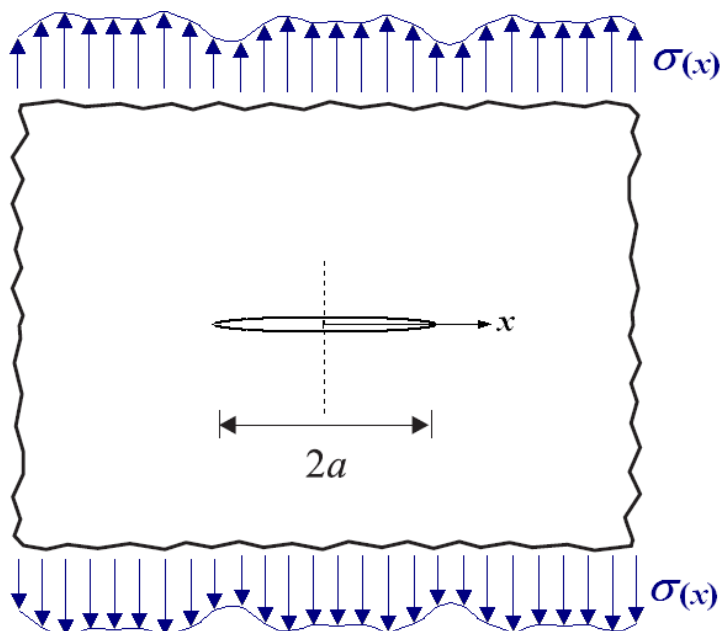


Figura 7: Placa bidimensional con una fisura suave en el centro, sometida a una distribución tensional normal arbitraria en las lejanías de la fisura.

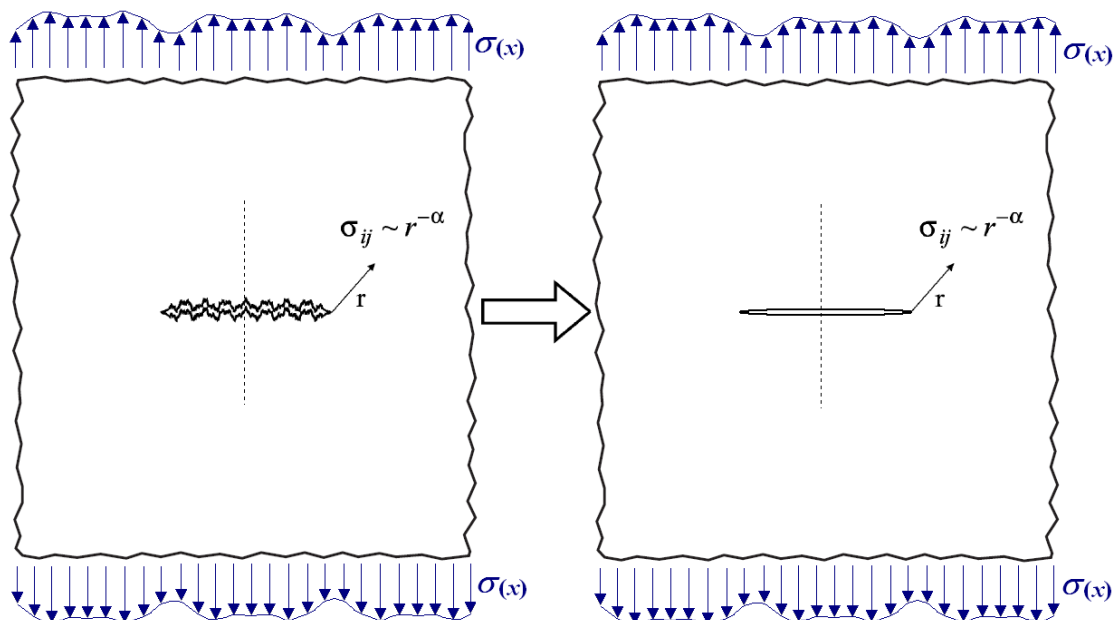


Figura 8: Método de fisura suave imaginaria. Una fisura fractal es reemplazada por una fisura suave con el campo singular de tensiones de la fisura fractal.

Por otra parte, la expresión del factor de intensidad de tensiones para una placa bidimensional conteniendo una fisura suave en el centro, sometida a una distribución

tensional normal cualquiera $\sigma(x)$ en las lejanías de la fisura, como se muestra en la [Figura 7](#) está dada por (ver [Broek, 1982](#) y/o [Perez Ipiña, 2004](#))

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \sigma(x) \left\{ \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right\} dx. \quad (41)$$

Para llevar la expresión (41) al caso general de fisura fractal evitando el proceso de integración sobre la curva fractal, [Wnuk y Yavari, 2003](#) proponen un llamado “*método de fisura suave imaginaria*”. Por este método, se asume que cuando el orden fractal de singularidad $\sigma_{ij} \propto r^{-\alpha}$ se aplica a la fisura suave en lugar del clásico $\sigma_{ij} \propto r^{-1/2}$, es decir, cuando la fisura fractal es reemplazada por una fisura suave cuyo campo de tensiones sea el correspondiente a la fisura fractal, se llega a una primera aproximación de la solución exacta del factor fractal de intensidad de tensiones (ver [Figura 8](#)). Bajo estas consideraciones, la generalización de la fórmula (41) conduce a

$$\widehat{K}_I^f = \frac{1}{(\pi a)^\alpha} \int_0^a \sigma(x) \left\{ \left[\frac{a+x}{a-x} \right]^\alpha + \left[\frac{a-x}{a+x} \right]^\alpha \right\} dx, \quad (42)$$

donde \widehat{K}_I^f representa el factor fractal de intensidad de tensiones obtenido como una aproximación basada en la validez del *método de fisura suave imaginaria*. Mediante sencillas operaciones matemáticas, la (42) puede escribirse

$$\widehat{K}_I^f = \frac{1}{(\pi a)^\alpha} \int_0^a \sigma(x) \frac{(a-x)^{2\alpha} + (a+x)^{2\alpha}}{(a^2 - x^2)^\alpha} dx. \quad (43)$$

Esta expresión representa el factor fractal de intensidad de tensiones del modo I de fractura, con una precisión de cierta constante multiplicativa $C = C(\alpha, a)$. Así, de la (43)

$$K_I^f = \frac{C(\alpha, a)}{(\pi a)^\alpha} \int_0^a \sigma(x) \frac{(a-x)^{2\alpha} + (a+x)^{2\alpha}}{(a^2 - x^2)^\alpha} dx. \quad (44)$$

Esta igualdad debe ser análoga a aquella presentada previamente en la ecuación (40), identificando la tensión $\sigma(x)$ con la σ de la (40). En la (40) debe ser que $\chi(\alpha = 1/2) = 1$, para que la teoría DFFM se ajuste a la LEFM y $\chi(\alpha = 0) = 2$, para que en el caso de una fisura con dimensión fractal $D_C = 2$ la predicción de la teoría sea un vacío de forma elíptica en el material. Bajo estas condiciones, [Wnuk y Yavari \(2003\)](#) proponen el valor de la constante de ajuste como

$$C(\alpha, a) = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}} \right)^{2\alpha-1}, \quad (45)$$

siendo $C(\alpha = 1/2, a) = 1$ y $C(\alpha = 0, a) = \sqrt{\pi}/a$. Combinando la expresión (45) con la (44) se obtiene una mejor aproximación del factor fractal de intensidad de tensiones del modo I de fractura para una placa bidimensional con una fisura en el centro de la misma

$$K_I^f = \frac{a^{\alpha-1}}{\pi^{2\alpha-\frac{1}{2}}} \int_0^a \sigma(x) \frac{(a-x)^{2\alpha} + (a+x)^{2\alpha}}{(a^2-x^2)^\alpha} dx. \quad (46)$$

Puede comprobarse fácilmente que si $\alpha = 1/2$ y la tensión es constante $\sigma(x) = \sigma$, la (46) genera el clásico resultado $K = \sigma\sqrt{\pi a}$, que predice la LEFM. Si $\alpha = 0$, se obtiene $K_I^f = 2\sigma\sqrt{\pi}$, que representa una fisura que ha degenerado a un vacío bidimensional, es decir, un agujero elíptico en la placa. Es importante notar que en este caso, el factor de intensidad de tensiones puede asociarse al factor de concentración de tensiones propuesto por Inglis en 1913 (ver [Saouma, 2004](#) o [Pilkey, 1997](#)) para un agujero elíptico en un medio infinito, es decir: $1 + 2(a/b)$, donde $2a$ y $2b$ son los diámetros principales de la elipse. La teoría DFFM sugiere un factor $2\sqrt{\pi}$ que se corresponderá entonces a una relación $a/b = \sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \cong 1.27$.

Dada la simplificación realizada al obtener la expresión de K_I^f , esto es: suponer una fisura suave con el campo singular de tensiones de la fisura fractal, es de esperarse que la (46) sea más precisa cuanto menor sea la dimensión fractal, es decir, cuanto menos irregular sea la fisura fractal. Las comparaciones entre valores de K_I^f para distintos α carecen de sentido físico, dado que la dimensión (en términos del Análisis Dimensional) de K_I^f cambia al variar α .

4.4 Tasa fractal de disipación de energía

La tasa de disipación de energía para el modelo DFFM deberá ser, análogamente a lo expuesto para la teoría LEFM, función de K_I^f , D_C y E' . Los efectos de a y σ se hallan implícitos en K_I^f . De acuerdo al teorema de Buckingham, [Yavari \(2001\)](#) propone

$$G^f = \Psi(D_C) \frac{(K_I^f)^2}{E'}, \quad (47)$$

donde $\Psi(D_C)$ es una cierta función escalar y G^f se define como la tasa de disipación de energía por unidad de medida de la dimensión fractal del compás D_C . Su expresión es similar a la (14), correspondiente a la LEFM, y recupera dicha tasa de disipación de energía clásica cuando $D_C = 1$ y $\Psi(1) = 1$.

4.5 Tensión crítica de fractura fractal

Tanto la dimensión fractal del compás como el exponente de Hurst representan un índice de complejidad y no proveen información suficiente como para distinguir diferentes fisuras irregulares una de la otra. En otras palabras, la aplicación de los conceptos de geometría fractal a la mecánica de fracturas no deja de ser ambigua en cierto modo y la mayoría de las veces resulta necesario un análisis específico de las fisuras fractales para ajustar la teoría. Con este problema se tropieza al intentar aproximar la función $\Psi(D_C)$. De todas formas, como en la determinación de la tensión crítica la tasa fractal de disipación de energía G^f es comparada con su correspondiente valor crítico, [Wnuk y Yavari \(2007\)](#) proponen la equivalencia de considerar $G^f / \Psi(D_C)$ en lugar de la expresión en (47). Así, se define la siguiente tasa de disipación

$$G^f = \frac{(K_I^f)^2}{E'} = \frac{\chi(\alpha)^2 \sigma^2 \pi a^{2\alpha}}{E'}, \quad (48)$$

donde se ha reemplazado K_I^f por su definición de (40). Para la fisura suave “auxiliar” (ver Figura 8), la energía potencial “fractal” disponible para fractura puede definirse (Wnuk y Yavari, 2007) como

$$-\Pi_f = 2 \int_0^a G^f da = \frac{\chi(\alpha)^2 \sigma^2 \pi a^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)E'}. \quad (49)$$

Considerando el criterio de propagación discreto propuesto para la teoría QFM en la expresión (19) se tiene que, en el momento de la extensión

$$G_c^f \leq -\frac{\Delta_{a_0} \Pi_f}{\Delta \ell} = \frac{\chi(\alpha)^2 \sigma^2 \pi}{a_0 (2\alpha+1) E'} \left[(a+a_0)^{2\alpha+1} - a^{2\alpha+1} \right]. \quad (50)$$

Si la tensión crítica es la mínima que produce la extensión de la fisura, a partir de la (50) se obtiene la siguiente expresión

$$\sigma_{crit}^{DFFM} = \sqrt{\frac{(2\alpha+1)E'G_c^f}{\pi}} \frac{\sqrt{a_0}}{\chi(\alpha)\sqrt{(a+a_0)^{2\alpha+1} - a^{2\alpha+1}}} \quad (51)$$

correspondiente a la tensión crítica de fractura debido a la presencia de una fisura fractal.

4.6 Campo singular de tensiones para fisura fractal en placa bidimensional

A continuación se determina el campo de tensiones $\sigma_{ij} \propto r^{-\alpha}$ en las cercanías de una fisura fractal, para una placa bidimensional como la del ejemplo clásico de Griffith (ver Figura 1). Para ello, Wnuk y Yavari (2003) definen una función compleja de Westergaard, Z , que depende de $z = x + iy$ y del parámetro fractal α como

$$Z(z, \alpha) = \frac{K_I^f}{(2\pi z)^\alpha}, \quad (52)$$

donde las coordenadas cartesianas x e y tienen su origen en la punta de la fisura (ver Figura 1). Si la variable compleja se reemplaza por su forma polar $z = re^{i\theta}$, donde r y θ son coordenadas polares medidas desde la punta de la fisura, la (52) puede reescribirse

$$Z(z, \alpha) = \frac{K_I^f}{(2\pi r)^\alpha} [\cos(\alpha\theta) + i \sin(\alpha\theta)]. \quad (53)$$

Para calcular los componentes del campo de tensiones es necesario derivar la expresión anterior y completar las expresiones de Rice (1968), dadas por

$$\sigma_{xx}^f = \text{Re } Z + y \text{Im } Z', \quad (54)$$

$$\sigma_{yy}^f = \text{Re } Z + y \text{Im } Z', \quad (55)$$

$$\sigma_{xy}^f = y \text{Re } Z'. \quad (56)$$

Así, se obtiene el siguiente campo de tensiones, válido en las cercanías de la punta de una fisura fractal

$$\sigma_{xx}^f(r, \theta, \alpha) = \frac{K_I^f}{(2\pi r)^\alpha} \left\{ \cos(\alpha\theta) - \alpha \sin \theta \sin[(\alpha + 1)\theta] \right\}, \quad (57)$$

$$\sigma_{yy}^f(r, \theta, \alpha) = \frac{K_I^f}{(2\pi r)^\alpha} \left\{ \cos(\alpha\theta) + \alpha \sin \theta \sin[(\alpha + 1)\theta] \right\}, \quad (58)$$

$$\sigma_{xy}^f(r, \theta, \alpha) = \frac{K_I^f}{(2\pi r)^\alpha} \alpha \sin \theta \sin[(\alpha + 1)\theta], \quad (59)$$

que es totalmente compatible al presentado en la ecuación (37). Puede observarse cómo la teoría DFFM predice ausencia de singularidad para $\alpha = 0$ (una fisura con dimensión fractal $D_C = 2$) y que se ajusta a los resultados de la LFM para $\alpha = 1/2$ ($D_C = 1$).

4.7 Muesca fractal

La fisura real fractal es en este caso simplificada a un modelo que inscribe el campo singular fractal de tensiones en una fisura tipo muesca o *notch*. La idea que se persigue es reemplazar la fisura fractal por una muesca con un radio finito de curvatura, como se muestra en la Figura 9. El objetivo es encontrar la dependencia de ese radio finito ρ_α , presente en la punta de la muesca, con respecto al exponente fractal α .

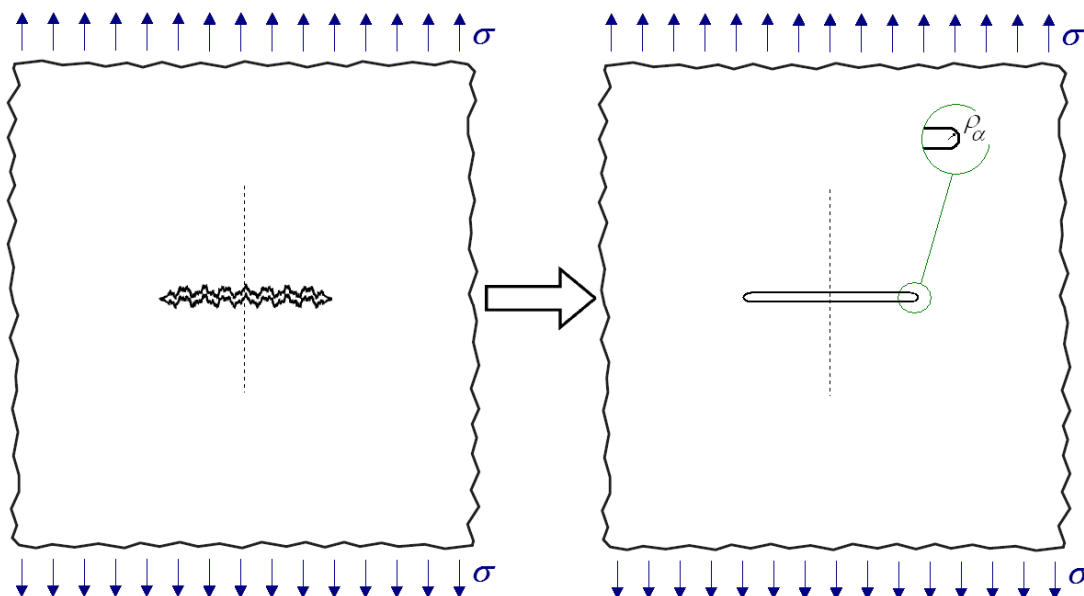


Figura 9: La fisura fractal es reemplazada por una muesca suave equivalente.

Si se hace referencia al plano en el que se encuentra la fisura, perpendicular a la placa, la expresión (58) produce

$$\sigma_{yy}^f(r, 0, \alpha) = \frac{K_I^f}{(2\pi r)^\alpha}. \quad (60)$$

De acuerdo con Creager y Paris (1967) la tensión de apertura para una muesca como la de la Figura 10 es

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho_\alpha}{2r} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + \dots, \quad (61)$$

siendo ahora la coordenada radial r definida en la punta de una fisura suave equivalente, según se muestra en la Figura 10. Vale aclarar que, según lo dicho es $r \geq \rho_\alpha/2$. Notar que para $\rho_\alpha \rightarrow 0$ se obtiene la clásica expresión correspondiente a la fisura suave de Griffith, como si la punta de ésta se hallara en el centro de curvatura del borde de la muesca. Si se considera únicamente el plano de la fisura ($\theta = 0$), la (61) se convierte en

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \frac{\rho_\alpha}{2r}\right). \quad (62)$$

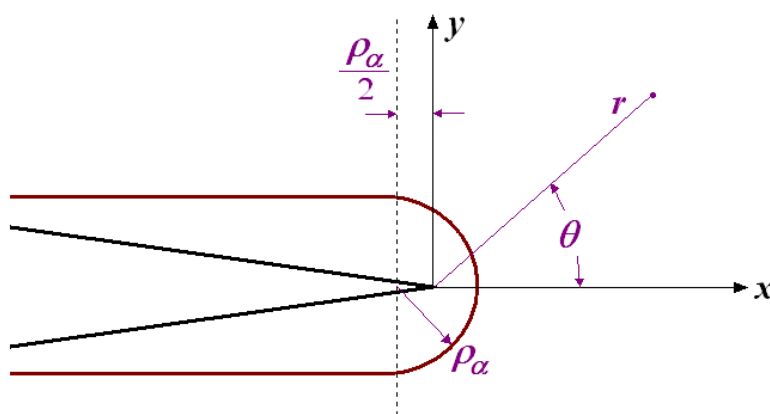


Figura 10: Sistema de referencia utilizado en el análisis de la muesca.

Para hallar una ley de variación del radio fractal ρ_α se igualan las tensiones expresadas en (60) y (62) en la zona del frente de la fisura, esto es

$$\frac{2K_I}{\sqrt{\pi\rho_\alpha}} = \frac{K_I^f}{(2\pi r)^\alpha} \Bigg|_{r=r^*}. \quad (63)$$

En el miembro izquierdo de la ecuación anterior, la (62) se ha evaluado en $r = \rho_\alpha/2$. Ahora se debe analizar qué valor debe adoptar r^* en el miembro derecho de la ecuación, es decir, a qué distancia de la punta de la fisura debe evaluarse la tensión de la ecuación (60). Si se toma $r = 0$ se cae en una singularidad (salvo, claro está, para el caso extremo en que $\alpha = 0$). Para saltar esa indefinición, Wnuk y Yavari (2005) proponen adoptar una cierta distancia finita de la punta de la fisura suave equivalente, siendo la distancia r^* una cierta fracción del radio ρ_α , es decir

$$r^* = \lambda\rho_\alpha, \quad (64)$$

donde el coeficiente λ se determinará a continuación en un estudio paramétrico.

Wnuk y Yavari (2005) formulan la hipótesis de que el radio ρ_α crece monótonicamente a medida que el parámetro α decrece de $1/2$ a 0, hasta alcanzar cierto valor finito cuando $\alpha = 0$. La razonabilidad de esta hipótesis se basa en lo que sigue. La dimensión fractal es una medida de la irregularidad de una superficie de fractura. Una fisura más irregular tiene un menor

grado de singularidad en el campo tensional cercano, es decir $\alpha(D_C) = (2 - D_C)/2$, es una función monótonicamente decreciente de D_C . La idea que se persigue es reemplazar la fisura fractal por una muesca con un radio finito de curvatura. Se espera que para la fisura más irregular ($D_C = 2$) se corresponda una muesca con un radio de curvatura positivo. Se conoce también que para la fisura menos irregular, es decir, para una fisura suave, se corresponde una muesca degenerada con radio de curvatura nulo (para $\alpha = 1/2$ es $\rho_\alpha = 0$). Siguiendo este razonamiento, el radio de curvatura debe ser, de alguna manera, otra medida de la irregularidad, por lo que es lógico pensar que debería ser una función monótonicamente creciente de D_C . Por otra parte, considerando dos fisuras fractales con dimensiones fractales $D_{C1} < D_{C2}$, será razonable asumir que $\rho_{\alpha1} < \rho_{\alpha2}$. Como se verá, esta suposición es útil para encontrar un valor razonable de λ . Sustituyendo la (64) en la (63), junto con las expresiones (11) y (40) correspondientes al factor de intensidad de tensiones clásico de Griffith K_I y al factor fractal de intensidad de tensiones K_I^f , respectivamente, se obtiene la siguiente igualdad

$$\rho_\alpha(\alpha, \lambda) = \frac{a}{\pi} \left[\frac{\chi(\alpha)}{2^{\alpha+1} \lambda^\alpha} \right]^{2\alpha-1}, \quad (65)$$

donde la forma de la función $\chi(\alpha)$ puede obtenerse por igualación de las expresiones (40) y (46) del factor fractal de intensidad de tensiones.

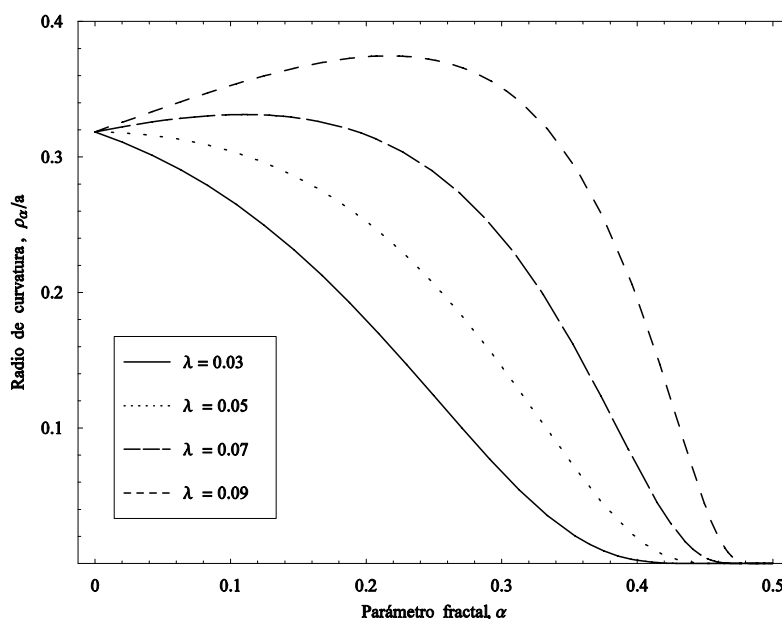


Figura 11: Gráfica del radio de curvatura normalizado ρ_α/a con respecto del parámetro fractal.

Curvas de $\rho_\alpha(\alpha, \lambda)$ para distintos valores de λ se muestran en la Figura 11. La gráfica muestra que para valores de λ mayores que –aproximadamente– 0.05 las curvas muestran al menos una zona en que la derivada de ρ_α con respecto a α es positiva, es decir, ρ_α no crece monótonicamente al ir α de $1/2$ a 0. El valor exacto de λ que se busca vendrá dado por la raíz de la ecuación

$$\left. \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (66)$$

Al resolver esta igualdad para λ se obtiene un valor $\lambda_{trans} = 0.0506705$, que finalmente se redondea volviendo al 0.05 original (Wnuk y Yavari, 2005). Con este valor, para $D_C = 2$ (esto es $H = 1/2$ y $\alpha = 0$), la expresión (65) produce el valor límite $\rho_\alpha = a / \pi$, que corresponde a un factor de magnificación de aproximadamente 3.54. Para el otro caso límite donde $D_C = 1$ ($H = 1$ y $\alpha = 1/2$) produce $\rho_\alpha = 0$, como se esperaba.

4.8 Predicción del efecto Mirror-Mist-Hackle

Como se vio en el apartado anterior, para una fisura de puntas redondeadas o muesca suave con radio ρ , Creager y Paris (1967) obtuvieron la siguiente expresión para la tensión cuando $\theta = 0$ (ver Figura 10)

$$\sigma(r) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \frac{\rho}{2r} \right), \tag{67}$$

donde $r \geq \rho / 2$ y donde para $\rho \rightarrow 0$ se obtiene la clásica expresión correspondiente a la tensión en una fisura suave o de Griffith. La comparación entre las tensiones críticas obtenidas para una fisura suave y una muesca suave, considerando para ambas propagación discreta, presenta una relación entre los correspondientes factores críticos de intensidad de tensiones. Esta relación fue introducida por Pugno et al. (2005)

$$K_c^m = K_c \sqrt{1 + \frac{\zeta}{2}} = K_c \sqrt{1 + \frac{\rho}{2a_0}}, \tag{68}$$

donde K_c^m representa el factor crítico de intensidad de tensiones para una muesca suave considerando propagación discreta y $\zeta = \rho / a_0$. Pugno et al. (2005) también mostraron que, análogamente a la expresión (22), la tensión crítica de fractura para una muesca suave en el caso de la teoría QFM puede escribirse

$$\sigma_{crit}^{QFM} = \frac{K_c^m}{\sqrt{\pi \left(a + \frac{a_0}{2} \right)}} = \frac{K_c^m}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{1 + \frac{\rho}{2a_0}}{1 + \frac{a_0}{2a}}} = \sigma_{crit}^{LEFM} \sqrt{\frac{1 + \frac{\rho}{2a_0}}{1 + \frac{a_0}{2a}}}, \tag{69}$$

donde se ha adoptado σ_{crit}^{QFM} para referir a la tensión crítica de fractura para la muesca suave. Si la constante microestructural $\zeta = \rho / a_0$ y el tamaño de fisura adimensional $\xi = a / a_0$ son utilizados, la expresión anterior toma la forma

$$\sigma_{crit}^{QFM} = \sigma_{crit}^{LEFM} \sqrt{\frac{1 + \frac{\zeta}{2}}{1 + \frac{1}{2\xi}}}. \tag{70}$$

Ahora, dado que la tasa crítica de disipación de energía es proporcional al cuadrado de las tensiones críticas –ecuaciones (13), (21)–, será

$$\frac{G_c^{QFM}}{G_c^{LEFM}} = \left(\frac{\sigma_{crit}^{QFM}}{\sigma_{crit}^{LEFM}} \right)^2 = \frac{1 + \frac{\zeta}{2}}{1 + \frac{1}{2\xi}}. \tag{71}$$

Si también se recuerda que $G = 2\gamma$, el cociente de la expresión (71) también es representativo de γ_a / γ , donde γ_a es la energía específica de fractura, relacionada a la teoría QFM, dependiente de la longitud fisura. Como se muestra en la Figura 12, la dependencia de γ_a con respecto a la longitud normalizada de fisura $\xi = a / a_0$ se da fundamentalmente para fisuras pequeñas.

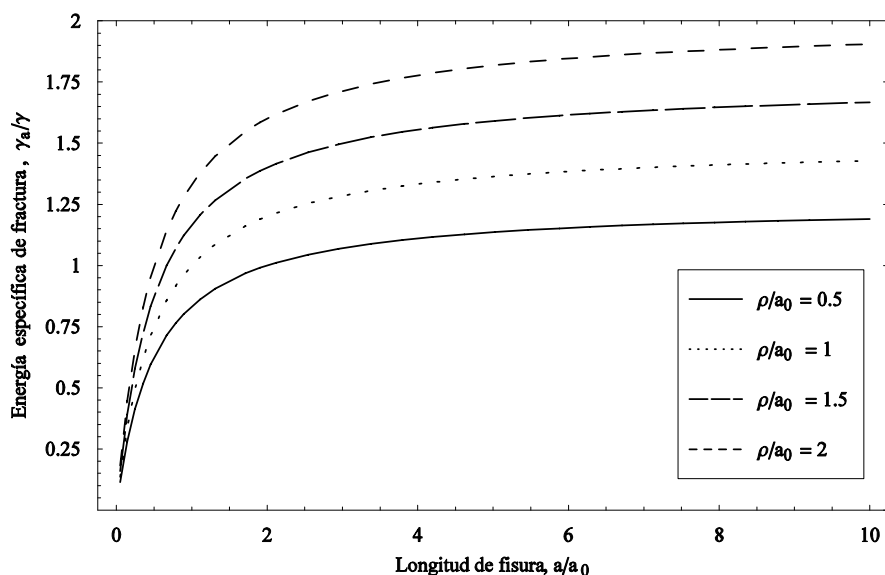


Figura 12: Energía específica de fractura adimensional en función de la constante microestructural y el tamaño de fisura adimensional.

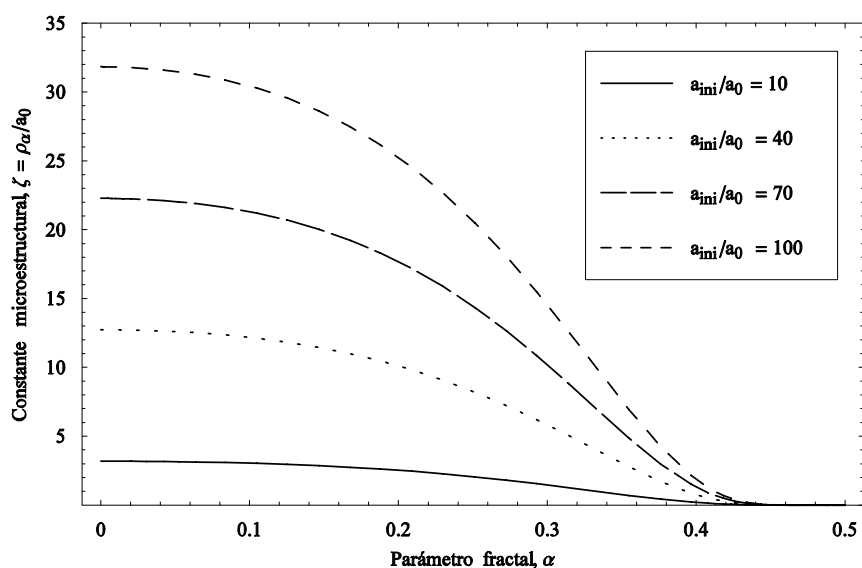


Figura 13: Relación entre la constante microestructural $\zeta = \rho_\alpha / a_0$ y el exponente fractal α .

Dada una muesca fractal, también puede definirse una muesca suave equivalente con el siguiente radio de curvatura

$$\rho_\alpha = \frac{a_{ini}}{\pi} \left[\frac{\chi(\alpha)}{2^{\alpha+1} 0.05^\alpha} \right]^{\frac{2}{2\alpha-1}}, \quad (72)$$

como se vio en el apartado anterior, donde con a_{ini} se designa a la longitud nominal de fisura inicial. Dividiendo por el cuanto de fractura a_0 se obtiene una expresión para la constante ζ

$$\zeta = \frac{\rho_\alpha}{a_0} = \frac{a_{ini}}{a_0 \pi} \left[\frac{\chi(\alpha)}{2^{\alpha+1} 0.05^\alpha} \right]^{\frac{2}{2\alpha-1}} \quad (73)$$

La Figura 13 muestra una fuerte dependencia del radio de curvatura de la muesca ρ_α con el parámetro fractal α , que lógicamente se asume mayor cuando la severidad del daño es alta (esto es, para altos valores de a_{ini} / a_0). Notar que para valores cercanos a $\alpha = 1/2$, el radio ρ_α se acerca a cero independientemente de cuál sea la profundidad de la muesca en cuestión.

De la ecuación (72) se desprende la posibilidad de obtener un valor analítico del parámetro fractal. Esto puede hacerse resolviendo para α la ecuación

$$\frac{\rho_\alpha}{a_{ini}} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\chi(\alpha)}{2^{\alpha+1} 0.05^\alpha} \right]^{\frac{2}{2\alpha-1}} = 0. \quad (74)$$

Es importante notar que el cociente a_{ini} / a_0 se convierte en a / a_0 tan pronto como la muesca comienza su proceso de propagación, por lo que la ecuación (74) sugiere que el exponente fractal α se convierte en una cierta función de la profundidad de muesca instantánea durante la extensión de la fisura.

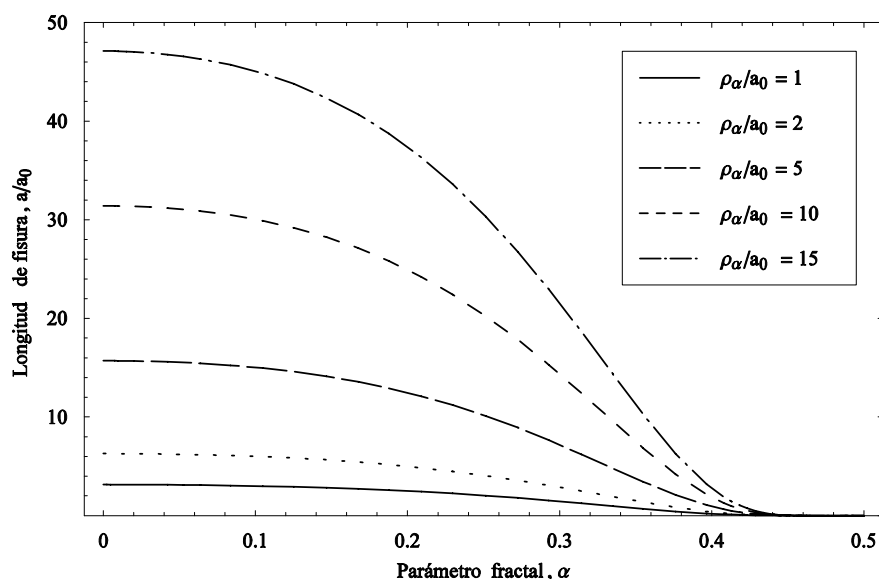


Figura 14: Dependencia del parámetro fractal con respecto a la longitud de fisura (profundidad de muesca) en el proceso de propagación.

Gráficas de la dependencia del parámetro fractal α con respecto a la profundidad de muesca a / a_0 , para distintos valores de la constante microestructural $\zeta = \rho / a_0$, pueden observarse en la Figura 14. Se ve claramente que, para muescas en proceso de propagación, la función describe el efecto de transición Mirror-Mist-Hackle (ver Figura 3). Esto es, al propagarse la fisura, su dimensión fractal o, lo que es lo mismo su rugosidad, aumenta violentamente. Todo esto expresado en términos del descenso brusco de α . El fenómeno se presenta más marcadamente para valores pequeños de ζ , es decir: cuando el valor de ρ se acerca a a_0 o, lo que es lo mismo, en muescas que tienden a ser fisuras. La DFFM es la

primera teoría que aporta una representación, aunque sea cualitativa, del fenómeno de transición Mirror-Mist-Hackle.

5 CÁLCULOS DEL FACTOR K_I PARA UNA PLACA BIDIMENSIONAL

En esta sección se presentan algunos resultados de la teoría DFFM, relacionados al factor fractal de intensidad de tensiones de una placa bidimensional de dimensiones finitas. Se observa la variación del factor fractal de intensidad de tensiones con respecto al coeficiente fractal α y luego se analiza su comportamiento frente al tamaño de fisura para distintos valores de α comparando también con soluciones teóricas provenientes de la LEFM y con un cálculo numérico utilizando el programa ABAQUS.

La placa utilizada para el cálculo es de acero ($\nu = 0.3$, $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa) y tiene las dimensiones $b = 100\text{mm}$, $h = 200\text{mm}$, $t = 10\text{mm}$ y la longitud nominal de fisura que puede variar entre 0 y b . La tensión constante aplicada en el extremo es de $\sigma = 100\text{MPa}$ (Ver [Figura 15](#)).

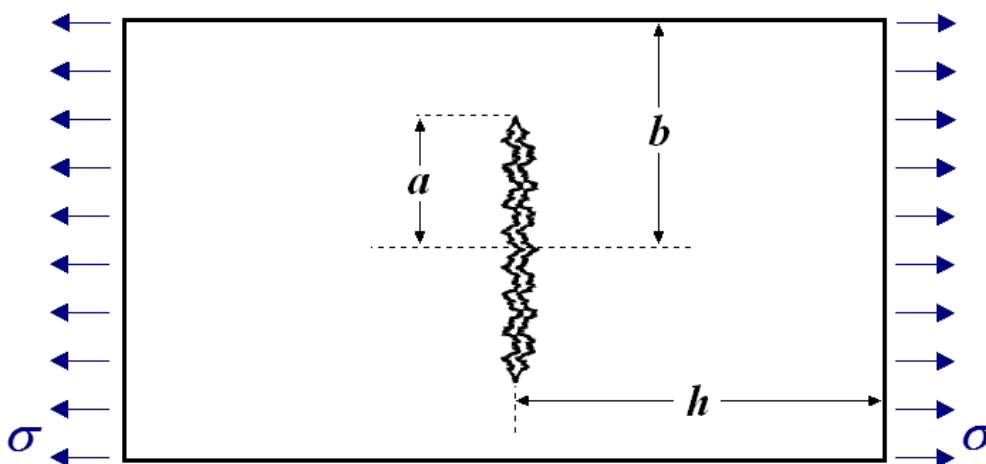


Figura 15: Referencias de las dimensiones de la placa finita modelada.

Es importante mencionar que la placa analizada, al no ser una “placa infinita”, no responde exactamente a las expresiones del factor de intensidad de tensiones presentadas tanto para la LEFM y la DFFM, debido al efecto mismo de las dimensiones finitas del sistema (Ver [Broek, 1982](#)). Así es que tanto la expresión (11) como la (46) deben ser modificadas con un factor de corrección que dependerá de la forma geométrica de la placa (o estructura) analizada. Para el caso que nos convoca, [Tada et al. \(1985\)](#) proponen el siguiente factor correctivo para el factor de intensidad de tensiones:

$$F = 0.265(1 - a/b)^4 + \frac{0.857 + 0.265(a/b)}{(1 - a/b)^{3/2}}. \quad (75)$$

La [Figura 16](#) muestra la variación del factor K_I^f con respecto al parámetro fractal α , para distintos valores de la profundidad de la fisura a/b . Se observa que para valores de fisura de gran rugosidad, es decir con $\alpha \rightarrow 0$, la dependencia de K_I^f es cada vez menor. Para esos valores muy pequeños de α , K_I^f tiende a comportarse como un factor de concentración de tensiones, es decir, como si la placa tuviese un vacío bidimensional (una deformidad geométrica).

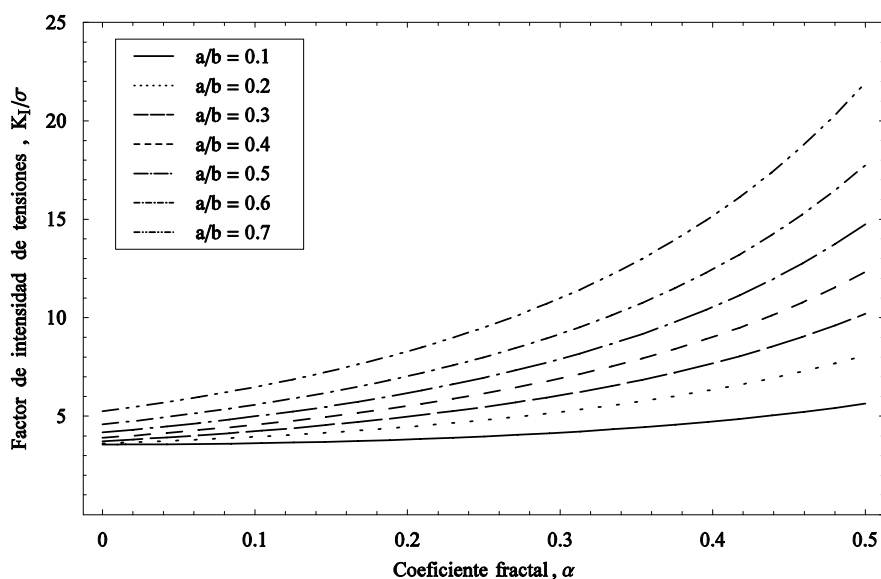


Figura 16: Dependencia del factor de intensidad de tensiones con respecto al parámetro fractal α .

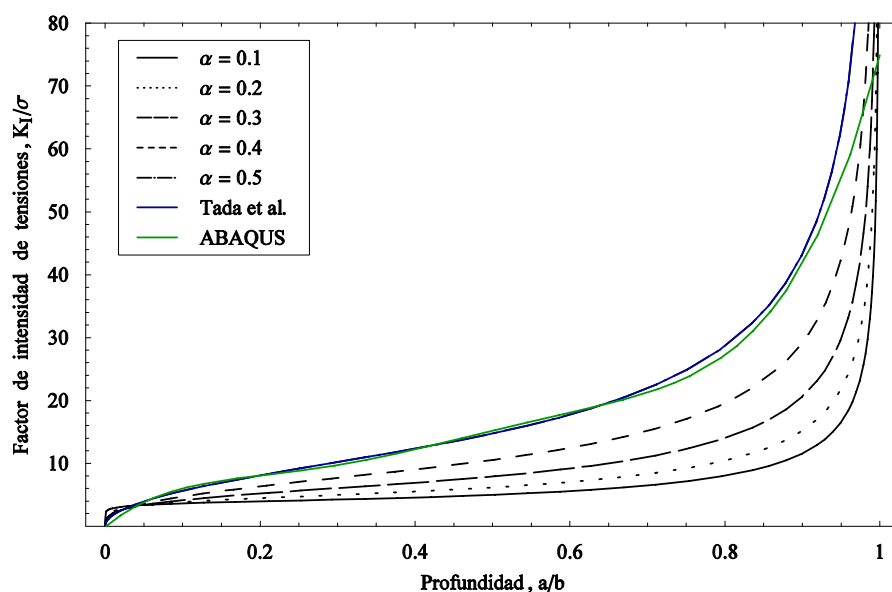


Figura 17: Variación del factor de intensidad de tensiones con respecto a la profundidad de fisura normalizada.

La Figura 17 muestra la variación del factor de intensidad de tensiones con respecto a la profundidad de fisura, para distintos valores del parámetro fractal. Se observa que la curva correspondiente a $\alpha = 0.5$ coincide perfectamente con la solución teórica propuesta por Tada et al. (1985). El estudio numérico adicional realizado con el Método de Elementos Finitos en el programa ABAQUS también está presente en esta figura, coincidiendo como era de esperarse con la curva correspondiente a la fisura suave dado que el programa no considera rugosidad fractal de la superficie.

6 CONCLUSIONES

El modelo de *Mecánica de Fractura Fractal Discreta* (DFFM), en cuyo estudio se centra

el presente trabajo, presenta como novedad principal la consideración de la geometría fractal de las fisuras en materiales. La rugosidad propia de la superficie de fractura es matemáticamente tenida en cuenta mediante su dimensión fractal, la que se muestra como dependiente de la longitud de fisura. Esto último implica que, a medida que la fisura se propaga, cambia la dimensión fractal de la nueva superficie creada, presentando así la primera forma cualitativa de explicación al fenómeno de transición Mirror-Mist-Hackle.

Al igual que en la teoría de *Mecánica de Fractura Cuantizada* (QFM), la propagación de la fisura es tratada como discreta, es decir que la extensión de la fisura se modela como pequeños “saltos”, cada cual es proporcional a una propiedad del material llamada *cuanto de fractura*.

Los siguientes casos límite de importancia se contemplan en la teoría DFFM:

(1) El caso de fisura “suave” o de Griffith se obtiene cuando la dimensión fractal es uno. En este límite, se recuperan los resultados de la QFM y de la LEFM (*Mecánica de Fractura Elástica Lineal*).

(2) El otro caso extremo involucra una fisura con dimensión fractal igual a dos. En este caso, la fisura fractal degenera en un vacío bidimensional, es decir, un cambio en la geometría del cuerpo analizado. Así, los factores de intensidad de tensiones se relacionan íntimamente con sus análogos de concentración de tensiones.

En términos generales, la teoría DFFM realiza predicciones sustancialmente diferentes a las de la teoría clásica de fractura (LEFM), en especial para fisuras pequeñas.

7 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y al CONICET por el apoyo recibido, y a los profesores Michael P. Wnuk y Arash Yavari, quienes han prestado una valiosa predisposición en la discusión del material del presente artículo.

REFERENCIAS

- Borodich, F.M., Some Fractal Models of Fracture. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 45:239–259, 1997.
- Broek, D., *Elementary engineering fracture mechanics*, 3rd. revised edition. Martinus Nijhoff Publishers, 1982.
- Creager, M. y Paris, P.C., Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking. *International Journal of Fracture* 3:247–252, 1967.
- Griffith, A.A., The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A221:163–198, 1921.
- Hull, D., *Fractography: Observing, Measuring and Interpreting Fracture Surface Topography*. Cambridge University Press, 1999.
- Johnson, J.W. y Holloway, D.G., On the shape and size of the fracture zones on glass fracture surfaces. *Philosophical Magazine*, 14:731–743, 1966.
- Mandelbrot, B.B., Self-affine fractals and fractal dimension. *Physica Scripta*, 32:257–260, 1985.
- Novozhilov, V.V., On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. *Journal of Applied Mechanics–USSR*, 33:212–222, 1969.
- Perez Ipiña, J.E., *Mecánica de fractura*. Editorial Alsina, 2004.
- Pilkey, W.D., *Peterson’s stress concentration factors*, 2nd. edition. John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- Pugno, N. y Ruoff, R.S., Quantized Fracture Mechanics. *Philosophical Magazine*,

- 84(27):2829–2845, 2004.
- Pugno, N., Peng, B., Espinosa, H.D., Predictions of strength in MEMS components with defects – a novel experimental–theoretical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 42:647–661, 2005.
- Pugno, N., Dynamic Quantized Fracture Mechanics. *International Journal of Fracture*, 140:159–168, 2006.
- Rice J.R., Mathematical analysis in the mechanics of fracture. *Fracture*, II:191–311, 1968.
- Saouma, V.E., Lecture Notes in Fracture Mechanics. *Department of Civil Environmental and Architectural Engineering Lecture Notes*. <http://civil.colorado.edu/~saouma/Lecture-Notes>, 2004.
- Tada, H., Paris, P.C. y Irwin, G.R., *Stress analysis of cracks handbook*, Paris Productions, 1985.
- Wnuk, M.P and Yavari, A., Discrete Fractal Fracture Mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:1127–1142, 2007.
- Wnuk, M.P y Yavari, A., On estimating stress intensity factors and modulus of cohesion for fractal cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:1659–1674, 2003.
- Wnuk, M.P y Yavari, A., A correspondence principle for fractal and classical cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 72:2744–2757, 2005.
- Yavari, A., Generalization of Barenblatt’s Cohesive Fracture Theory for fractal cracks. *Fractals*, 10(2):189–198, 2001.
- Yavari, A., Sarkani, S. and Moyer Jr., T., The mechanics of self-similar and self-affine fractal cracks. *International Journal of Fracture*, 114:1–27, 2002.