

Mecánica Computacional Vol. XXIII, pp. 353-372
G.Buscaglia, E.Dari, O.Zamonsky (Eds.)
Bariloche, Argentina, November 2004

FÓRMULAS PRÁCTICAS PARA DISEÑO DE PLACAS CIRCULARES DELGADAS DE BORDES EMPOTRADOS, BAJO CARGA TRANSVERSAL UNIFORME, CON GRANDES DEFLEXIONES EN RÉGIMEN ELÁSTICO

Alejandro Brewer, Julio Massa y José Stuardi

Grupo de Cálculo Estructural para Ingeniería Mecánica e Ingeniería Aeronáutica
Departamento de Estructuras. Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales
Universidad Nacional de Córdoba. Casilla de Correo 916. 5000 Córdoba - Argentina
e-mail: atbrewer@efn.uncor.edu, jmassa@efn.uncor.edu, jose_stuardi@gerb.com.ar

Página web : <http://www.efn.uncor.edu>

Palabras Clave: Placas Circulares Delgadas, Grandes Deflexiones, Fórmulas Aproximadas.

Resumen. *En este trabajo se presentan fórmulas prácticas para el dimensionamiento de placas circulares, con bordes empotrados, sometidas a carga transversal uniforme. Las fórmulas permiten calcular en forma simple el espesor mínimo requerido para asegurar que tanto la tensión máxima como el desplazamiento máximo, no superan los valores admisibles. Las fórmulas prácticas aquí presentadas han sido deducidas mediante una formulación analítica aproximada y posteriormente validadas vía MEF. Esto permitió ajustar los coeficientes, acotar el error y determinar el campo de validez de las aproximaciones.*

Nomenclatura

a :	radio de la placa circular	w :	desplazamiento transversal de la placa
r :	radio variable ($0 \leq r \leq a$)	w_0 :	desplaz. transversal del centro de la placa
c :	diámetro de la placa	\bar{w} :	desplaz. transversal w_0 adimensionalizado
h :	espesor de la placa	u :	desplaz. radial membranal de la placa
ν :	coeficiente de poisson	C_i :	constantes de forma para definir u
E :	módulo de Young	q :	carga transversal uniforme en la placa
V_m :	energía elástica membranal	\bar{q} :	carga adimensional
V_f :	energía elástica flexional	ε_r :	deformación específica radial
V_q :	potencial de la carga	ε_t :	deformación específica tangencial
V_t :	energía potencial total	σ :	tensión
D :	rigidez flexional de la placa	$\bar{\sigma}$:	tensión adimensional
AEE :	aproximación a exp. entero	F.P. :	fórmula práctica

1. INTRODUCCIÓN

Aunque las fórmulas prácticas perdieron la relevancia que tuvieron en el pasado debido al extraordinario desarrollo del método de los Elementos Finitos, resulta aún hoy muy útil al proyectista poder determinar con una calculadora de mano y en forma simple el espesor mínimo requerido para asegurar que tanto la tensión máxima, como el desplazamiento máximo, no superan los valores admisibles.

Para el caso de placas circulares cargadas con presión uniforme, existen actualmente fórmulas prácticas no lineales, que consideran el caso de grandes deflexiones, desarrolladas antes del advenimiento del MEF. Estas fórmulas son generalmente de origen analítico y en general dan resultados aceptables únicamente cuando los desplazamientos tienen un valor moderado.

Cuando la carga es “pequeña” y la placa se diseña con un criterio de tensión admisible, resulta un espesor muy pequeño. En esas condiciones el comportamiento de la placa es no lineal y el desplazamiento máximo puede resultar bastante mayor que el espesor de la placa. El uso de variables adimensionales permite aproximar la tensión máxima y la carga por funciones simples del desplazamiento.

En este trabajo, se deducen fórmulas aproximadas que permiten calcular de manera sencilla la tensión máxima y el desplazamiento en el centro de una placa circular delgada con grandes deflexiones, bajo carga uniforme perpendicular a la superficie indeformada. Los resultados se presentan como Fórmulas Prácticas de sólo dos términos, uno lineal y otro no lineal, que relacionan la carga y la tensión máxima con el desplazamiento del punto medio.

En particular, se presentan expresiones para placas cuyos bordes están restringidos de girar y desplazarse membranalmente (bordes empotrados).

Relaciones de este tipo han sido obtenidas por Timoshenko^{1,2} y Way,³ y tabuladas por Young⁴ en las “Fórmulas de Roark para Tensiones y Deformaciones”. Para placas circulares, la forma adimensional, de estas ecuaciones es:

$$\bar{q} = K_1 \bar{w} + K_2 \bar{w}^3 \tag{1}$$

$$\bar{\sigma} = K_3 \bar{w} + K_4 \bar{w}^2 \tag{2}$$

donde el trazo sobre una variable significa que se trata de una variable adimensionalizada:

$$\bar{w} = \frac{w_0}{h} \quad \bar{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{c}{h}\right)^4 \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{E} \left(\frac{c}{h}\right)^2 \tag{3}$$

Las tensiones (2) son el resultado de la suma de las tensiones membranales y flexionales. Para placas circulares con bordes empotrados, los coeficientes tabulados por Young⁴ son:

$$K_1 = 85,33 / (1 - \nu^2) \quad \text{centro} \begin{cases} K_3 = 8 / (1 - \nu) \\ K_4 = 3,9 \end{cases} \quad \text{borde} \begin{cases} K_3 = 16 / (1 - \nu^2) \\ K_4 = 1,9 \end{cases} \tag{4}$$

Hsu⁵ en su libro de placas presenta tablas con las relaciones funcionales $\bar{q} = \bar{q}(\bar{w})$ y $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{w})$, para valores del coeficiente de poisson 0.25, 0.30, y 0.35.

En el presente trabajo, se derivan expresiones similares a las (1) y (2). Primero se deducen en forma analítica los coeficientes K_i asumiendo una “forma” aproximada para los desplazamientos. Posteriormente dichos coeficientes son ajustados para minimizar el error de las fórmulas prácticas al ser comparados con resultados provistos por el Método de Elementos Finitos. Al hacer el ajuste se mantiene la forma en que participa el módulo de poisson ν en los coeficientes $K_i(\nu)$, provistos por la aproximación analítica.

El objetivo de este trabajo es obtener fórmulas prácticas más precisas, especialmente para casos de grandes desplazamientos donde se observan errores importantes al utilizar las fórmulas (1) y (2) con los coeficientes provistos por (4) y resumidos en la Tabla 1.

Para ajustar los coeficientes de las expresiones analíticas aproximadas $K_i(\nu)$, se utilizó un programa de Elementos Finitos.⁶ A su vez, los resultados numéricos se ajustaron mediante polinomios con un programa⁷ que interpola los resultados según una técnica de mínimos cuadrados en los errores porcentuales. Las tensiones presentadas han sido calculadas como tensiones “efectivas” utilizando el criterio de Von Mises.

Coeficientes	K_1	K_2	K_3 centro	K_3 borde	K_4 centro	K_4 borde
función de ν	$\frac{85,333}{1 - \nu^2}$	$\frac{41,6}{1 - \nu^2}$	$\frac{8}{1 - \nu}$	$\frac{16}{1 - \nu^2}$	3,9	1,9
$\nu = 0,3 \rightarrow$	93,773	45,714	11,429	17,582	3,9	1,9

Tabla 1: Coeficientes tabulados por Young (Fórmulas de Roark)

2. SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA

2.1. Relaciones cinemáticas y esfuerzos

Las ecuaciones cinemáticas y los esfuerzos en coordenadas cilíndricas resultan:²

Ecuaciones cinemáticas:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (5)$$

Esfuerzos normales radiales y circunferenciales:

$$N_r = \frac{E h}{1 - \nu^2} [\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t] \quad N_t = \frac{E h}{1 - \nu^2} [\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r] \quad (6)$$

Momentos flectores radiales y circunferenciales:

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{dr} \right] \quad M_t = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{dr} \right] \quad (7)$$

2.2. Energía potencial total

La energía de deformación elástica membranal esta dada por:²

$$V_m = 2\pi \int_0^a \left(\frac{N_r \varepsilon_r}{2} + \frac{N_t \varepsilon_t}{2} \right) r dr = \frac{\pi E h}{1 - \nu^2} \int_0^a (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_t^2 + 2\nu \varepsilon_r \varepsilon_t) r dr \quad (8)$$

La energía de deformación elástica flexional es:

$$V_f = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] r dr \right\} d\theta \quad (9)$$

D es la rigidez flexional de la placa dada por:

$$D = E h^3 / [12 (1 - \nu^2)] \quad (10)$$

El potencial de la carga es:

$$V_q = -2\pi \int_0^a q w r dr \quad (11)$$

2.3. Desplazamientos aproximados propuestos

Se propone la siguiente solución aproximada² para el desplazamiento transversal:

$$w = w_0 [1 - (r/a)^2]^2 \quad (12)$$

que satisface las condiciones de borde y las condiciones en el punto medio de la placa:

$$w|_{r=a} = 0 \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=a} = 0 \quad w|_{r=0} = w_0 \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (13)$$

Para el desplazamiento membranaral Timoshenko² utilizó dos constantes. En el presente trabajo se propone la siguiente aproximación que contiene tres constantes indeterminadas:

$$u = r (a - r) (C_1 + C_2 r + C_3 r^2) \quad (14)$$

que se anula en el borde y en el punto medio de la placa.

2.4. Cálculo de las constantes C_1 , C_2 y C_3

El desplazamiento transversal w en (12) está en función de w_0 , y el desplazamiento membranaral u , en (14) está en función de C_1 , C_2 , y C_3 . Sustituyendo estas expresiones en (5) y posteriormente en (8), se puede obtener la energía membranaral que a su vez permite encontrar las constantes C_1 , C_2 , y C_3 en función de w_0 . A tal fin, se minimiza V_m respecto de las C_i . Esta solución parcial es posible debido a que V_m depende funcionalmente de u y w , pero V_f y V_q son sólo funciones de w :

$$V_m = V_m(w_0, C_1, C_2, C_3) \quad V_f = V_f(w_0) \quad V_q = V_q(w_0) \quad (15)$$

Entonces haciendo,

$$\frac{\partial V_m}{\partial C_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

resultan las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} C_1 &= w_0^2 (1, 1435786 - 0, 5216450 \nu) / a^3 \\ C_2 &= w_0^2 (-0, 7727273 - 0, 4292929 \nu) / a^4 \\ C_3 &= w_0^2 (-0, 9696970 + 0, 6464646 \nu) / a^5 \end{aligned} \quad (17)$$

2.5. Cálculo del desplazamiento máximo w_0

Una vez calculadas las constantes C_i es posible escribir la energía potencial total:

$$V_t(w_0) = V_m + V_f - V_q \quad (18)$$

que depende del valor de w_0 . (18) presenta un mínimo cuando:

$$\frac{dV_t}{dw_0} = 0 \rightarrow w_0 (64 D) [1 + (0, 4201 + 0, 2481 \nu - 0, 1606 \nu^2) \bar{w}^2] - q a^4 = 0 \quad (19)$$

(19) permite obtener la expresión explícita de la carga en función del desplazamiento mediante un polinomio cúbico incompleto.

Haciendo $\nu = 0,3$ en (19) y “despejando” w_0 se obtiene:

$$\nu = 0,3 \quad \longrightarrow \quad w_0 = \frac{q a^4}{64 D (1 + 0,480 \bar{w}^2)} \quad (20)$$

que es un valor muy similar al obtenido por Timoshenko² utilizando una expansión con dos coeficientes (C_1 y C_2), para el desplazamiento membranal u :

$$\text{Timoshenko:} \quad w_0 = \frac{q a^4}{64 D (1 + 0,488 \bar{w}^2)} \quad (21)$$

Tanto (20) como (21) muestran el error que se comete al usar la solución lineal. En efecto cuando $\bar{w} \ll 1$ el error es pequeño, pero cuando $\bar{w} > \frac{1}{2}$ el error supera el 10 %.

3. CARGA EN FUNCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO MÁXIMO

3.1. Relación analítica aproximada entre \bar{w} y \bar{q}

(19) permite despejar la carga q que posteriormente puede escribirse en forma adimensionalizada utilizando (3):

$$\text{Aprox. analítica:} \quad \bar{q} = \frac{85,333}{1 - \nu^2} \bar{w} + \frac{35,845 + 21,173 \nu - 13,706 \nu^2}{1 - \nu^2} \bar{w}^3 \quad (22)$$

Reemplazando en (1) los valores K_1 y K_2 dados en (4) se obtiene la aproximación de Young (Fórmulas de Roark), para la carga en función del desplazamiento máximo:

$$\text{Young (Fórmulas de Roark):} \quad \bar{q} = \frac{85,333}{1 - \nu^2} \bar{w} + \frac{41,6}{1 - \nu^2} \bar{w}^3 \quad (23)$$

Comparando las ecuaciones (22) y (23) se observa que los coeficientes lineales K_1 son idénticos. La diferencia está en el numerador de K_2 que es fijo en (23) mientras que en (22) es una función de ν . Cuando $\nu = 0,3$ se tiene:

$$\nu = 0,3 \quad \longrightarrow \quad K_{2(22)} = 45,01 \quad \text{y} \quad K_{2(23)} = 45,71 \quad (24)$$

3.2. Ajuste numérico de la relación entre \bar{w} y \bar{q}

Con el fin de contrastar la exactitud de (22) se corrió un ejemplo numérico vía elementos finitos con el programa Alpha⁶ para establecer la relación entre la carga y el desplazamiento del centro de la placa. La carga q actúa perpendicular a la placa indeformada y las condiciones de borde impiden el giro y el desplazamiento membranal. Las constantes adoptadas fueron:

<i>Diámetro c</i>	<i>Espesor h</i>	<i>Módulo de Young E</i>	<i>Módulo de Poisson ν</i>
1,000 m	0,002 m	2,0594 E ¹¹ N/m ²	0,3

Tabla 2: Datos utilizados en las corridas de Elementos Finitos

Para hallar la solución con el programa de análisis no lineal Alpha⁶ se utilizó como parámetro de avance al desplazamiento del centro de la placa w_0 . Esto permitió que en una sola corrida se obtuvieran las cargas correspondientes a diez valores de \bar{w} igualmente espaciados usando $\Delta\bar{w} = 0,5$ para cubrir el intervalo $\bar{w} = [0, 5]$.

Las salidas numéricas que figuran en las dos primeras columnas de la Tabla 4 se utilizaron para ajustar el término no lineal en (22), ya que los resultados mostraron que el término lineal aproxima muy bien la solución para pequeños desplazamientos.

Para el término no lineal se realizaron dos tipos de ajustes: el primero mantiene el exponente 3 de la fórmula analítica y ajusta el coeficiente $K_2(\nu)$ dado en (22), el segundo ajusta el coeficiente y también el exponente. En ambos casos se cubre el rango: $0 \leq \bar{w} \leq 5$.

Ajuste tipo 1: Aproximación con Exponente Entero (A.E.E.)

El coeficiente $K_2(\nu)$ provisto por la solución Analítica Aproximada (22) se multiplica por una constante para ajustarlo a las salidas numéricas de Elementos Finitos. El coeficiente $K_{2E.F.}$ se obtuvo con el programa Inter2⁷ que encuentra primero la solución de mínimos cuadrados y posteriormente la corrige mediante el procedimiento de Newton-Raphson para lograr que la suma de los cuadrados de los errores porcentuales sea mínimo. Este programa permite prefijar uno o varios coeficientes.

El valor del coeficiente del término lineal $K_1(\nu)$ en (22) se fijó en el valor correspondiente a $\nu = 0,3$ y mediante el programa Inter2 se encontró el valor de $K_{2E.F.}$ que minimiza la suma de errores porcentuales al cuadrado:

$$K_1(0,3) = 93,773 \rightarrow \bar{q} = 93,773 \bar{w} + K_{2E.F.} (\bar{w})^3 \rightarrow K_{2E.F.} = 57,177 \quad (25)$$

Por otro lado el coeficiente del término no lineal $K_{2A.A.}(\nu)$, provisto por la solución analítica (22) para $\nu = 0,3$ es:

$$K_{2A.A.}(\nu) = \frac{35,845 + 21,173 \nu - 13,706 \nu^2}{1 - \nu^2} \rightarrow K_{2A.A.}(0,3) = 45,015 \quad (26)$$

En consecuencia, el coeficiente de ajuste resulta:

$$C_q = \frac{K_{2E.F.}(0,3) = 57,177}{K_{2A.A.}(0,3) = 45,015} = 1,2702 \rightarrow K_2(\nu) = C_q K_{2A.A.}(\nu) \quad (27)$$

y se obtiene la versión ajustada de (22) que mantiene el exponente 3 en el término no lineal:

$$(\bar{w})^3 \rightarrow \bar{q} = \frac{85,333}{1 - \nu^2} \bar{w} + \frac{45,5 + 26,9 \nu - 17,4 \nu^2}{1 - \nu^2} (\bar{w})^3 \quad (28)$$

La Figura 1 muestra el gráfico de las cargas adimensionales calculados con el programa de elementos finitos, las obtenidos con la aproximación (23) de Young (fórmulas de Roark) y las deducidas en este trabajo: la A.E.E. (28) y la F.P. (32). En la Tabla 4 se muestran los valores numéricos de \bar{q} vs. \bar{w} usados en en el gráfico y los errores porcentuales.

Ajuste tipo 2: Fórmula Práctica (F.P.)

Comparando en la Figura 1, la gráfica de la A.E.E. (28) en línea de trazos con los resultados numéricos se observa que la carga crece con un exponente algo mayor a 3. Si bien el error es relativamente pequeño, debe tenerse presente que en la práctica el desplazamiento se despeja en función de la carga dato y se usa posteriormente para determinar la tensión, aumentando el error propio de la ecuación (2).

Para obtener una fórmula superior a la (28) se propone utilizar una ecuación del tipo:

$$\bar{q} = K_1 \bar{w} + K_2 (\bar{w})^p \tag{29}$$

donde los valores del coeficiente K_2 y del exponente p se ajustan simultáneamente usando un programa ad-hoc que minimiza la suma de los errores porcentuales al cuadrado.

K_1 es dato y corresponde a la solución lineal para el caso $\nu = 0,3$. Tanto K_2 como p son determinados por el programa, pero cualquiera de ellos puede ser prefijado. Se obtuvo el siguiente resultado:

$$\bar{q} = 93,773 \bar{w} + 52,9255 (\bar{w})^{3,06642} \tag{30}$$

El programa se corrió nuevamente adoptando un exponente prefijado en el valor redondeado $p = 3,07$ y se obtuvo:

$$p = 3,07 \rightarrow K_2 = 52,758 \rightarrow C_q = 52,758 / 45,015 = 1,172 \tag{31}$$

Por lo tanto repitiendo el procedimiento utilizado en (27) se obtiene la forma explícita de la fórmula práctica del tipo (29)

$$(\bar{w})^{3,07} \rightarrow \bar{q} = \frac{85,333}{1 - \nu^2} \bar{w} + \frac{42,0 + 24,8 \nu - 16,6 \nu^2}{1 - \nu^2} (\bar{w})^{3,07} \tag{32}$$

La Tabla 3 muestra los coeficientes K_2 dados por Young y los deducidos en este trabajo:

K_2	Young (23)	$(\bar{w})^3$ (28)	$(\bar{w})^{3,07}$ (32)
función de ν	$\frac{41,6}{1 - \nu^2}$	$\frac{45,5 + 26,9 \nu - 17,4 \nu^2}{1 - \nu^2}$	$\frac{42,0 + 24,8 \nu - 16,1 \nu^2}{1 - \nu^2}$
$\nu = 0,3 \rightarrow$	45,714	57,147	52,758

Tabla 3: Valores del coeficiente K_2 para calcular la carga \bar{q} vs. \bar{w}

En la Figura 1 se observa que el ajuste (32) es prácticamente perfecto, por ello se adopta como fórmula práctica. Notar que el error en todo el intervalo se mantiene inferior al 1 %.

La aprox. A.E.E. (28) da resultados aceptables con un error máximo en el intervalo del 3,5 %.

La fórmula de Roark (23) sólo puede usarse para valores pequeños del desplazamiento, digamos $\bar{w} < 2$, para valores mayores los errores crecen hasta superar el 20 % cuando $\bar{w} = 5$.

En la Tabla 4 se muestran los valores numéricos de \bar{q} vs. \bar{w} y los errores porcentuales.

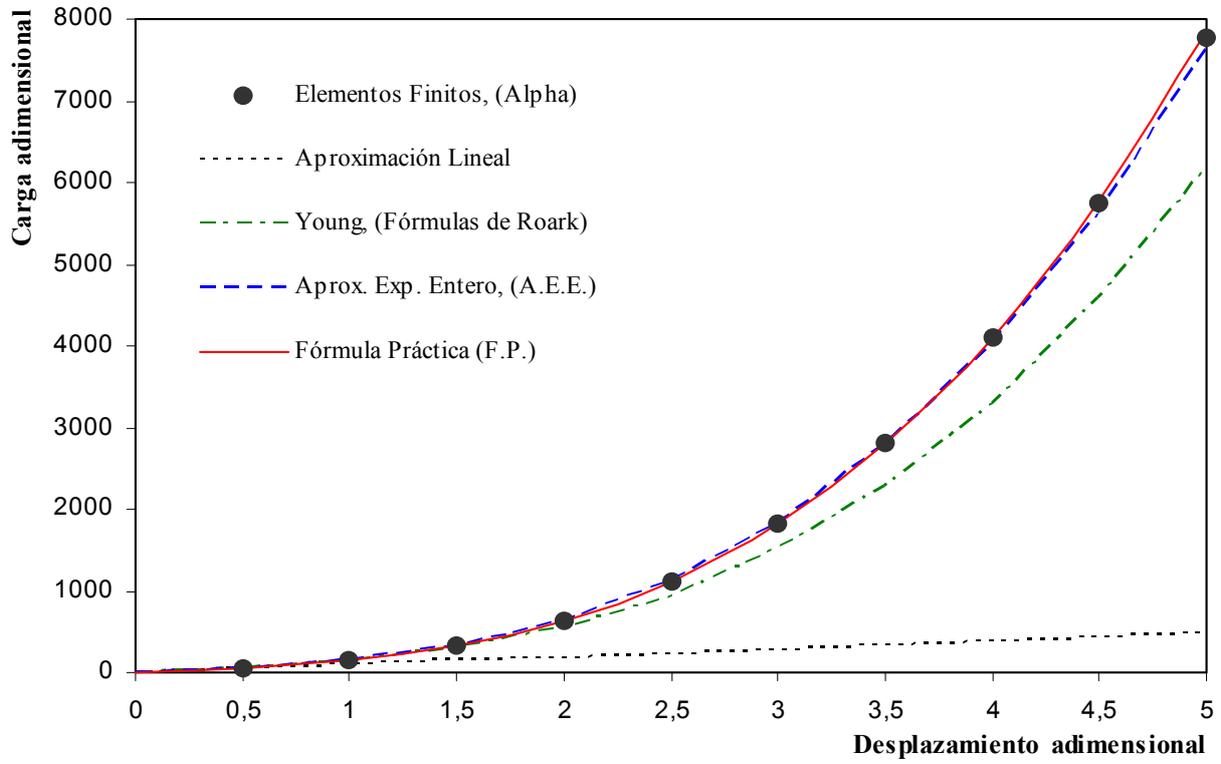


Figura 1: Carga adimensional \bar{q} vs. desplazamiento máximo adimensional \bar{w}

Desplaz. \bar{w}	Carga adimensional \bar{q}				Error % de las aproximaciones		
	Elementos Finitos	Young (23)	A. E. E. (28)	F. P. (32)	Fórmula de Young	Exponente Entero	Fórmula Práctica
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,5	53,3	52,6	54,0	53,2	-1,3	1,4	-0,2
1,0	146,2	139,5	150,9	146,5	-4,6	3,2	0,2
1,5	322,5	294,9	333,6	323,8	-8,5	3,5	0,4
2,0	630,1	553,3	645,0	630,6	-12,2	2,4	0,1
2,5	1116,9	948,7	1127,8	1113,4	-15,1	1,0	-0,3
3,0	1828,4	1515,6	1825,1	1819,7	-17,1	-0,2	-0,5
3,5	2807,7	2288,2	2779,7	2797,5	-18,5	-1,0	-0,4
4,0	4097,5	3300,8	4034,4	4095,7	-19,4	-1,5	0,0
4,5	5740,0	4587,7	5632,2	5763,3	-20,1	-1,9	0,4
5,0	7777,5	6183,2	7616,0	7850,1	-20,5	-2,1	0,9
Error promedio en el intervalo $[0 \leq \bar{w} \leq 5]$ \longrightarrow					13,7	1,8	0,3

Tabla 4: Valores de \bar{q} vs. \bar{w} calculados vía E.F. y con las aproximaciones (23), (28) y (32)

4. TENSIONES EN FUNCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO MÁXIMO

4.1. Determinación de esfuerzos normales y momentos flectores

A partir de los desplazamientos aproximados (12) y (14), es posible calcular los esfuerzos normales y momentos por unidad de longitud mediante las ecuaciones (6) y (7). Las expresiones obtenidas, pueden evaluarse en el centro y en el borde de la placa resultando lo siguiente:

Esfuerzos normales

$$\begin{aligned} Nr_{(r=0)} &= \frac{2 D w_0^2}{231 (h^2 a^2)} (1 + \nu) (1585 - 723 \nu) & Nt_{(r=0)} &= Nr_{(r=0)} \\ Nr_{(r=a)} &= \frac{4 D w_0^2}{231 (h^2 a^2)} (415 + 211 \nu) & Nt_{(r=a)} &= \nu Nr_{(r=a)} \end{aligned} \quad (33)$$

Momentos flectores

$$\begin{aligned} Mr_{(r=0)} &= 4 D w_0 (1 + \nu) / a^2 & Mt_{(r=0)} &= Mr_{(r=0)} \\ Mr_{(r=a)} &= -8 D w_0 / a^2 & Mt_{(r=a)} &= \nu Mr_{(r=a)} \end{aligned} \quad (34)$$

4.2. Determinación de tensiones máximas

Las tensiones pueden obtenerse de los esfuerzos normales (33) y momentos flectores (34) por unidad de longitud:

$$\sigma_{Nr} = \frac{N_r}{h} \quad \sigma_{Nt} = \frac{N_t}{h} \quad \sigma_{Mr} = \frac{6M_r}{h^2} \quad \sigma_{Mt} = \frac{6M_t}{h^2} \quad (35)$$

y utilizarse para encontrar las tensiones compuestas en las fibras superiores S e inferiores I

$$\sigma_{Sr} = \sigma_{Nr} - \sigma_{Mr} \quad \sigma_{St} = \sigma_{Nt} - \sigma_{Mt} \quad \sigma_{Ir} = \sigma_{Nr} + \sigma_{Mr} \quad \sigma_{It} = \sigma_{Nt} + \sigma_{Mt} \quad (36)$$

A partir de las tensiones en (36) se calculan las tensiones según Von Mises:

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (37)$$

4.3. Tensión efectiva máxima en el centro de la placa

La máxima tensión en el centro ocurre en las fibras inferiores I donde se suma la tensión de tracción debida a la flexión con la tensión de tracción membranal. Reemplazando (33) y (34) en (35) y posteriormente en (36) se tiene que $\sigma_t = \sigma_r$ y por lo tanto la tensión efectiva de Von Mises σ_{In}^* coincide con la tensión máxima $\sigma_{Ir}(r=0)$.

$$\sigma_{I0}^* = \sigma_r(r=0) = \frac{N_r(r=0)}{h} + \frac{6 M_r(r=0)}{h^2} \quad (38)$$

$$\sigma_{I0}^* = \frac{2}{231} \frac{D w_0}{a^2 h^3} (1 + \nu) [2772 h + (1585 - 723 \nu) w_0] \quad (39)$$

Reemplazando el valor de D dado en (10) y adimensionalizando se tiene:

$$\text{Aprox. analítica: } \bar{\sigma}_{I0}^* = \frac{8}{1 - \nu} \bar{w} + \frac{4,574 - 2,087 \nu}{1 - \nu} \bar{w}^2 \quad (40)$$

Para efectuar comparaciones se escribe a continuación la fórmula de Young (2) para la tensión máxima en el centro de la placa. Se utilizan los coeficientes K_3 y K_4 provistos por (4):

$$\text{Young (Fórmulas de Roark): } \bar{\sigma} = \frac{8}{1 - \nu} \bar{w} + 3,9 \bar{w}^2 \quad (41)$$

Ajuste de la tensión en el centro de la placa

Los resultados numéricos⁶ de las tensiones de Von Mises pueden aproximarse mediante una parábola para ajustar la ecuación (40). Los resultados mostraron que el término lineal en (40) aproxima muy bien la solución para pequeños desplazamientos.

Para el término no lineal se realizaron dos tipos de ajustes: el primero mantiene el exponente 2 de la fórmula analítica y ajusta el coeficiente $K_4(\nu)$ dado en (40), el segundo ajusta el coeficiente y también el exponente de modo de minimizar el error porcentual. En ambos casos se cubre el rango: $0 \leq \bar{w} \leq 5$.

$$(\bar{w})^2 \longrightarrow \bar{\sigma}_{centro}^* = \frac{8}{1 - \nu} \bar{w} + \frac{1,955 - 0,892 \nu}{1 - \nu} (\bar{w})^2 \quad (42)$$

$$(\bar{w})^{2,3} \longrightarrow \bar{\sigma}_{centro}^* = \frac{8}{1 - \nu} \bar{w} + \frac{1,345 - 0,616 \nu}{1 - \nu} (\bar{w})^{2,3} \quad (43)$$

La Tabla 5 muestra los coeficientes K_4 dados por Young y los deducidos en este trabajo:

K_4 centro	Young (41)	Analítica (40)	$(\bar{w})^2$ (42)	$(\bar{w})^{2,3}$ (43)
función de ν	3,901	$\frac{4,57 - 2,09 \nu}{1 - \nu}$	$\frac{1,955 - 0,892 \nu}{1 - \nu}$	$\frac{1,345 - 0,616 \nu}{1 - \nu}$
$\nu = 0,3 \longrightarrow$	3,901	5,640	2,411	1,664

Tabla 5: Valores del coeficiente K_4 para calcular $\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}_r$ en el centro de la placa

En la Figura 2 se han graficado las tensiones en el medio de la placa, correspondientes a las fibras inferiores para la placa anteriormente analizada (Tabla 2). Se incluyen además los resultados de las aproximaciones dadas por las ecuaciones (41), (42) y (43).

En la Tabla 6 se incluyen los valores numéricos de la Figura 2 y se muestran las diferencias porcentuales con los resultados obtenidos con el programa de elementos finitos.⁶

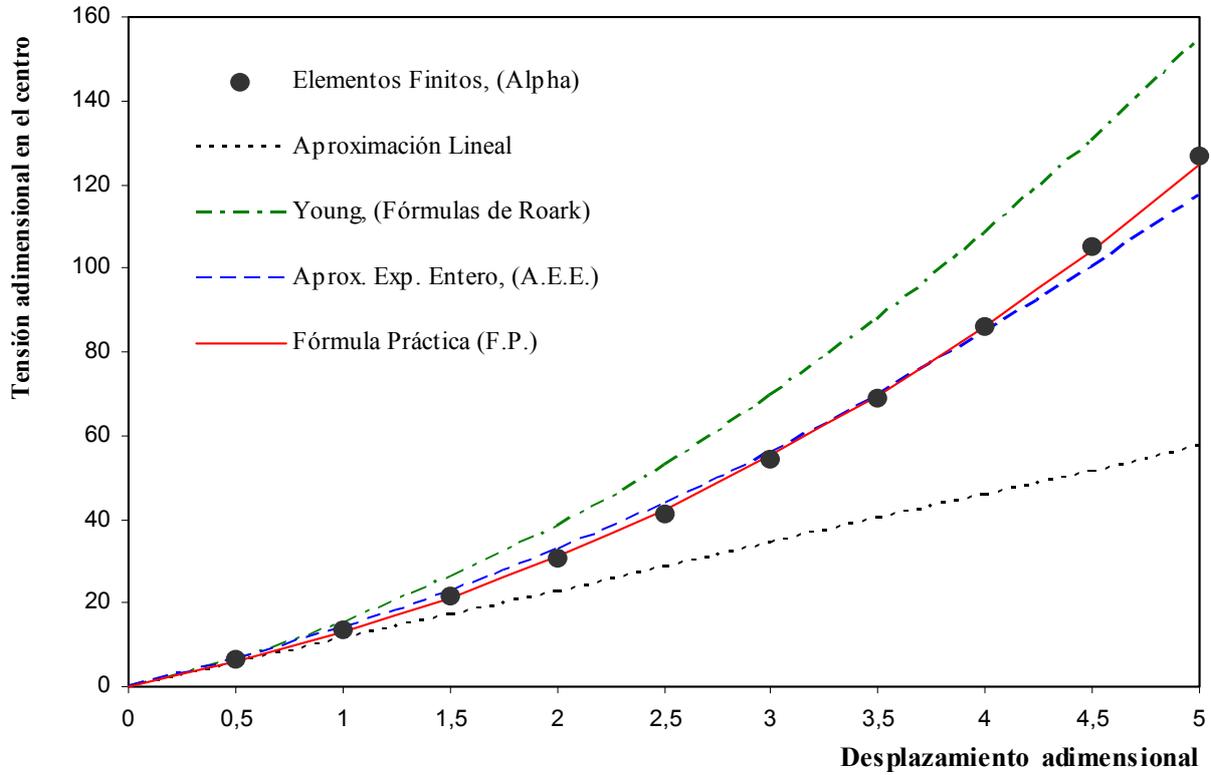


Figura 2: Tensión adimensional $\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_t$ en el centro de la placa vs. desplaz. máximo adimensional \bar{w}

Desplaz. \bar{w}	Tensión adimensional en el centro $\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_t$				Error % de las aproximaciones		
	Elementos Finitos	Young (41)	A. E. E. (42)	F. P. (43)	Fórmula de Young	Exponente Entero	Fórmula Práctica
0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0
0,5	6,47	6,69	6,32	6,05	3,4	-2,4	-6,5
1,0	13,75	15,33	13,84	13,09	11,5	0,7	-4,8
1,5	21,61	25,92	22,57	21,37	19,9	4,4	-1,1
2,0	30,59	38,46	32,50	31,05	25,7	6,2	1,5
2,5	41,34	52,95	43,64	42,26	28,1	5,6	2,2
3,0	54,14	69,39	55,98	55,11	28,2	3,4	0,8
3,5	69,08	87,78	69,53	69,68	27,1	0,7	0,9
4,0	86,08	108,11	84,29	86,07	25,6	-2,1	0,0
4,5	105,39	130,40	100,25	104,34	23,7	-4,9	-1,0
5,0	126,56	154,64	117,42	124,56	22,2	-7,2	-1,6
Error promedio en el intervalo $[0 \leq \bar{w} \leq 5]$ \longrightarrow					21,5	3,8	2,0

Tabla 6: Valores de $\bar{\sigma}_{centro}$ vs. \bar{w} calculados vía E.F. y con las aproximaciones (41), (42) y (43)

4.4. Tensión efectiva máxima en el borde de la placa

La máxima tensión efectiva en el borde empotrado ocurre en las fibras superiores S donde se suma la tensión de tracción debida a la flexión con la tensión de tracción membranal. Reemplazando las tensiones (36) en (37) se tiene:

$$\sigma_{Sa}^* = \frac{4}{693} \frac{D w_0}{a^2 h^3} \sqrt{1 - \nu + \nu^2} [2772 h + (415 + 211 \nu) w_0] \quad (44)$$

Reemplazando el valor de D y adimensionalizando se obtiene:

$$\text{Aprox. analítica: } \bar{\sigma}_{Sa}^* = \sqrt{1 - \nu + \nu^2} \left[\frac{16}{1 - \nu^2} \bar{w} + \frac{2,395 + 1,218 \nu}{1 - \nu^2} \bar{w}^2 \right] \quad (45)$$

Es importante destacar que en el borde empotrado (restricción flexional y membranal) el desplazamiento tangencial es nulo y en consecuencia debido al efecto poisson totalmente restringido resulta:

$$\sigma_t = \nu \sigma_r \rightarrow \bar{\sigma}_{Sa}^* = \sqrt{(\sigma_r)^2 + (\nu \sigma_r)^2 - (\sigma_r)(\nu \sigma_r)} = \sqrt{1 + \nu^2 - \nu} [\sigma_r] \quad (46)$$

Comparando (45) y (46) se observa que el corchete de (45) contiene la tensión máxima σ_r mientras que la tensión efectiva de Von Mises es menor. Cuando $\nu = 0,3$ el radicando vale

$$\nu = 0,3 \rightarrow \sqrt{1 - \nu + \nu^2} \approx 0,89 \quad (47)$$

Para hacer comparaciones se escribe a continuación la fórmula de Young (2) para la tensión máxima σ_r en el borde de la placa. Se utilizan los coeficientes K_3 y K_4 provistos por (4):

$$\text{Young (Fórmulas de Roark): } \bar{\sigma} = \frac{16}{1 - \nu^2} \bar{w} + 1,9 \bar{w}^2 \quad (48)$$

Ajuste de la tensión en el borde de la placa

Los resultados numéricos⁶ de las tensiones de Von Mises se utilizaron para ajustar el término no lineal de la aproximación analítica (45). Se presenta una aproximación que minimiza el error manteniendo el exponente 2 del término no lineal y otra que ajusta tanto el coeficiente como el exponente. En ambos casos se cubre el rango: $0 \leq \bar{w} \leq 5$

$$(\bar{w})^2 \rightarrow \bar{\sigma}_{borde}^* = \sqrt{1 - \nu + \nu^2} \left[\frac{16}{1 - \nu^2} \bar{w} + \frac{8,972 + 4,563 \nu}{1 - \nu^2} (\bar{w})^2 \right] \quad (49)$$

$$(\bar{w})^{2,5} \rightarrow \bar{\sigma}_{borde}^* = \sqrt{1 - \nu + \nu^2} \left[\frac{16}{1 - \nu^2} \bar{w} + \frac{5,240 + 2,665 \nu}{1 - \nu^2} (\bar{w})^{2,5} \right] \quad (50)$$

La Figura 3 muestra las tensiones σ_r en el borde de la placa para las fibras superiores. Se dan los valores numéricos de EF.⁶ y las aproximaciones según las ecuaciones (48), (49) y (50).

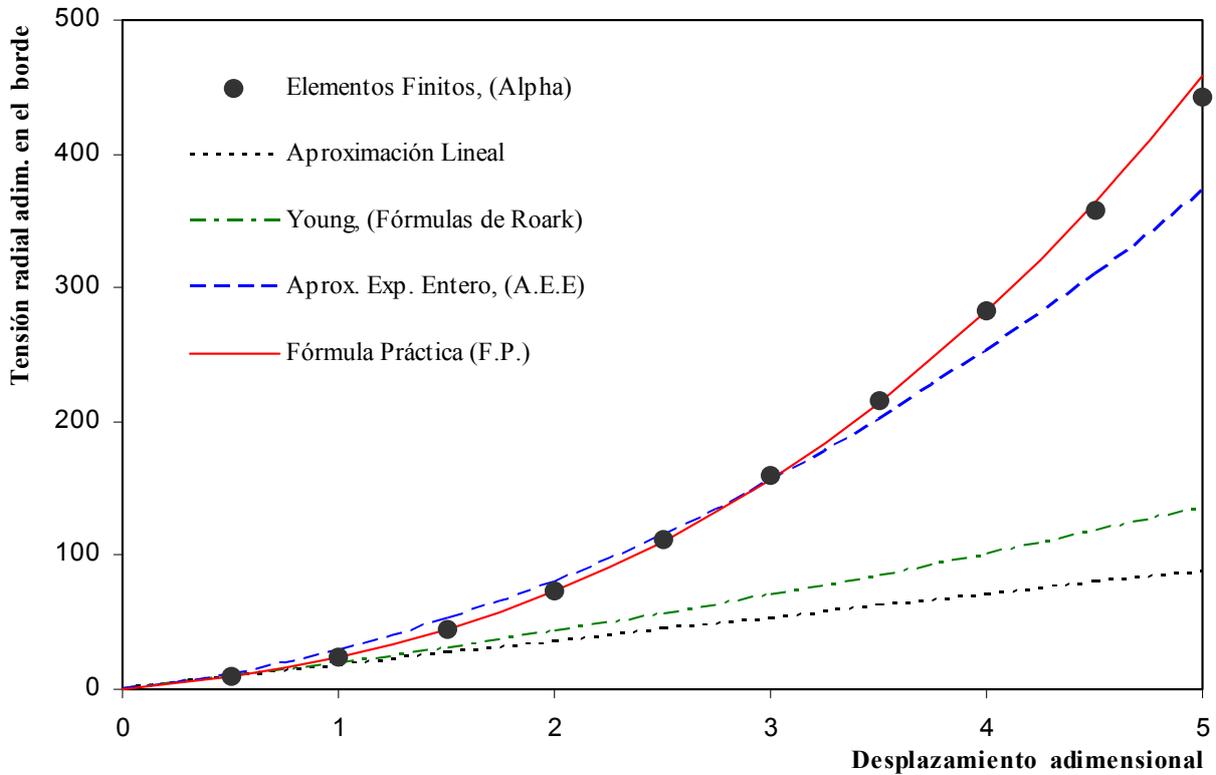


Figura 3: Tensión radial adimensional $\bar{\sigma}_r$ en el borde empotrado vs. desplazamiento máximo adimensional \bar{w}

Desplaz. \bar{w}	Tensión radial $\bar{\sigma}_r$ en el borde $\rightarrow (\bar{\sigma}^* = 0,89 \bar{\sigma}_r)$				Error % de las aproximaciones		
	Elementos Finitos	Young (48)	A. E. E. (49)	F. P. (50)	Fórmula de Young	Exponente Entero	Fórmula Práctica
0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0
0,5	9,82	9,27	11,63	9,96	-5,7	18,4	1,4
1,0	23,84	19,48	28,95	24,22	-18,3	21,4	1,6
1,5	44,60	30,65	51,94	44,66	-31,3	16,5	0,1
2,0	73,78	42,76	80,62	72,70	-42,0	9,3	-1,5
2,5	112,04	55,83	114,98	109,53	-50,2	2,6	-2,2
3,0	159,63	69,85	155,02	156,19	-56,2	-2,9	-2,2
3,5	216,41	84,81	200,75	213,62	-60,8	-7,2	-1,3
4,0	282,67	100,73	252,15	282,68	-64,4	-10,8	0,0
4,5	357,67	117,60	309,24	364,18	-67,1	-13,5	1,8
5,0	442,16	135,41	372,01	458,88	-69,4	-15,9	3,8
Error promedio en el intervalo $[0 \leq \bar{w} \leq 5]$ \rightarrow					46,5	11,9	1,6

Tabla 7: Valores de $\bar{\sigma}_r$ vs. \bar{w} calculados vía E.F. y con las aproximaciones (48), (49) y (50)

La Tabla 7 incluye las diferencias porcentuales de las gráficas aproximadas en la Figura 3.

En la tabla 8 se muestran los coeficientes K_4 dados por Young y los deducidos en este trabajo. Se observan diferencias importantes (se considera la tensión radial $\bar{\sigma}_r$ máxima):

K_4 borde	Young (48)	Analítica (45)	$(\bar{w})^2$ (49)	$(\bar{w})^{2,5}$ (50)
función de ν	1,90	$\frac{2,395 + 1,218 \nu}{1 - \nu^2}$	$\frac{8,972 + 4,563 \nu}{1 - \nu^2}$	$\frac{5,24 + 2,665 \nu}{1 - \nu^2}$
$\nu = 0,3 \rightarrow$	1,90	3,033	11,364	6,637

Tabla 8: Valores del coeficiente K_4 para calcular $\bar{\sigma}_r$ en el borde empotrado

5. RELACIONES ENTRE LA CARGA Y LAS TENSIONES

En el caso lineal ($K_2 = K_4 = 0$) resulta fácil expresar la tensión en función de la carga:

$$\bar{q} = K_1 \bar{w} \rightarrow \bar{w} = \bar{q}/K_1 \rightarrow \bar{\sigma} = K_3 \bar{w} = K_3 (\bar{q}/K_1) \rightarrow \bar{\sigma} = (K_3/K_1) \bar{q} \quad (51)$$

Ajuste tipo 1: Cuando se utiliza el ajuste mediante exponentes enteros del tipo (1) y (2) se debe determinar primero \bar{w} resolviendo la ecuación cúbica incompleta (1). Esto puede hacerse en forma explícita de la siguiente manera:

$$q \rightarrow \bar{q} \rightarrow T = \frac{\bar{q}}{2 K_2} \rightarrow S = \sqrt{\left(\frac{K_1}{3 K_2}\right)^3 + T^2} \rightarrow \bar{w}_q = \sqrt[3]{S + T} - \sqrt[3]{S - T} \quad (52)$$

$$\text{Posteriormente se utiliza (2)} \quad \bar{\sigma}_q = K_3 \bar{w}_q + K_4 (\bar{w}_q)^2 \rightarrow \sigma_q \quad (53)$$

Notar que en este caso, al error de la ecuación (2) se le agrega el error de la ecuación (1).

Dada una placa, se puede determinar con facilidad la máxima carga y el desplazamiento máximo limitado por la tensión admisible del material σ_{adm} . En efecto (2) permite despejar \bar{w}

$$\sigma_{adm} \rightarrow \bar{\sigma} \rightarrow \bar{w} = \frac{\sqrt{(K_3)^2 + 4 K_4 \bar{\sigma}} - K_3}{2 K_4} \rightarrow \begin{cases} w \\ \bar{q} \rightarrow q_{adm} \end{cases} \quad (54)$$

Las ecuaciones (52) y (54) muestran que los polinomios en \bar{w} usados en las A.E.E., permiten: “despejar” \bar{w} a partir del valor prefijado q de la carga o de la tensión admisible σ_{adm} .

Ajuste tipo 2: Cuando se utiliza el ajuste mediante exponentes no enteros del tipo (32), (43) y (50) no puede hacerse el “despeje” como en (52) y (54), por lo tanto debe resolverse la ecuación correspondiente, pero los resultados que se obtienen son más precisos.

La figura 4 muestra la tensión radial en el borde en función de la carga aplicada. Se dan los valores numéricos de E.F. y las aproximaciones dadas en las Tablas 11, 12 y 13. La Tabla 9 incluye las diferencias porcentuales de las gráficas aproximadas en la Figura 4.

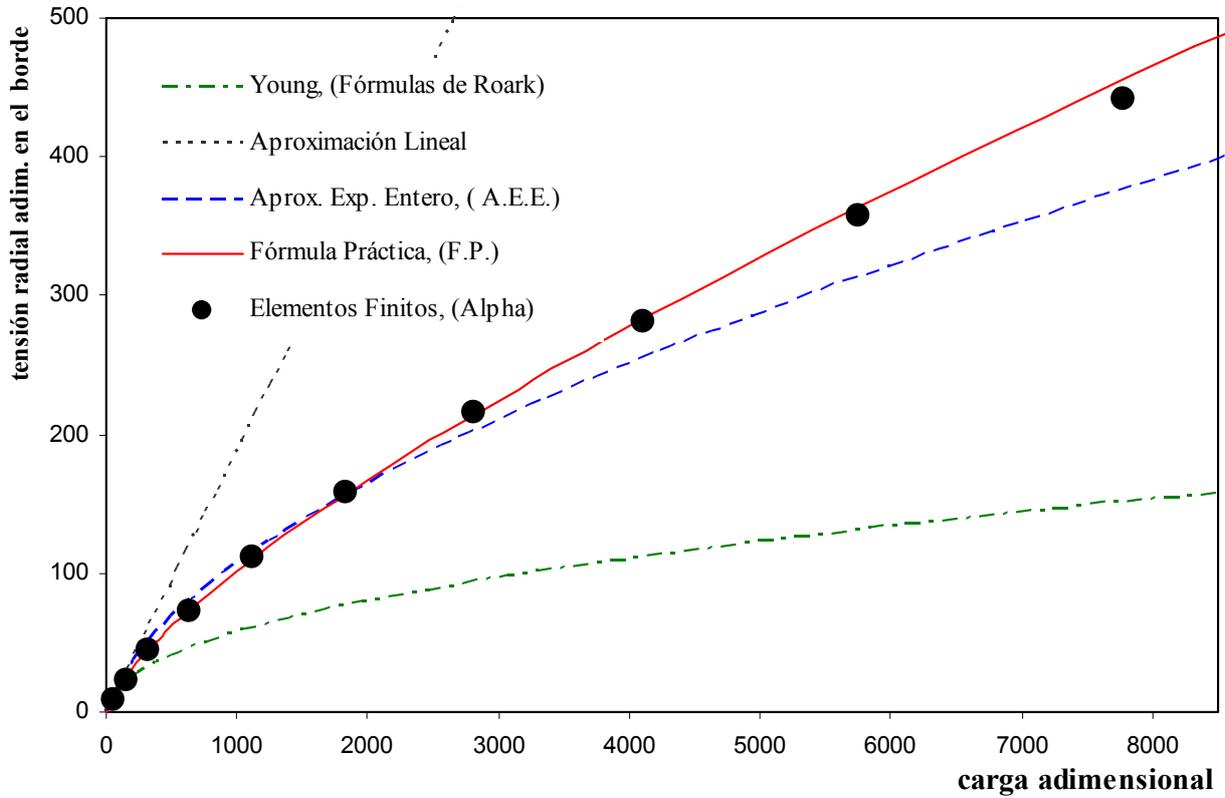


Figura 4: Tensión radial adimensional $\bar{\sigma}_r$ en el borde en función de la carga adimensional \bar{q}

carga \bar{q}	Tensión radial $\bar{\sigma}_r$ en el borde $\rightarrow (\bar{\sigma}^* = 0,89 \bar{\sigma}_r)$				Error % de las aproximaciones		
	Elementos Finitos	Young (23) (48)	A. E. E. (28) (49)	F. P. (32) (50)	Fórmulas de Young	Exponente Entero	Fórmulas Prácticas
0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0
53,3	9,82	9,37	11,48	9,99	-4,6	16,9	1,7
146,2	23,84	20,09	28,22	24,17	-15,7	18,4	1,4
322,5	44,60	32,20	50,74	44,52	-27,8	13,8	-0,2
630,1	73,78	45,66	79,43	72,66	-38,1	7,7	-1,5
1116,9	112,04	60,40	114,31	109,78	-46,1	2,0	-2,0
1828,4	159,63	76,32	155,24	156,73	-52,2	-2,8	-1,8
2807,7	216,41	93,36	202,04	214,19	-56,9	-6,6	-1,0
4097,5	282,67	111,50	254,63	282,77	-60,6	-9,9	0,0
5740,0	357,67	130,72	312,94	363,08	-63,5	-12,5	1,5
7777,5	442,16	151,2	376,94	455,69	-65,8	-14,8	3,1
Error promedio en el intervalo $[0 \leq \bar{w} \leq 5] \rightarrow$					43,1	10,5	1,4

Tabla 9: Valores de $\bar{\sigma}_r$ vs. \bar{q} calculados vía E.F. y con las aproximaciones de Young, A.E.E. y F.P.

6. RANGO DE UTILIZACIÓN DE LAS FÓRMULAS PRÁCTICAS

Como se comentó anteriormente, cuando se calcula la tensión en función de la carga dato se acumulan los errores de las ecuaciones (1) y (2). Cuando \bar{w} es pequeño el error acumulado por las fórmulas prácticas es mayor que el error de la aproximación lineal. Por ello las fórmulas prácticas no deben usarse cuando $\bar{w} < \bar{w}^*$:

$$\text{Ajuste tipo 1: } \bar{w}^* = \frac{K_1 K_4}{K_2 K_3} \quad (55)$$

Cuando se realiza el ajuste con exponentes no enteros el límite inferior \bar{w}^* es más bajo:

$$\text{Ajuste tipo 2: } \bar{\sigma}_{centro} \rightarrow \bar{w}^* = \left(\frac{K_1 K_4}{K_2 K_3} \right)^{0,77} \quad \bar{\sigma}_{borde} \rightarrow \bar{w}^* = \left(\frac{K_1 K_4}{K_2 K_3} \right)^{0,57} \quad (56)$$

El valor de \bar{w}^* se determina calculando la intersección de la aproximación lineal con la gráfica no lineal ($\bar{\sigma}$ vs \bar{q}) obtenida usando las fórmulas prácticas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{lineal} \rightarrow \frac{\bar{\sigma}}{\bar{q}} = \frac{K_1 \bar{w}_L}{K_3 \bar{w}_L} = \frac{K_1}{K_3} \\ \text{no lineal} \rightarrow \frac{\bar{\sigma}}{\bar{q}} = \frac{K_1 \bar{w} + K_2 \bar{w}^3}{K_3 \bar{w} + K_4 \bar{w}^2} \end{array} \right\} \text{igualando y despejando} \left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_1 = 0 \\ \bar{w}_2 = \frac{K_1 K_4}{K_2 K_3} \end{array} \right. \quad (57)$$

Existen dos soluciones, la dada por (55) y la intersección en el origen cuando $\bar{w} = 0$. En el intervalo $\bar{w} < \bar{w}^*$ la curva de $\bar{\sigma}(\bar{q})$ esta arriba de la solución lineal (recta $\bar{\sigma} = K_1/K_3 \bar{w}$), lo que es inconsistente.

$$0 < \bar{w} < \bar{w}^* \Rightarrow \bar{\sigma}(\bar{q}) > \frac{K_1}{K_3} \bar{w}$$

Notar que las fórmulas con coeficiente no entero (Ajuste tipo 2), son más precisas y por ende su rango de validez es mayor ya que \bar{w}^* resulta menor (aproximadamente la mitad según se observa en la Tabla 10).

Ajuste tipo 1: Exponente entero		Ajuste tipo 2: Exponente no entero	
centro	borde	centro	borde
$\bar{w}^* = 0,35$	$\bar{w}^* = 1,06$	$\bar{w}^* = 0,17$	$\bar{w}^* = 0,51$

Tabla 10: Límite inferior de validez de las fórmulas prácticas \bar{w}^* ($\nu = 0,3$)

En resumen, cuando los desplazamientos son pequeños (digamos $\bar{w} < 0,5$) el cálculo no lineal es innecesario. Más aun, cuando \bar{w} es menor que el valor \bar{w}^* dado por (56) los valores provistos por las fórmulas prácticas tienen más error que la aproximación lineal que es mucho más fácil de calcular. Esos valores se presentan en la Tabla 10 para el caso $\nu = 0,3$. En la página siguiente se dan tablas que resumen las fórmulas provistas por las diferentes aproximaciones.

7. FÓRMULAS PRÁCTICAS

Tabla 11: FÓRMULAS PRÁCTICAS propuestas. Campo de validez y acotación del error

	FÓRMULAS PRÁCTICAS con exponentes no enteros $[0,5 < \bar{w} \leq 5]$	$K_2 - K_4$ $\nu = 0,3$	Error %		#. ecuac.
			prom.	máx.	
\bar{q}	$\frac{85,333}{1-\nu^2} \bar{w} + \frac{42 + 24,8\nu - 16,1\nu^2}{1-\nu^2} (\bar{w})^{3,07}$	52,76	0,3	0,9	(32)
$\bar{\sigma}_r$ centro	$\frac{8}{1-\nu} \bar{w} + \frac{1,345 - 0,616\nu}{1-\nu} (\bar{w})^{2,3}$	1,664	2,0	6,5	(43)
$\bar{\sigma}_r$ borde	$\frac{16}{1-\nu^2} \bar{w} + \frac{5,240 + 2,665\nu}{1-\nu^2} (\bar{w})^{2,5}$	6,637	1,6	3,8	(50)

Tabla 12: APROXIMACIONES con EXPONENTE ENTERO. Campo de validez y acotación del error

	APROXIMACIONES A.E.E. con exponentes enteros $[1 < \bar{w} \leq 5]$	$K_2 - K_4$ $\nu = 0,3$	Error %		#. ecuac.
			prom.	máx.	
\bar{q}	$\frac{85,333}{1-\nu^2} \bar{w} + \frac{45,5 + 26,9\nu - 17,4\nu^2}{1-\nu^2} (\bar{w})^3$	57,15	1,8	3,5	(28)
$\bar{\sigma}_r$ centro	$\frac{8}{1-\nu} \bar{w} + \frac{1,955 - 0,892\nu}{1-\nu} (\bar{w})^2$	2,411	3,8	7,2	(42)
$\bar{\sigma}_r$ borde	$\frac{16}{1-\nu^2} \bar{w} + \frac{8,972 + 4,563\nu}{1-\nu^2} (\bar{w})^2$	11,36	11,9	21,4	(49)

Tabla 13: FÓRMULAS DE ROARK.⁴ Campo de validez y acotación del error

	FÓRMULAS DE ROARK Mc. Graw-Hill, 6ta. Ed., 1989 $[1 < \bar{w} \leq 5]$	$K_2 - K_4$ $\nu = 0,3$	Error %		#. ecuac.
			prom.	máx.	
\bar{q}	$\frac{85,333}{1-\nu^2} \bar{w} + \frac{41,6}{1-\nu^2} (\bar{w})^3$	45,71	13,7	20,5	(23)
$\bar{\sigma}_r$ centro	$\frac{8}{1-\nu} \bar{w} + 3,9 (\bar{w})^2$	3,9	21,5	28,2	(41)
$\bar{\sigma}_r$ borde	$\frac{16}{1-\nu^2} \bar{w} + 1,9 (\bar{w})^2$	1,9	46,5	69,4	(48)

8. CONCLUSIONES

- En el presente trabajo se obtuvieron expresiones que permiten estimar el desplazamiento del punto medio y las tensiones en el centro y en el borde de una placa circular con bordes empotrados bajo carga transversal uniforme. Se presentan dos tipos de aproximaciones en forma adimensional: unas con exponente entero igual al deducido analíticamente, que denominaremos Aproximaciones a Exponente Entero (A.E.E.) y otras con exponente ajustado (no entero) que denominaremos Fórmulas Prácticas. Las aproximaciones propuestas se compararon y ajustaron para una placa con un coeficiente de poisson $\nu = 0,3$ en el intervalo $\bar{w} = [0, 5]$.
- **Al estimar la carga** en función del desplazamiento máximo con la Fórmula Práctica (32) el error en el intervalo considerado $[0, 5]$ permanece inferior al 1 % (0,3 % en promedio). En el caso de la referencia⁴ el error máximo es superior al 20 % (14 % en promedio), pero esos errores están todos del lado de la seguridad. En el caso de la aproximación A.E.E (28) el error máximo es del 3,5 % del lado de la inseguridad (1,8 % en promedio).
- **Al estimar la tensión en el centro** de la placa en función del desplazamiento máximo con la Fórmula Práctica (43) el error máximo del lado de la inseguridad en el intervalo considerado $[0, 5]$ permanece inferior al 6 % mientras que en el caso de la aproximación A.E.E (42) el error máximo del lado de la inseguridad es del 7 %. En el caso de la referencia⁴ el error máximo es del 28 % y el error promedio superior al 20 %. Si bien en este último caso los errores son grandes están del lado de la seguridad porque magnifican la tensión real.
- **Al estimar la tensión en el borde** de la placa en función del desplazamiento máximo con la Fórmula Práctica (50), el error en el intervalo considerado $[0, 5]$ permanece inferior al 3,8 % (1,6 % en promedio), siendo el error máximo del lado de la inseguridad del 2,2 %. Estos resultados pueden considerarse como muy buenos. En cambio, la aproximación A.E.E (49) tiene un error máximo del lado de la inseguridad del 16 % (12 % en promedio) y en el caso de la referencia⁴ (48) el error máximo del lado de la inseguridad es del 70 % (47 % en promedio). En consecuencia estas dos últimas aproximaciones deben evitarse.
- **Al estimar la tensión en el borde** de la placa en función de la carga con la Fórmulas Prácticas, el error en el intervalo considerado $[0, 5]$ permanece inferior al 3,1 % (1,4 % en promedio), siendo el error máximo del lado de la inseguridad del 2 %. Estos resultados pueden considerarse como muy buenos, en cambio las aproximaciones A.E.E tiene un error máximo del lado de la inseguridad del 15 % (10 % en promedio). Debe destacarse que la tensión real en el borde en promedio es más del doble del valor provisto por las fórmulas de Roark.
- **Conclusión:** se recomienda utilizar solamente las Fórmulas Práctica dadas en la Tabla 11.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen especialmente al Dr. Fernando G. Flores por facilitarles uno de sus programas de cálculo para realizar las comparaciones y ajustes de las expresiones analíticas encontradas.

REFERENCIAS

- [1] Timoshenko, S., "Vibration Problems in Engineering", p. 319, D. Van Nostrand Company Inc., 1928.
- [2] Timoshenko, S., *Theory of Plates and Shells*, Mc. Graw-Hill Company, Inc. New York and London 1940.
- [3] Way, S., "Bending of Circular Plates with Large Deflection, *Trans. ASME*, Vol 56 (8), 1934.
- [4] Young, W. C., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, Mc. Graw-Hill Book Company, Six Edition, 1989.
- [5] Hsu, T. H., "Structural Engineering & Applied Mechanics Data Handbook, Vol 3: Plates, Gulf Publishing Company, 1988.
- [6] Flores, F. G., *Programa Alpha. Análisis Estático/Dinámico Implícito de Sólidos con énfasis en Estructuras Laminares*, Departamento de Estructuras, UNC, 1994-2004.
- [7] Massa, J. C., *Programa Inter2. Ajuste de polinomios por mínimos cuadrados de errores porcentuales*, Departamento de Estructuras, UNC. 2003.