

ANÁLISIS DE LAS VIBRACIONES LIBRES DE UNA PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON UNA MASA DE DIMENSIONES FINITAS ADOSADA ELÁSTICAMENTE

Mariano Febbo ^{α,χ}, Diana V. Bambill ^{β,χ} y Raúl E. Rossi ^β

^α Departamento de Física– Instituto de Mecánica Aplicada. Universidad Nacional del Sur.

^β Departamento de Ingeniería – Instituto de Mecánica Aplicada. Universidad Nacional del Sur.

^χ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

E-mails: mfebbo@uns.edu.ar; dbambill@criba.edu.ar; rerozzi@uns.edu.ar

Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>

Keywords: Placa, Masa finita, Vibraciones, Forma modal, Vinculación elástica

Abstract. El estudio de las vibraciones de un sistema estructural permite tomar decisiones sobre dónde ubicar un equipamiento o cómo mitigar una vibración excesiva. En particular la fundación de equipamientos sobre losas es una situación de interés desde el punto de vista de los efectos vibratorios y sonoros que puede transmitir al medio que lo rodea. En esos casos es necesario estudiar el sistema acoplado: placa-masa vinculada.

En el presente estudio se realiza un análisis de los modos de vibrar de una placa rectangular simplemente apoyada a partir de la ubicación de una masa rígida de dimensiones finitas montada mediante cuatro vínculos elásticos puntuales.

El conocimiento de los valores de las frecuencias y sus correspondientes formas modales proporciona una mayor certeza para la generación del modelo estructural más adecuado a cada diseño.

1 INTRODUCCIÓN

Las placas son elementos estructurales muy utilizados en diseños de ingeniería de variado tipo como lo es el caso de un motor o maquinaria sobre una placa estructural o bien en una placa de circuito impreso con algún dispositivo electrónico adherido a ella. Cualquiera sea el tipo de aplicación de este modelo es posible ver que el comportamiento dinámico de la placa es alterado por la presencia de una masa adosada (Bambill, Felix, Rossit, 2006) y por las características de elasticidad de los vínculos que las conectan (Rossit, Laura, 2001; Vera, Febbo, Méndez, Paz, 2005).

El presente trabajo tiene dos finalidades. Una, es desarrollar una metodología basada en los multiplicadores de Lagrange (Meirovitch, 1998) y la otra consiste en presentar un análisis del comportamiento dinámico de una placa cuando sobre ella actúa una masa rígida de valor significativo, vinculada mediante vínculos elásticos y ubicada en una posición arbitraria. El modelo propuesto permite plantear las bases para comprender el fenómeno y generar una metodología para el estudio de sistemas más complejos, como los mencionados anteriormente, pues la masa adosada se consideró con tres grados de libertad, lo que habilita a modelar una amplia gama de situaciones. El mismo ha sido motivo de estudio en un trabajo previo de los autores (Febbo, Bambill, Rossi, 2009).

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Para el planteo de la solución buscada se utiliza la formulación de Lagrange, que permite interpretar físicamente a los multiplicadores de Lagrange como las fuerzas que el sistema masa-resortes ejerce sobre la placa rectangular sola (sin considerar la presencia de una masa adosada).

La Figura 1 muestra la placa rectangular simplemente apoyada en sus cuatro bordes, con una masa finita rígida montada sobre ella, mediante cuatro vínculos elásticos que restringen la translación vertical (dirección eje z) de los puntos que vinculan.

Los lados de la masa $a_e \times b_e \times h_e$, tienen las direcciones de los ejes x_e, y_e, z_e .

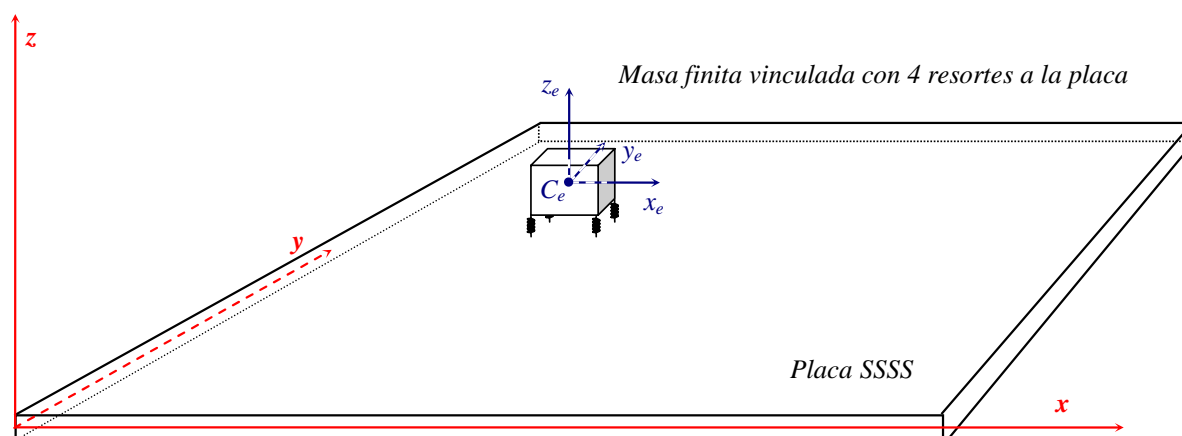


Figura 1: Placa simplemente apoyada con una masa finita rígida, elásticamente adosada.

Los tres grados de libertad, 3GL, de la masa son una translación τ en la dirección z_e , y dos

rotaciones θ_x y θ_y en las direcciones de los ejes x_e e y_e . La vinculación elástica placa-masa está dada por cuatro resortes traslacionales ubicados en los cuatro vértices de la superficie media de la masa, ver Figura 2, se asignan los números del 1 al 4 para identificar los puntos de vinculación y los correspondientes resortes. En el modelo se considera que los lados de la placa y de la masa rígida son paralelos entre sí.

Siguiendo el procedimiento estándar de asumir que el desplazamiento será de la forma

$$w(x, y, t) = \sum_{i,j}^{n,n'} c_{ij}(t) \phi_{ij}(x, y) \tag{1}$$

donde las expresiones $\phi_{ij}(x, y)$ son las primeras $N = n \times n'$ formas modales normales de vibración de la placa sola.

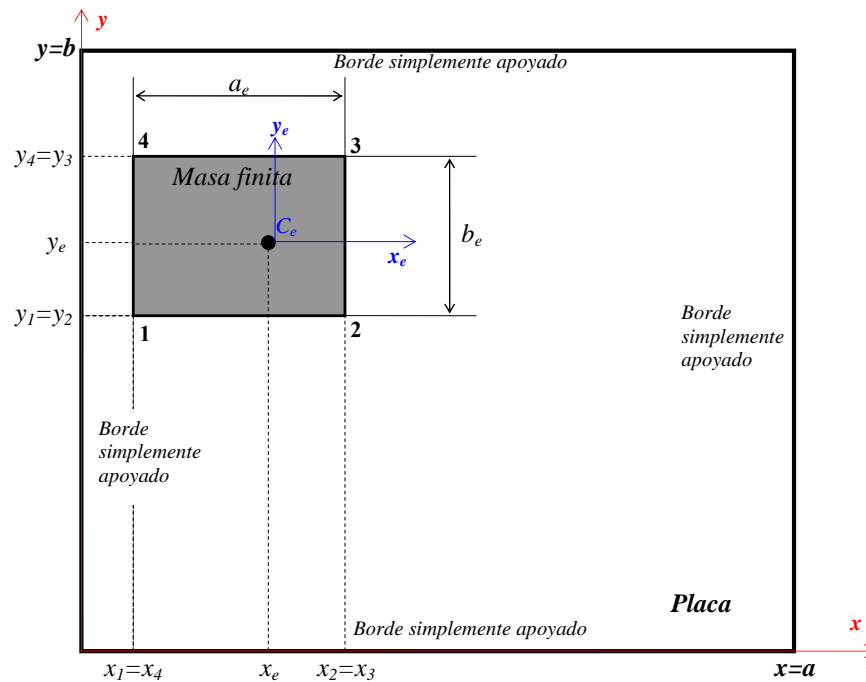


Figura 2: Geometría del sistema en el plano $x - y$.

La energía total del sistema estructural en estudio resulta de adicionar a la energía de la placa sola la del subsistema masa rígida-resortes.

Las energías máximas, cinética T_p y potencial V_p , de la placa sola están dadas por las expresiones:

$$T_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n,n'} m_{ij} \dot{c}_{ij}^2 \tag{2}$$

$$V_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n,n'} m_{ij} \omega_{ij}^2 c_{ij}^2 \tag{3}$$

donde los c_{ij} son las amplitudes de sus modos normales de vibración, ω_{ij} son las frecuencias de la placa sola y los m_{ij} están dados por:

$$\rho h \int_A \phi_{ij} \phi_{mn} dA = \delta_{ij} m_{ij} \tag{4}$$

En tanto para la masa rígida elásticamente adosada, las máximas energías cinética y potencial T_e y V_e se expresan como:

$$T_e = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{\dot{z}_{m1} a_2}{a_e} + \frac{\dot{z}_{m2} (a_1 a_4 - a_2 a_3)}{a_e b_e} + \frac{\dot{z}_{m3} a_3}{b_e} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{ey} \left(\frac{\dot{z}_{m2} - \dot{z}_{m1}}{a_e} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{ex} \left(\frac{\dot{z}_{m3} - \dot{z}_{m2}}{b_e} \right)^2 \quad (5)$$

$$V_e = +\frac{1}{2} k_1 (z_{m1} - w_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (z_{m2} - w_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (z_{m3} - w_3)^2 + \frac{1}{2} k_4 (z_{m4} - w_4)^2 \quad (6)$$

en función de las constantes de los resortes que vinculan la masa rígida con la placa k_l , con $l=1, 2, 3, 4$; los desplazamientos z_{ml} y w_l de los puntos de la masa rígida y de la placa, respectivamente, donde se produce la vinculación, de las dimensiones de la masa a_e y b_e y de las longitudes definidas como:

$$\begin{aligned} a_1 &= |x_e - x_1|; \\ a_2 &= |x_2 - x_e|; \\ a_3 &= |y_e - y_1|; \\ a_4 &= |y_3 - y_e|. \end{aligned}$$

Por lo que las energías cinética y potencial total del sistema resultan :

$$T = T_p + T_e \quad (7)$$

$$V = V_p + V_e \quad (8)$$

Las siguientes ecuaciones son las funciones que representan las restricciones,

$$f_1 = \sum_{i,j}^{n,n'} c_{ij}(t) \phi_{ij}(x_1, y_1) - w_1(t) = 0; \quad (9)$$

$$f_2 = \sum_{i,j}^{n,n'} c_{ij}(t) \phi_{ij}(x_2, y_2) - w_2(t) = 0; \quad (10)$$

$$f_3 = \sum_{i,j}^{n,n'} c_{ij}(t) \phi_{ij}(x_3, y_3) - w_3(t) = 0; \quad (11)$$

$$f_4 = \sum_{i,j}^{n,n'} c_{ij}(t) \phi_{ij}(x_4, y_4) - w_4(t) = 0; \quad (12)$$

$$f_5 = z_{m4} - (z_{m1} + z_{m3} - z_{m2}). \quad (13)$$

Las cuatro primeras corresponden a la condición de compatibilidad de desplazamiento entre la placa y el sistema masa-resorte en los puntos de vinculación. La quinta ecuación está dada por la relación entre los desplazamientos de los puntos **1, 2, 3, 4**, del plano medio de la masa, tomando en consideración los tres grados de libertad permitidos a la masa rígida.

Para obtener las ecuaciones de movimiento aplicando las ecuaciones de Lagrange con γ restricciones, para un sistema con $N+m$ variables cinemáticas no independientes s_p , las ecuaciones son:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta L}{\delta s_p} \right) - \frac{\delta L}{\delta s_p} = \sum_{r=1}^{\gamma} \lambda_r \frac{\delta f_r}{\delta s_p}; \quad p = 1, 2, \dots, N+m \quad (14)$$

donde los λ_r son los multiplicadores de Lagrange

Las ecuaciones (14), junto con las ecuaciones (9-13) generan un conjunto de $N+m+\gamma$ ecuaciones en las variables s_p ($p=1, 2, \dots, N+m$) y los multiplicadores de Lagrange λ_r , (Meirovitch, 1998).

Reemplazando las ecuaciones (9-13), se reduce el sistema a un sistema de $N+3$

ecuaciones diferenciales de segundo orden en función sólo de las variables independientes:

$$\mathbf{q} \equiv [q_1, \dots, q_N, q_{N+1}, q_{N+2}, q_{N+3}] \equiv [c_{11}, \dots, c_{n,n'}, z_{m1}, z_{m2}, z_{m3}] \quad (15)$$

matricialmente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = 0 \quad (16)$$

Para calcular los coeficientes de frecuencia natural y las formas modales de la placa con la masa adosada, el sistema de ecuaciones, expresión (16), se resuelve imponiendo un movimiento armónico simple

$$q_p(t) = \bar{q}_p e^{i\omega t} \quad (17)$$

y debido a que las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} contienen solamente coeficientes constantes, resultará un sistema lineal de autovalores.

Las expresiones de las matrices se indican a continuación:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{M}_{3GL} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_{sub} & \mathbf{K}_e \\ \mathbf{K}_e^T & \mathbf{K}_{3GL} \end{pmatrix} \quad (18)$$

donde \mathbf{M}_p y \mathbf{K}_p son matrices diagonales de $N \times N$ cuyos elementos son respectivamente m_p y $m_p \omega_p^2$. Y la matriz \mathbf{K}_{sub} corresponde al sistema masa-resorte adosado:

$$\mathbf{K}_{sub} = \sum_{l=1}^4 k_l \Phi(x_l, y_l) \Phi^T(x_l, y_l) \quad (19)$$

donde $\Phi(x_l, y_l)$ son las autofunciones evaluadas en los puntos donde se vinculan los resortes a la placa:

$$\Phi(x_l, y_l) = [\phi_1(x_l, y_l) \phi_1(x_l, y_l) \phi_1(x_l, y_l) \dots \phi_{N-1}(x_l, y_l) \phi_N(x_l, y_l)]^T; \quad (20)$$

Las \mathbf{M}_{3GL} y \mathbf{K}_{3GL} son matrices simétricas de 3×3 que corresponden a las matrices de masa y rigidez del sistema masa-resorte adosado, respectivamente:

$$\mathbf{M}_{3GL} = \begin{pmatrix} \frac{m_e a_2^2 + I_{ey}}{a_e^2} & \frac{m_e a_2 (a_4 a_1 - a_3 a_2) - I_{ey} b_e}{a_e^2 b_e} & \frac{m_e a_2 a_3}{a_e b_e} \\ \frac{m_e a_2 (a_4 a_1 - a_3 a_2) - I_{ey} b_e}{a_e^2 b_e} & \frac{m_e (a_4 a_1 - a_3 a_2)^2 + I_{ex} b_e^2 + I_{ey} a_e^2}{a_e^2 b_e^2} & \frac{m_e a_3 (a_4 a_1 - a_3 a_2) - I_{ex} a_e}{a_e b_e^2} \\ \frac{m_e a_2 a_3}{a_e b_e} & a_{32} & \frac{m_e a_3^2 + I_{ex}}{b_e^2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{3GL} = \begin{pmatrix} k_1 + k_4 & -k_4 & k_4 \\ -k_4 & k_1 + k_4 & -k_4 \\ k_4 & -k_4 & k_3 + k_4 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Y finalmente la matriz rectangular \mathbf{K}_c de $N \times 3$

$$\mathbf{K}_c = [-k_1 \Phi(x_1, y_1) - k_4 \Phi(x_4, y_4) \quad -k_2 \Phi(x_2, y_2) - k_4 \Phi(x_4, y_4) \quad -k_3 \Phi(x_3, y_3) - k_4 \Phi(x_4, y_4)] \quad (23)$$

Las funciones de forma que se utilizaron en el cálculo son la solución exacta de la ecuación diferencial de la placa vibrante $w(x, y, t)$, [Leissa, 1993](#), de la placa simplemente

apoyada en los cuatro bordes, SSSS:

$$\phi_{ij}(x, y) = \text{sen}\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (24)$$

Una vez calculados los autovalores, frecuencias naturales del sistema estructural vibrante, se calculan los autovectores (\bar{q}_p) de manera directa:

$$W^{(i)}(x, y) = \sum_{l=1}^N q^{(i)} \phi_l(x, y); \text{ con } i = 1, \dots, N+3 \quad (25)$$

donde el supraíndice (i) indica el modo de vibración natural del sistema placa-masa-resortes.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Los resultados que se presentan corresponden a las frecuencias de vibración libre de una placa rectangular isótropa simplemente apoyada en todo su contorno, con una masa rígida finita de 3 grados de libertad, adosada mediante cuatro resortes según se muestra en las Figuras 1 y 2.

Para los ejemplos resueltos se adoptaron como dimensiones de la placa $a = 2\text{m}$, $b = 1\text{m}$, $h = 0,005\text{m}$ y las constantes del material $\rho = 7,850 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,30$, $E = 2,051 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. Las frecuencias naturales ω se expresan en radianes por segundo.

El número N de modos de la placa, adoptado para la aproximación de la elástica de la misma, se tomó igual a 10, como resultado de un estudio de convergencia de los resultados calculados.

La masa propia de los resortes no se consideró en el cálculo y las constantes de rigidez se supusieron iguales a: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$.

Los mismos casos también fueron resueltos por los autores utilizando un código de elementos finitos, Algor, 2007. En las tablas, se presentan en letra cursiva.

En la Tabla 1 se presentan las nueve primeras frecuencias naturales del sistema placa-masa en función de las constantes de los resortes. Las características de la masa finita rígida son: $m_e = 3,925\text{kg}$; $h_e = 0,37508\text{m}$; $a_e = b_e = 0,75\text{m}$; las distancias $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,375\text{m}$; y los momentos de inercia respecto a los ejes: $I_{ex} = m_e(h_e^2 + a_e^2)/12$ e $I_{ey} = m_e(h_e^2 + b_e^2)/12$; resultan en este caso: $I_{ex} = I_{ey} = 0,2300\text{ kg m}^2$. La masa está ubicada en el centro de la placa y las coordenadas de los puntos donde se vinculan los cuatro resortes a la placa, expresadas en metros son: $(x_1, y_1) = (0,625, 0,125)$; $(x_2, y_2) = (1,375, 0,125)$; $(x_3, y_3) = (1,375, 0,875)$; $(x_4, y_4) = (0,625, 0,875)$.

Las tres primeras frecuencias propias del subsistema masa rígida-resortes (considerado separado de la placa) se muestran en letra negra, a modo de completar el estudio.

Según puede observarse de la Tabla al disminuir la rigidez de los resortes disminuyen sensiblemente los valores de las frecuencias del sistema completo. Los valores calculados con el método de los multiplicadores de Lagrange (primera fila de cada valor de rigidez del resorte) en todos los casos presentados tienen una excelente concordancia con los valores que se obtienen por el método de elementos finitos.

k	ω								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10^3	31,8772	49,4208	49,4362	95,5366	152,7571	248,0812	324,5220	381,6797	381,7737
	<i>31,8718</i>	<i>49,4063</i>	<i>49,4242</i>	<i>95,5381</i>	<i>152,7633</i>	<i>248,0953</i>	<i>324,5282</i>	<i>381,7048</i>	<i>381,7988</i>
	31,9235	49,4535	49,4535						
5×10^3	70,4484	96,5942	109,9288	110,3678	153,5274	248,0914	325,0242	381,7666	382,2285
	<i>70,3918</i>	<i>96,5914</i>	<i>109,7701</i>	<i>110,2342</i>	<i>153,5283</i>	<i>248,1055</i>	<i>325,0286</i>	<i>381,7913</i>	<i>382,2526</i>
	71,3831	110,5815	110,5815						
10^4	90,7003	106,0048	146,5039	155,6954	162,8608	248,1063	325,8182	381,8952	382,7951
	<i>90,6562</i>	<i>105,8785</i>	<i>146,3459</i>	<i>155,3181</i>	<i>162,5567</i>	<i>248,1203</i>	<i>325,8148</i>	<i>381,9184</i>	<i>382,8160</i>
	100,9504	156,3858	156,3858						
$2,5 \times 10^4$	93,9633	151,4052	161,3018	242,6340	248,1765	248,7718	330,5080	382,5061	384,4823
	<i>93,9584</i>	<i>151,4002</i>	<i>160,6330</i>	<i>241,2326</i>	<i>246,8838</i>	<i>248,1892</i>	<i>330,3450</i>	<i>382,5064</i>	<i>384,4818</i>
	159,6174	247,2677	247,2677						
$3,5 \times 10^4$	94,1497	151,5867	190,0392	248,2690	279,9004	293,3707	338,9292	383,3243	385,5966
	<i>94,1463</i>	<i>151,5847</i>	<i>188,9335</i>	<i>248,2778</i>	<i>278,0480</i>	<i>290,2088</i>	<i>338,1398</i>	<i>383,2568</i>	<i>385,5721</i>
	188,8618	292,5711	292,5711						
5×10^4	94,2616	151,6924	225,7575	248,7269	306,0394	346,8716	370,3186	387,2244	387,2524
	<i>94,2591</i>	<i>151,6919</i>	<i>223,9279</i>	<i>248,6837</i>	<i>304,9441</i>	<i>341,9446</i>	<i>366,7809</i>	<i>386,4040</i>	<i>387,1780</i>
	225,7331	349,6893	349,6893						
placa sola	95,4150	152,6639	248,0789	324,4108	381,6598	381,6598	477,0748	553,4067	610,6557
	<i>95,4165</i>	<i>152,6702</i>	<i>248,0930</i>	<i>324,4171</i>	<i>381,6849</i>	<i>381,6849</i>	<i>477,1313</i>	<i>553,4460</i>	<i>610,7562</i>

Tabla 1: Valores de frecuencia para los primeros nueve modos de la placa con la masa finita vinculada elásticamente en el centro en función de las constantes de rigidez de los resortes.

Tal como era previsible la presencia del subsistema afecta las frecuencias de la placa sola. Aquellas frecuencias de la placa sola que originalmente eran superiores a las frecuencias propias del subsistema (valores en negrita), se ven disminuidas y aparecen en el sistema vibrante completo (placa + subsistema) nuevas frecuencias cercanas a las del subsistema masa-resortes.

En la Tabla 2, se presentan seis casos diferentes de masa rígida para el subsistema adosado. Se mantienen las dimensiones en el plano x, y , y se varían la masa m_e y la altura h_e , de modo de lograr variar los momentos de inercia.

Caso	m_e (kg)	h_e (m)	$I_{ex} = I_{ey}$ (kg m ²)
1	1,9625	0,09375	0,093429565429688
2	2,7500	0,09375	0,130920410156250
3	3,2500	0,09375	0,154724121093750
4	3,9250	0,03750	0,184444335937500
5	3,9250	0,09375	0,186859130859375
6	7,8500	0,09375	0,373718261718750

Tabla 2: Distintos casos de masas rígidas con $a_e = b_e = 0,75 \text{ m} = \text{cte}$

En la Tabla 3 se muestran los valores de frecuencia del sistema completo para los seis casos descriptos considerando la masa ubicada en el centro de la placa, con un valor de $k = 2.5 \times 10^4$ para la constante de rigidez de los cuatro resortes traslacionales.

Nuevamente las frecuencias fueron calculadas por el método de los multiplicadores de Lagrange y por el de elementos finitos (en *itálica*). Se completa la tabla agregando los valores de frecuencia de la placa sola y del sistema masa-resorte solo (en **negrita**), a fin de tenerlos como referencia para el análisis.

Caso	ω								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
placa	95,4150	152,6639	248,0789	324,4108	381,6598	381,6598	477,0748	553,4067	610,6557
sola	<i>95,4165</i>	<i>152,6702</i>	<i>248,0930</i>	<i>324,4171</i>	<i>381,6849</i>	<i>381,6849</i>	<i>477,1313</i>	<i>553,4460</i>	<i>610,7562</i>
caso 1	94,8327	152,2833	225,7456	248,4072	318,7165	375,1011	384,4823	394,6351	395,7321
	<i>94,8332</i>	<i>152,2885</i>	<i>224,8017</i>	<i>248,4057</i>	<i>318,5776</i>	<i>374,0017</i>	<i>384,4818</i>	<i>392,1256</i>	<i>393,5014</i>
	225,7331	387,9619	387,9619						
caso 2	94,5275	152,0898	191,4984	248,2185	305,6516	327,3944	347,7094	383,5032	384,4823
	<i>94,5267</i>	<i>152,0938</i>	<i>190,6952</i>	<i>248,2297</i>	<i>304,7806</i>	<i>324,8250</i>	<i>346,4284</i>	<i>383,4166</i>	<i>384,4818</i>
	190,6925	327,7386	327,7386						
caso 3	94,3054	151,9511	176,5973	248,1932	289,6632	301,8611	337,5178	382,9607	384,4823
	<i>94,3032</i>	<i>151,9537</i>	<i>175,8599</i>	<i>248,2054</i>	<i>288,3307</i>	<i>299,5009</i>	<i>336,8986</i>	<i>382,9284</i>	<i>384,4818</i>
	175,4116	301,4757	301,4757						
caso 4	93,9633	151,7572	161,3018	248,1765	268,9367	277,0231	332,9674	382,6892	384,4823
	<i>93,9585</i>	<i>151,7576</i>	<i>160,6338</i>	<i>248,1892</i>	<i>267,4764</i>	<i>274,8838</i>	<i>332,6615</i>	<i>382,6779</i>	<i>384,4818</i>
	159,6174	276,1205	276,1205						
caso 5	93,9633	151,7403	161,3018	248,1765	267,3634	275,2682	332,7563	382,6749	384,4823
	<i>93,9585</i>	<i>151,7405</i>	<i>160,6338</i>	<i>248,1892</i>	<i>265,9025</i>	<i>273,1446</i>	<i>332,4637</i>	<i>382,6645</i>	<i>384,4818</i>
	159,6174	274,3305	274,3305						
caso 6	90,3725	118,6178	149,5609	191,4893	197,6625	248,1510	328,5468	382,3221	384,4823
	<i>90,3129</i>	<i>118,2005</i>	<i>149,5030</i>	<i>190,3565</i>	<i>196,2665</i>	<i>248,1644</i>	<i>328,4722</i>	<i>382,3319</i>	<i>384,4818</i>
	112,8665	193,9810	193,9810						

Tabla 3: Variación de las frecuencias del sistema vibrante en función de la masa y los momentos de inercia del sólido rígido adosado.

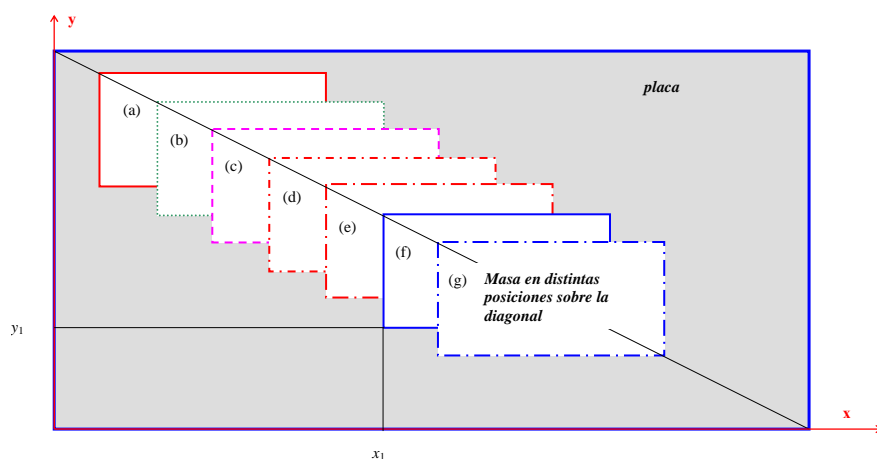


Figura 3: Distintas posiciones consideradas del subsistema adosado a la placa.

Puede observarse que otra vez la concordancia entre ambos métodos es excelente. Los casos de 1 a 6 están ordenados en una serie ascendente de los valores de los momentos de inercia al aumentar la dimensión h_c y por consiguiente la masa rígida. Claramente puede

apreciarse el efecto que produce el aumento de la masa. Por ejemplo en el caso 1 la primera frecuencia del subsistema masa-resorte está entre la segunda y la tercera frecuencias de la placa sola., por lo que en el sistema completo las dos primeras frecuencias disminuyen y aparece una tercera frecuencia “nueva” muy cercana a la del subsistema aislado.

A continuación se analiza el efecto que producen diferentes ubicaciones del subsistema sobre la placa. En la Figura 3 mediante un gráfico se muestran las siete posiciones elegidas para el análisis indicadas como (a), (b), ..., (g). Las características del subsistema adosado son: $m_e = 3,925$ kg; $h_e = 0,09375$ m; $a_e = 0,60$ m; $b_e = 0,30$ m; $I_{ex} = 0.032312256$ kg m²; $I_{ey} = 0,120624756$ kg m² y $k = 2,5 \times 10^4$ N/m; y su ubicación sobre la placa está dada por las coordenadas del punto **1** (x_1, y_1). (Figura 3 y Tabla 4).

Posición del subsistema	x_1 (m)	y_1 (m)
(a)	0,100	0,650
(b)	0,250	0,575
(c)	0,400	0,500
(d)	0,550	0,425
(e)	0,700	0,350
(f)	0,850	0,275
(g)	1,000	0,200

Tabla 4: Coordenadas del punto (x_1, y_1) para las distintas posiciones del subsistema sobre la placa.

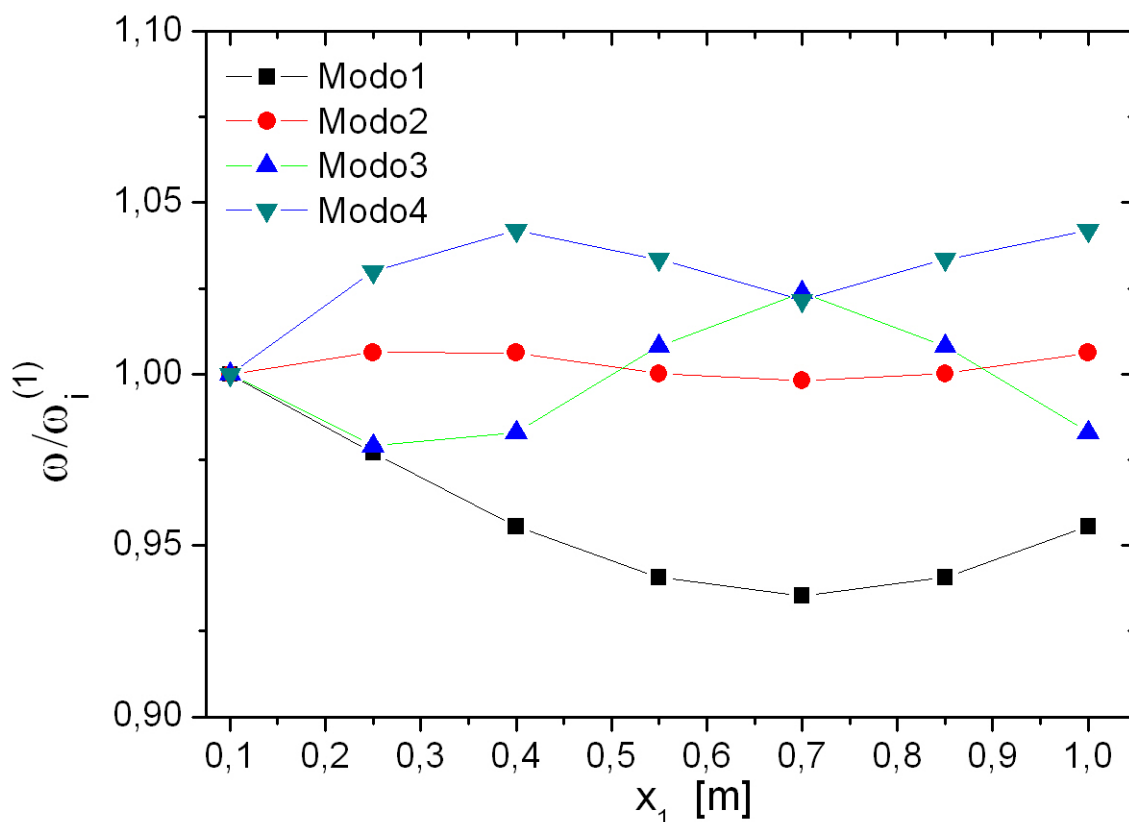


Figura 4: Variación de las frecuencias del sistema completo versus las 7 posiciones adoptadas para el subsistema sobre la placa para las primeras cuatro formas modales.

El gráfico de la Figura 4 muestra la influencia de la posición de la masa sobre las formas

modales del sistema completo sobre los cuatro primeros modos de vibración, se identifica cada forma modal con un color distinto. En ordenadas se indican para las distintas posiciones de la masa, las frecuencias de cada modo normalizadas respecto de la frecuencia del mismo modo con la masa en la posición $x_1 = 0,10$ m. La posición (e) indicada con $x_1 = 0,70$ m corresponde a la posición del subsistema en el centro de la placa. Análogamente la Figura 5, presenta los cuatro modos siguientes de vibración de la placa con el subsistema adosado.

Al cambiar la posición del subsistema las frecuencias correspondientes a las formas modales varían. En general puede indicarse de los resultados presentados en ambas Figuras, 4 y 5, que el comportamiento de las frecuencias del sistema con respecto a la posición del subsistema depende de cada uno de los modos considerados. Por ejemplo analizando la frecuencia fundamental se observa como decrece desde la posición de referencia (a) hasta su mínima relación cuando el subsistema está en el centro de la placa posición (e), pues en esta forma modal el subsistema logra para esa posición el máximo incremento de la energía cinética del sistema completo.

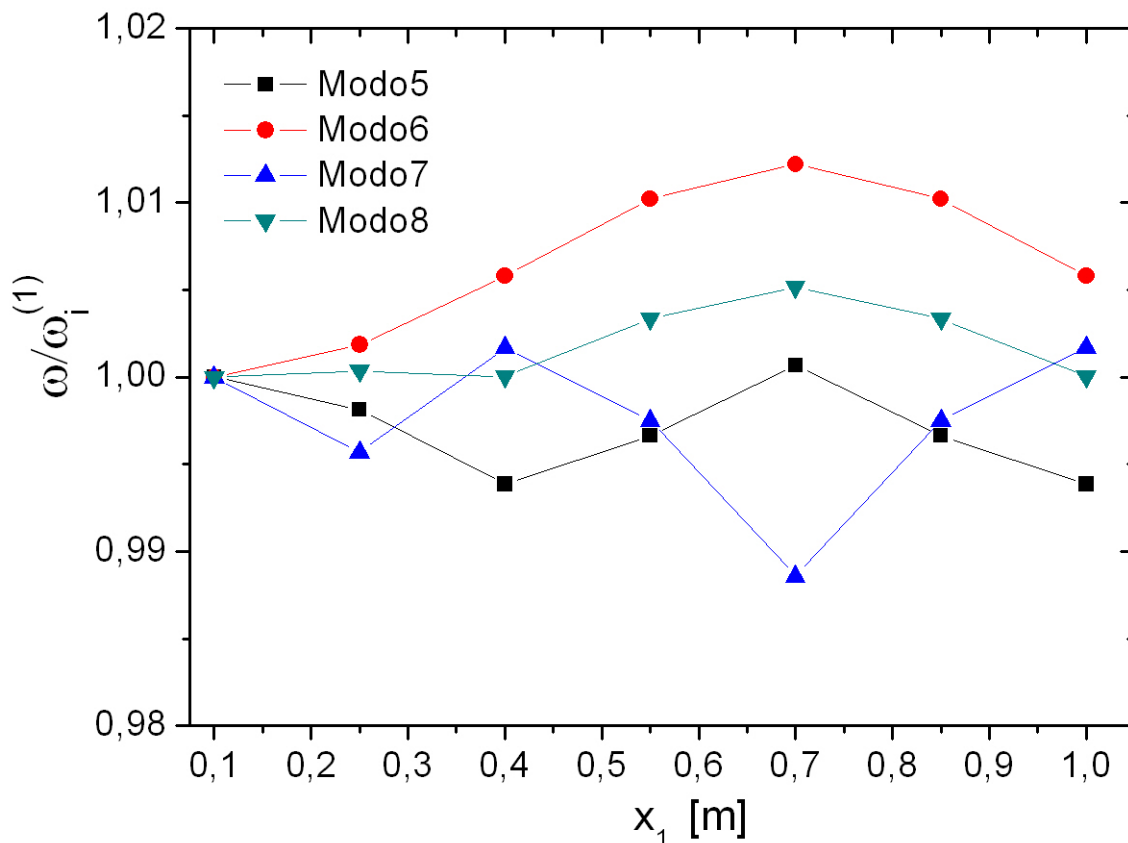


Figura 5 Variación de las frecuencias del sistema completo versus las 7 posiciones adoptadas para el subsistema sobre la placa para las formas modales 5 a 9.

4 CONCLUSIONES

Según puede apreciarse de los resultados presentados, en general las vibraciones libres del sistema placa – masa – resortes, son afectadas por los valores de los diferentes parámetros

adoptados, como los son la mayor o menor rigidez de los resortes, la inercia propia de la masa finita adosada y su dimensión, la posición del subsistema, entre otros parámetros que podrían también variarse. El planteo propuesto admite la posibilidad de modelar una amplia gama de situaciones diferentes y proceder a su estudio particular con un procedimiento rápido de cálculo y con buena precisión.

Los resultados obtenidos son confiables tal como surge de las comparaciones realizadas con el método de elementos finitos.

Como comentario final puede decirse que el método de los multiplicadores de Lagrange prueba ser un método eficiente para calcular las frecuencias de sistema vibrantes compuestos del tipo del analizado.

5 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido posible gracias al auspicio de la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, y del CONICET.

REFERENCIAS

ALGOR V.20.3 Linear Mode Shapes and Natural frequencies Module, 2007.

Bambill, D.V., Felix, D.H., Rossit, C.A. "Natural frequencies of thin rectangular plates with holes or orthotropic patches carrying an elastically mounted mass". *International Journal of Solids and Structures* 43, 4116-4135. 2006.

Febbo, M., Bambill, D. V., Rossi, R. E., "Transverse vibrations of rectangular plates with elastically attached masses at an arbitrary position". Sometido a publicación, 2009.

Leissa, A. W., *Vibration of Plates*, Acoustical Society of America, Ohio, 1993.

Meirovitch, L., *Methods of Analytical Dynamics*, Dover Publications, Mineola, N. Y., 1998.

Rossit, C.A., Laura, P.A.A.. "Transverse, normal modes of vibration of a cantilever Timoshenko beam with a mass elastically mounted at the free end". *Journal of the Acoustical Society of America* 100, 2837-2840, 2001

Vera, S.A., Febbo, M., Mendez, C.G., Paz, R., "Vibrations of plate with an attached two degree of freedom system". *Journal of Sound and Vibration* 285, 457- 466. 2005.