

RESOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES
PARA FLUJO CUASI-BIDIMENSIONAL A
SUPERFICIE LIBRE

Angel N. MENENDEZ
Rubén FUNAI

Departamento de Estudios y Modelos Hidrodinámicos
Laboratorio de Hidráulica Aplicada
INCYTH
Ezeiza, Pcia. Buenos Aires, Argentina

RESUMEN

Se presenta un método numérico eficiente y estable para calcular flujos cuasi-bidimensionales a superficie libre. Se trata de un esquema fuertemente implícito de direcciones alternadas.

El método numérico es preciso cuando se tratan ondas relativamente largas con respecto al paso de discretización espacial. Su aplicación a la simulación del escurrimiento del Río Paraná en la zona de Corpus resultó satisfactoria, y proveyó resultados prácticos de interés.

ABSTRACT

An efficient and stable ADI numerical method, for the calculation of nearly two-dimensional flows with a free surface, is presented.

It provides a high accuracy when treating waves with long wave - lengths relative to the spatial discretization step. Its performance in the numerical simulation of the flow in Paraná River, close to the site where Corpus Dam will be built, was satisfactory, and provided interesting practical results.

INTRODUCCION

El Laboratorio de Hidráulica Aplicada del INCYTH ha encarado el estudio hidráulico de la zona de emplazamiento de la presa de Corpus sobre el Río Paraná, mediante un modelo en escala reducida ("modelo físico"). Para analizar la posibilidad de simplificar la implementación de las condiciones de contorno aguas arriba (es decir, en la zona de entrada del agua), se decidió llevar a cabo un estudio de sensibilidad mediante un modelo matemático. En este modelo, el escurrimiento es considerado como un flujo cuasi-bidimensional a superficie libre. Está, entonces, descrito por las Ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones espaciales, con la inclusión de términos de difusión turbulenta.

Un modelo de este tipo fue utilizado por Vreugdenhil y Wijnbenga [1] discretizando las ecuaciones diferenciales de acuerdo al conocido esquema en diferencias finitas de Leendertse [2]. Este esquema es un método semi-implícito de direcciones alternadas. Sin embargo, no permite la utilización de pasos de tiempo demasiado grandes por razones de estabilidad numérica. Esto se torna en un factor limitativo en el cálculo de escurrimientos permanentes (como el presente), en los cuales la marcha en el tiempo no es más que una técnica de relajación y, en consecuencia, el paso temporal es conveniente elegirlo lo más grande posible.

Se desarrolló, entonces, un nuevo esquema. Este es un método fuertemente implícito de direcciones alternadas, en el cual los términos convectivos están localmente linealizados y usan diferencias descentradas ("upwinding"), y los términos de las presiones y la difusión turbulenta están centrados. Las matrices de coeficientes de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales resultantes son del tipo tridiagonal o tridiagonal en bloques, que se resuelven eficientemente por el método de doble barrido. El método numérico es incondicionalmente estable desde el punto de vista lineal, contrariamente al de Leendertse. No obstante, pueden producirse inestabilidades no lineales.

Se presentan corridas de prueba y ensayos numéricos del modelo matemático, y resultados de su aplicación al problema de Corpus.

Es de destacar que este estudio está incluido en los trabajos contratados entre la Comisión Mixta Argentino Paraguaya del Río Paraná (COMIP) y la Asociación constituida por la Administración Nacional de Navegación y Puertos del Paraguay y el INCYTH.

MODELO TEORICO Y ECUACIONES DE GOBIERNO

Las hipótesis fundamentales que definen el modelo teórico son:

- a) El flujo es cuasi-bidimensional; es decir, es esencialmente bidireccional y la velocidad es prácticamente uniforme en la dirección normal a la superficie del escurrimiento.
- b) La componente de la aceleración normal al escurrimiento es despreciable (frente a la aceleración de la gravedad). Alternativamente, esta hipótesis puede expresarse como que la curvatura y divergencia de las líneas de corriente en planos normales a la superficie del escurrimiento son pequeñas. Como consecuencia, la distribución de presiones es hidrostática.

Puede demostrarse que estas hipótesis resultan condiciones necesarias si se supone que la escala de longitudes a lo largo de la superficie del escurrimiento (típicamente, una longitud de onda) es mucho mayor que la profundidad. Es por eso que se habla de ondas en aguas poco profundas.

Las ecuaciones para flujo cuasi-bidimensional a superficie libre se obtienen por integración de las Ecuaciones de Reynolds sobre la profundidad local, y utilizando las hipótesis del modelo teórico. Se llega así a las siguientes expresiones [3]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial x}(h+z_0) + gn^2 \frac{u(u^2+v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} = \nu_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial y}(h+z_0) + gn^2 \frac{v(u^2+v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} = \nu_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

donde t = tiempo; x e y = coordenadas espaciales; h = profundidad; u y v = componentes de la velocidad en las direcciones x e y , respectivamente; z_0 = cota de fondo; g = aceleración de la gravedad; n = coeficiente de Manning (mide la "rugosidad" del cauce); ν_t = viscosidad de aceleración de Coriolis, del viento y de las tensiones viscosas y convectivas. Estas últimas son las tensiones efectivas resultantes de la no uniformidad de la velocidad sobre la vertical, que pueden resultar significativas cuando la curvatura de las líneas de corriente es apreciable. Las tensiones turbulentas se han expresado de acuerdo a un modelo de viscosidad de torbellino, supuesta ésta constante y uniforme.

Para resolver las Ecs. (1)-(3) es necesario especificar las distribuciones iniciales de h , u y v y apropiadas condiciones de contorno. En el caso en que las tensiones turbulentas pueden despreciarse, el sistema de ecuaciones es hiperbólico. La aplicación del método de las características muestra que, en el caso de régimen subcrítico, debe especificarse el siguiente número de condiciones de contorno, de acuerdo al tipo [4]:

- a) Contorno entrante: 2 (generalmente u y v)

b) Contorno rígido: 1 (velocidad normal nula)

c) Contorno saliente: 1 (generalmente, h)

Si las tensiones turbulentas son significativas, el sistema se vuelve elíptico. En este caso, es necesario especificar ambas componentes de la velocidad sobre todos los contornos.

METODO NUMERICO

La variedad de tratamientos desarrollados para resolver numéricamente las ecuaciones para flujos cuasi-bidimensionales a superficie libre, pone de manifiesto el hecho de que diferentes esquemas numéricos pueden resultar adecuados para diferentes problemas físicos. En problemas fluviales, como el presente, los mecanismos que dominan el escurrimiento son la "fricción" contra el fondo y el peso efectivo, resultando pequeña la contribución de la inercia, especialmente a bajos números de Froude. En consecuencia, no parece crítica la discretización de los términos convectivos, con tal que no produzcan inestabilidades. En este sentido, el esquema semi-implícito de Leendertse no resulta adecuado, ya que presenta inestabilidades lineales que limitan el paso temporal de discretización. Esto es especialmente inconveniente para cálculos de escurrimientos en régimen permanente, donde la evolución temporal sólo encubre un proceso de relajación.

La malla de discretización adoptada se muestra en la Fig. 1. Nótese que se trata de una malla alternada (las variables están centradas en puntos distintos); esto resulta conveniente para aplicar las condiciones de contorno. Las Ecs. (1)-(3) han sido discretizadas de acuerdo a un esquema fuertemente implícito de direcciones alternadas. Para el cálculo en la dirección x se tiene que

$$h_{ij}^{n+1/2} - h_{ij}^{nv} + [u \frac{\partial h}{\partial x}]_{ij}^{n+1/2} + [v \frac{\partial h}{\partial y}]_{ij}^n + h_{ij}^n \left(\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{v_{j+1/2}^n - v_{j-1/2}^n}{\Delta y} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i+1/2}^{nv}}{(\Delta t/2)} + [u \frac{\partial u}{\partial x}]_{i+1/2}^{n+1/2} + [v \frac{\partial u}{\partial y}]_{i+1/2}^n + \\ & + g \frac{h_{i+1/2}^{n+1/2} + (z_c)_{i+1/2} - h_{i+1/2}^{nv} - (z_c)_{i+1/2}}{\Delta x} + g n^2 u_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{(u_{i+1/2}^n + v_{i+1/2}^n)^{1/2}}{(h_{i+1/2}^n)^{4/3}} = \\ & = \tau_c \left(\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - 2u_{i+1/2}^{n+1/2} + u_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1/2}^n - 2u_{i+1/2}^n + u_{j+1/2}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_{j+1/2}^{n+1/2} - v_{j+1/2}^n}{(\Delta t/2)} + [u \frac{\partial v}{\partial x}]_{j+1/2}^n + [v \frac{\partial v}{\partial y}]_{j+1/2}^{n+1/2} + \\ & + g \frac{h_{j+1/2}^n + (z_c)_{j+1/2} - h_{j+1/2}^{n+1/2} - (z_c)_{j+1/2}}{\Delta y} + g n^2 v_{j+1/2}^{n+1/2} \frac{(u_{j+1/2}^n + v_{j+1/2}^n)^{1/2}}{(h_{j+1/2}^n)^{4/3}} = \\ & = \tau_c \left(\frac{v_{j+1/2}^{n+1/2} - 2v_{j+1/2}^{n+1/2} + v_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{v_{j+1/2}^n - 2v_{j+1/2}^n + v_{j-1/2}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Los términos convectivos (entre corchetes) se representan por medio de diferencias descentradas; por ejemplo,

$$[u \frac{\partial h}{\partial x}]_j^{n+1/2} = u_{i-1/2}^n \left(\frac{h_{ij}^{n+1/2} - h_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \quad (7)$$

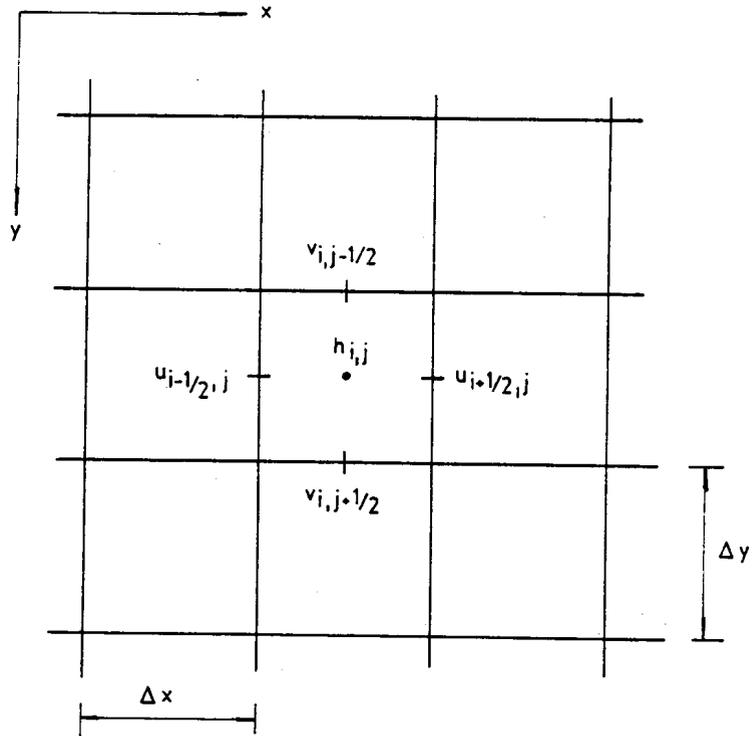


Figura 1. Malla de discretización.

si $u_{i+1/2}^n$ y $u_{i-1/2}^n$ son positivos, es decir, se utilizan diferencias en atraso ("upwinding"), que se cambian a diferencias en adelante si las velocidades son negativas. Nótese que, en todos los casos, los términos no lineales se linealizan localmente. Cuando las variables aparecen centradas en puntos donde no están definidas, se toma el promedio aritmético entre los valores más cercanos; por ejemplo,

$$\bar{u}_{i+1/2}^n = \frac{1}{4} (u_{ij+1/2}^n + u_{ij-1/2}^n + u_{i+1/2j}^n + u_{i-1/2j}^n) \quad (8)$$

Como es usual, el supraíndice indica el paso temporal de cálculo. Suponiendo conocidas las condiciones en el paso n (eventualmente dadas como condiciones iniciales), las variables en el paso $n + 1/2$ están relacionadas, de acuerdo a las Ecs. (4)-(6), por expresiones de la forma

$$a_{ij}^{11} k_{i-1/2}^{n+1/2} + a_{ij}^{12} u_{i-1/2j}^{n+1/2} + a_{ij}^{13} k_{ij}^{n+1/2} + a_{ij}^{14} u_{i+1/2j}^{n+1/2} + a_{ij}^{15} k_{i+1/2j}^{n+1/2} = b_{ij}^1 \quad (9)$$

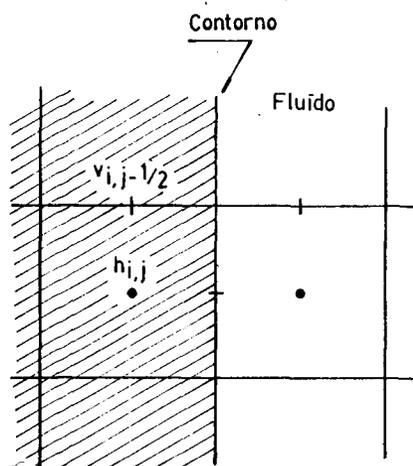
$$a_{ij}^{21} u_{i-1/2j}^{n+1/2} + a_{ij}^{22} k_{ij}^{n+1/2} + a_{ij}^{23} u_{i+1/2j}^{n+1/2} + a_{ij}^{24} k_{i+1/2j}^{n+1/2} + a_{ij}^{25} u_{i+3/2j}^{n+1/2} = b_{ij}^2 \quad (10)$$

$$a_{ij}^{31} u_{i-1/2j+1/2}^{-n+1/2} + a_{ij}^{32} u_{ij+1/2}^{-n+1/2} + a_{ij}^{33} u_{i+1/2j+1/2}^{-n+1/2} = b_{ij}^3 \quad (11)$$

donde los coeficientes a_{ij}^{kl} y b_{ij}^n son conocidos. Se observa que, habiendo tomado como implícitas a las derivadas en la dirección x , las variables aparecen acopladas en esa dirección. En consecuencia, el sistema de ecuaciones puede resolverse "fila por fila", incorporando, eventualmente, las condiciones de contorno. Nótese, además, que las Ecs. (9) y (10) están acopladas entre sí, pero desacopladas de la Ec. (11). Las primeras forman un sistema de ecuaciones algebraicas lineales del tipo tridiagonal en bloques, que puede ser resuelto eficientemente por el algoritmo de doble barrido. La Ec. (11) da lugar a un sistema tridiagonal, que se resuelve por el eficiente algoritmo tridiagonal.

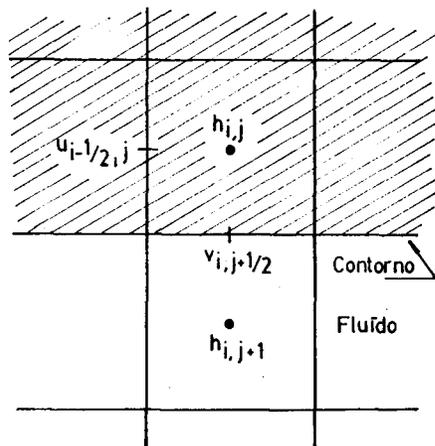
Las ecuaciones para el cálculo en la dirección y son formalmente análogas a las Ecs. (4)-(6), si se invierten los roles de u y v y de x e y , y si se avanza el paso temporal en otra media unidad ($n \rightarrow n+1/2$).

En el presente método los contornos se representan por líneas (eventualmente quebradas) que coinciden con la malla de discretización. En consecuencia, los contornos son localmente paralelos a los ejes x o y . La implementación rigurosa de las condiciones de contorno no es una tarea sencilla [4,5], especialmente cuando el método de cálculo es implícito. En el presente método se han implementado solamente condiciones de borde simplificadas. Ellas se ilustran en la Fig. 2. Las expresiones marcadas con un asterisco son restricciones relativamente "débiles" que suplantam a lo que, estrictamente, debería ser un cálculo; pueden denominarse, genéricamente, condiciones de contorno "naturales" y son de la forma $\partial/\partial n = 0$, donde n indica aquí la dirección normal al contorno.



$$\begin{aligned}
 u_{i+1/2,j} &= 0 \\
 h_{i,j} &= h_{i+1,j} \quad (x) \\
 v_{i,j-1/2} &= v_{i+1,j-1/2} \quad (x)
 \end{aligned}$$

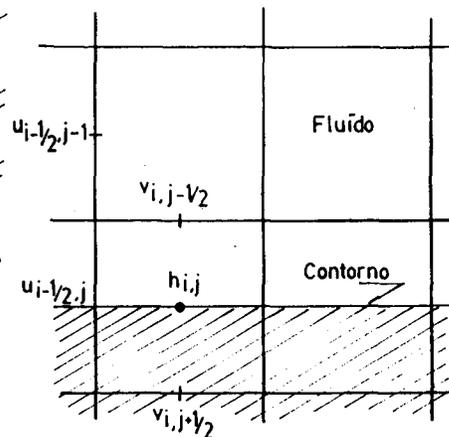
a) Contorno rígido



$$\begin{aligned}
 v_{i,j+1/2} \\
 u_{i-1/2,j}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} v_{i,j+1/2} \\ u_{i-1/2,j} \end{aligned}} \right\} \text{especificados}$$

$$h_{i,j} = h_{i,j+1} \quad (x)$$

b) Contorno entrante



$$\begin{aligned}
 h_{i,j} &\text{ especificado} \\
 v_{i,j+1/2} &= v_{i,j-1/2} \quad (x) \\
 u_{i-1/2,j-1} &= u_{i-1/2,j} \quad (x)
 \end{aligned}$$

c) Contorno saliente

(x) Condiciones de contorno naturales.

Figura 2. Implementación de condiciones de contorno.

ANÁLISIS DEL METODO NUMÉRICO

Para analizar las características del método numérico es común partir de un sistema de ecuaciones simplificado que permita tal análisis. En el presente estudio, se simplificaron las Ecs. (1)-(3), anulando las contribuciones de la fricción y la turbulencia ($\eta=0, v_t = 0$) y linealizándolas. Esto último implica admitir un flujo de base uniforme, caracterizado por los valores h_0, u_0 y v_0 , sobre el que se propaga una pequeña perturbación h_1, u_1 y v_1 tal que $|h_1| \ll h_0, |u_1| \ll |u_0|, |v_1| \ll |v_0|$. En las ecuaciones resultantes puede introducirse una solución tipo onda plana, es decir

$$h_1, u_1, v_1 \sim e^{i(k_1 x + k_2 y + \beta t)} \quad (12)$$

donde k_1 y k_2 son las componentes del vector número de ondas en las direcciones x e y , respectivamente, y $\beta = -w + iA$, siendo w la frecuencia angular de oscilación y A un coeficiente de atenuación. Se obtienen así tres soluciones, a saber, una onda "de avance", otra "de retroceso" y una tercera "estacionaria" (respecto del flujo de base). El estudio de la estructura de estas ondas se presenta en la Ref. [6].

Si ahora se utiliza el presente esquema numérico para discretizar las ecuaciones simplificadas, y se introduce en las ecuaciones en diferencias soluciones del tipo de la Ec. (12), pero admitiendo un valor distinto de β (denominado $\tilde{\beta}$), se obtienen las tres soluciones numéricas que corresponden a las anteriores tres soluciones analíticas.

Leendertse [2] introdujo el concepto de factor de propagación T , definido como el cociente entre cada onda numérica y su correspondiente onda analítica luego de haberse propagado durante un período, es decir,

$$T \equiv \left[\frac{e^{i(k_1 x + k_2 y + \beta t)}}{e^{i(k_1 x + k_2 y + \tilde{\beta} t)}} \right]_{t = 2\pi / |w|} \quad (13)$$

El módulo de T mide la atenuación relativa de la onda numérica respecto de la analítica (es decir, la atenuación numérica), mientras que el argumento de T mide el retraso de la primera respecto de la segunda (es decir, la dispersión numérica). Son varios los parámetros de los cuales depende T , a saber: el número de Froude $F_0 = \{(u_0^2 + v_0^2)/gh_0\}^{1/2}$ y el ángulo $I' = \arctg(\sqrt{v_0/u_0})$, que caracterizan el flujo de base; el ángulo $\gamma = \arctg(k_2/k_1)$ y el número de puntos computacionales por longitud de onda $N = 2\pi / (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} \Delta x$, que caracterizan a la oscilación; y el cociente $r = \Delta y / \Delta x$ y el número de Courant $CH = \Delta t (gh_0)^{1/2} / \Delta x$, que caracterizan a la malla computacional. Manteniendo fijos F_0 ($= 0,1$) y r ($= 1$), se han realizado gráficos del módulo y el argumento de T en función de N , con CH como parámetro y para distintos pares de valores (I', γ). Es fácil demostrar que $\arg(T)$ está relacionado al cociente entre las velocidades de fase de las ondas numérica y física, tal cual se muestra en las figuras. También es interesante apuntar que, dado que las ondas analíticas son neutras, $|T|$ también provee indicaciones sobre la estabilidad del esquema.

La figura N° 3 muestra los resultados para la onda de avance cuando las direcciones de propagación de la onda y el flujo coinciden entre sí

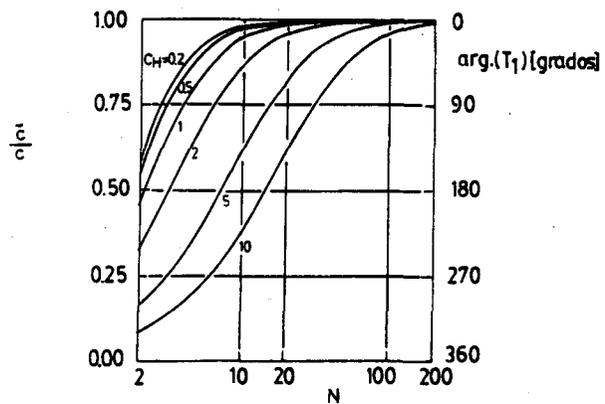
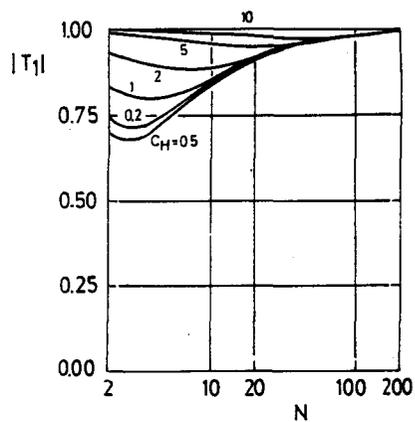


Figura 3. Factor de propagación para la onda de avance. $F_0 = 0,1$; $r = 1$; $\Gamma = \varphi = 0$.

y con uno de los ejes coordenados. Se observa que el esquema introduce atenuación numérica (es "disipativo"), aunque ésta tiende a desaparecer cuando el paso temporal crece ($C_H \rightarrow \infty$). La dispersión numérica, por su parte, se manifiesta como un retraso de la onda numérica respecto de la analítica, tanto mayor cuanto mayor es C_H . Como era de esperarse, la atenuación y la dispersión numéricas desaparecen, cualquiera sea el valor de C_H , para $N \rightarrow \infty$. Cuando la onda de avance es normal a la dirección del flujo (en este caso, su calificación como onda "de avance" solo se justifica como una extensión del caso anterior), pero coincidente con u no de los ejes coordenados, el esquema se comporta como neutro (no introduce atenuación) para cualquier valor de C_H , pero conserva prácticamente sin cambios sus características dispersivas.

Resultados totalmente similares se obtienen para la onda de retroceso. En el caso de la onda estacionaria (de poca importancia práctica, ya que no involucra oscilaciones de la altura), el método se comporta como fuertemente disipativo para el caso de propagación paralela (Fig. 4), y neutro para propagación normal. En ambos casos es relativamente poco dispersivo, salvo para las longitudes de onda más cortas ($N \approx 2$), y sus características son prácticamente independientes de C_H .

Un estudio similar se realizó para el esquema de Leendertse. La Fig. 5 presenta los resultados para la onda de avance cuando la propagación es paralela.

Se observa que el método produce una amplificación de la oscilación. Esto muestra, también, que el esquema es inestable frente a este tipo de oscilaciones para el sistema simplificado; solo la inclusión de efectos resistivos (fricción, difusión turbulenta) lo pueden tornar (condicionalmente) estable, a diferencia del presente método, que es incondicionalmente estable.

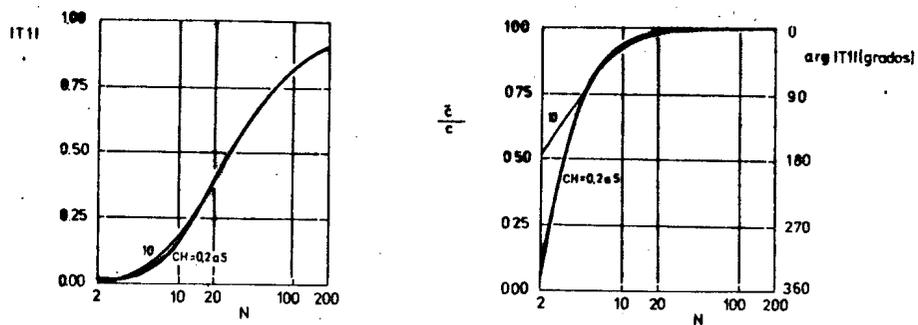


Figura 4. Factor de propagación para la onda estacionaria. $F_0 = 0,1$; $r = 1$; $\Gamma = \delta = 0$.

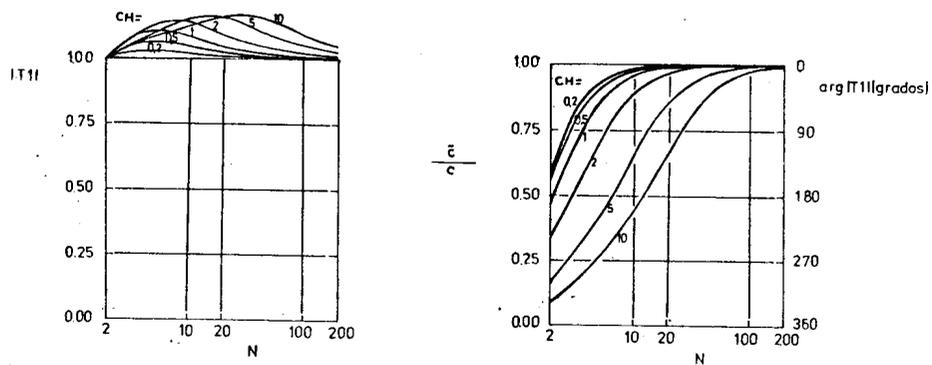


Figura 5. Factor de propagación para el esquema de Leendertse. Onda de avance. $F_0=0,1$; $r=1$; $\Gamma=\delta=0$.

PRUEBAS

Para verificar el método numérico se llevaron a cabo algunas pruebas para el caso de flujos permanentes (o estacionarios). Una de las pruebas consistió en comparar los resultados para un canal horizontal, de sección rectangular y uniforme y fondo rugoso, con la solución numérica obtenida por medio de un cálculo unidimensional, obteniéndose resultados satisfactorios, tal cual se muestra en la Fig. 6 para la altura. La leve desviación que se observa hacia aguas arriba se debe a que, tal cual se explicó, la condición de borde no es estrictamente válida. Esta prueba se repitió, pero alineando el canal a 45° respecto de la grilla de cálculo. En este caso, los resultados numéricos también resultaron satisfactorios en la zona central del canal; sin embargo, los lados del canal, representados por una línea quebrada, producen, efectivamente, una condición de no deslizamiento [7] que induce la formación de una "capa de pared" con fuertes gradientes transversales de la velocidad.

A título de ensayo numérico se trató el problema del flujo a través de una brecha situada en un canal sin rozamiento. La Fig. 7 muestra las líneas de corriente. Se observa que el chorro que parte de la brecha se difunde débilmente por efectos numéricos (ya que $V_t = 0$) creando, incluso, una recirculación a ambos lados. Las curvas de nivel de las alturas se presentan en la Fig. 8. Nótese el rápido decaimiento de la altura en la zona de la brecha, que varía en, aproximadamente, 3,3 m. Esta diferencia es mucho mayor que los 1,3 m que surgen de aplicar el teorema Bernouilli (conservación de la energía mecánica), pero también excede los 2 m calculados por la fórmula de Isbach [8], que tiene en cuenta las pérdidas energéticas. La pérdida adicional de energía mecánica que aparece en el presente cálculo se debe a la difusión numérica, que se torna particularmente alta en la zona de la brecha al ser la viscosidad numérica proporcional a la velocidad. Esto queda corroborado al observar la Fig. 9, que muestra las curvas de nivel del módulo de la velocidad.

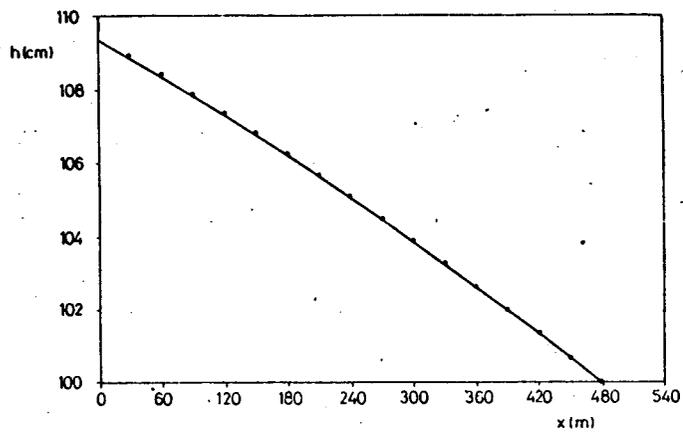


Figura 6. Alturas en un canal rugoso. *, cálculo unidimensional; —, cálculo presente. $\Delta x = \Delta y = 30$ m; $n = 0,05$; caudal por unidad de ancho = $13,5 \text{ m}^3/\text{s}$.

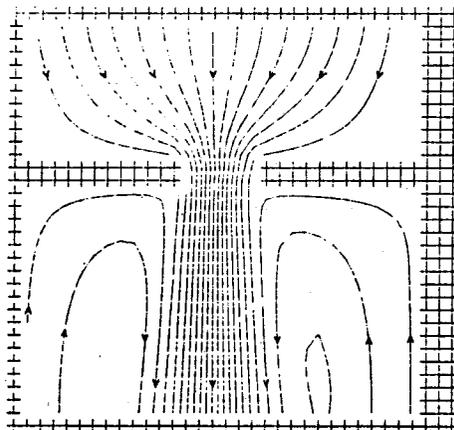


Figura 7. Líneas de corriente para el problema de la brecha. $\Delta x = \Delta y = 90$ m; caudal = $39.000 \text{ m}^3/\text{s}$; altura aguas abajo = 12m.

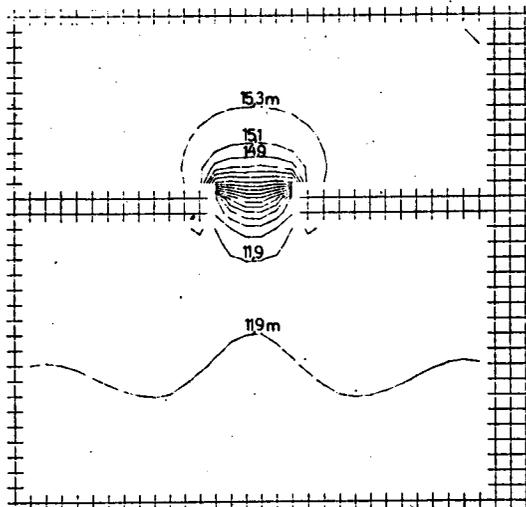


Figura 8. Curvas de nivel de las alturas para el problema de la brecha.

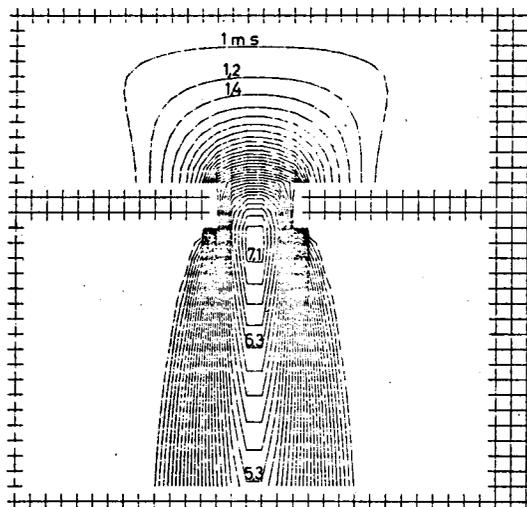


Figura 9. Curvas de nivel del módulo de la velocidad para el problema de la brecha.

APLICACION

Tal cual se explicó anteriormente, el objetivo del desarrollo del presente método numérico fue el de la simulación numérica del escurrimiento en la zona del Río Paraná donde se emplazará la presa de Corpus. La Figura 10 muestra una comparación entre las líneas de transporte (igual de carga acumulada) calculadas y las trayectorias de flotadores medidas en el prototipo, observándose un acuerdo satisfactorio excepto en la zona de aguas abajo. Este se debe, seguramente, a que la condición de borde para el modelo matemático (altura constante) no es del todo realista. La comparación entre los módulos de las velocidades medidas y calculadas se muestra en la Fig. 11, que es la distribución en la sección del futuro eje de presa. Nuevamente, el acuerdo se considera satisfactorio desde el punto de vista ingenieril. El perfil calculado presenta un pico menos pronunciado y una variación más suave. Esto se debe a la forma como se modeló la difusión turbulenta, por medio de una viscosidad de torbellino constante y uniforme. Es sabido que una aproximación más precisa requiere el uso de modelos de turbulencia más sofisticados [9]. Más aún, la existencia de un extendido y profundo pozo en la zona de cálculo no solo puede provocar la generación de turbulencia de gran escala, sino también la aparición de corrientes secundarias cuya modelación es aún tarea de investigación.

La aplicación de un perfil de velocidades uniforme aguas arriba (la condición más fácilmente implementable en el modelo físico) genera diferencias en el flujo, que solo se extienden sobre una corta zona. La Fig. 12 muestra estas diferencias para la cota del pelo de agua (altura).

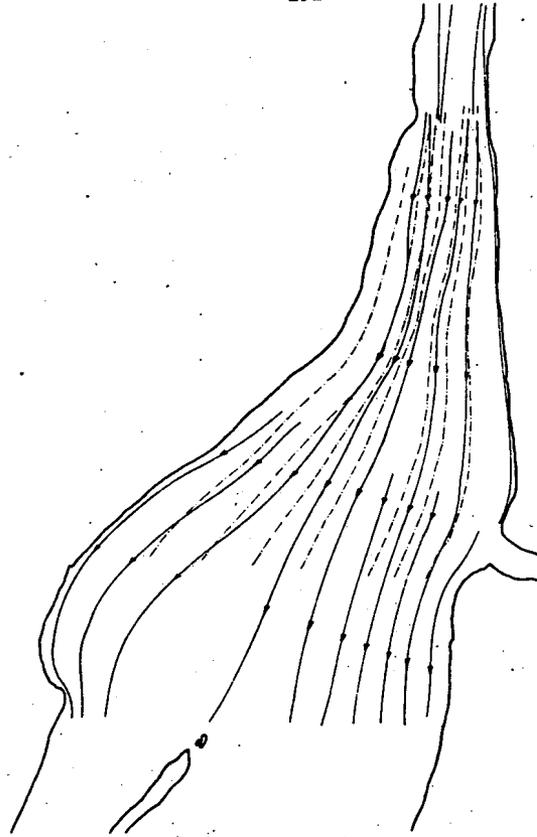


Figura 10. Líneas de corriente medidas (—) y calculadas (---) en la zona de Corrus

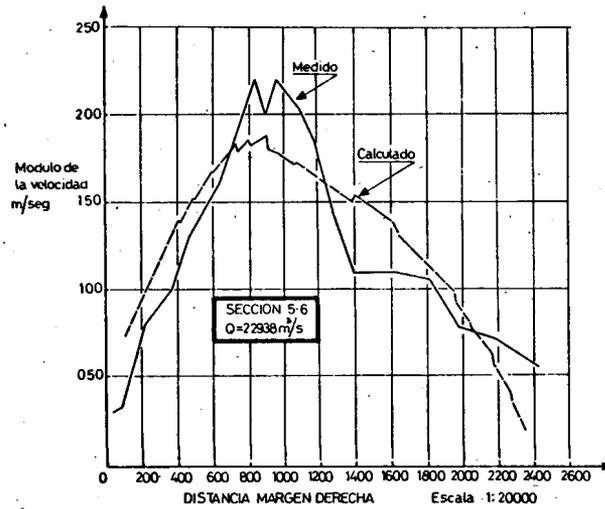
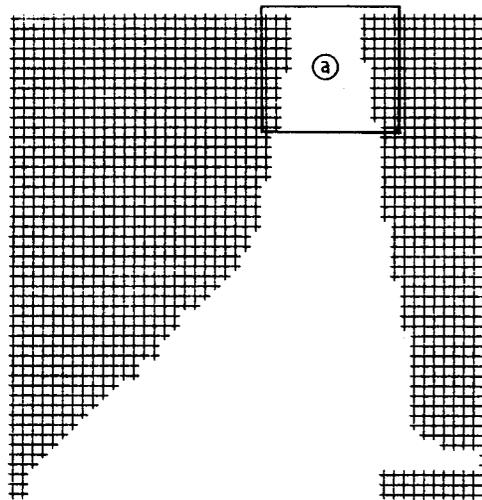


Figura 11. Distribución de velocidades en la sección del eje de la presa.



DETALLE (a)

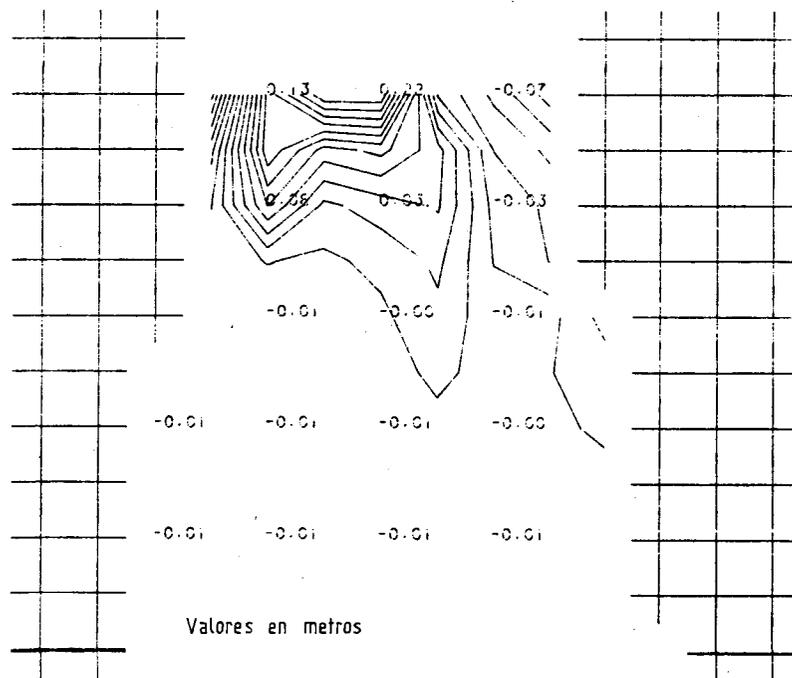


Figura 12. Diferencia entre alturas calculadas con distintas condiciones de borde.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un método numérico eficiente y estable (desde el punto de vista lineal) para calcular flujos cuasi-bidimensionales a superficie libre. El esquema es disipativo con respecto a las longitudes de onda más cortas cuando el número de Courant es pequeño, tornándose neutro para números de Courant grandes. Esto último puede provocar la aparición de inestabilidades no lineales.

El método numérico es preciso cuando se tratan ondas relativamente largas, (con respecto al paso de discretización espacial) pero presenta limitaciones para representar ondas más cortas, tales como transiciones abruptas.

La simulación numérica del escurrimiento en la zona de Corpus resultó satisfactoria, proveyendo, entonces, resultados prácticos de interés.

REFERENCIAS

- [1]. Vreugdenhil, C.B., Wijbenga, J.H.A., "Computation of Flow Patterns in Rivers", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 108, November, 1982.
- [2]. Leendertse, J.J., "Aspects of a Computational Model for Long-Period Water-Wave Propagation", Memorandum RM-5294-PR, Rand Corporation, Santa Mónica, California, U.S.A., 1967.
- [3]. Flokstra, C., "The Closure Problem for Depth-Averaged Two-Dimensional Flow", XVII Congress of the International Association for Hydraulic Research, Baden-Baden, W. Germany, August 15-19, 1977.
- [4]. Daubert, A., Graffe, M.O., "Quelques Aspects des Ecoulements Presque Horizontaux a Deux Dimensions en Plan et Non Permanents Application aux Estuaires", La Houille Blanche, Vol. 8, 1967.
- [5]. Menéndez, A.N., "Simulación Numérica Uni y Bidimensional de la Onda de Rotura de Presas", Informe L.H.A. 17-005-80, Ezeiza, Agosto de 1980.
- [6]. Menéndez, A.N., Funai R., Norscini, R., "Simulación Numérica de Flujos Cuasi-Bidimensionales a Superficie Libre", Informe L.H.A., Ezeiza, en preparación.
- [7]. Weare, T.J., "Errors Arising from Irregular Boundaries in ADI Solutions of the Shallow-Water Equations", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 14, 1979, Págs. 921-931.
- [8]. Isbach, S.V., Lebedev, I.V., "Change of Natural Streams During Construction of Hydraulic Structures", IX Convención de la IAHR, 1961.
- [9]. Rodi, W., "Turbulence Models and Their Application in Hydraulics", IAHR State-of-the-Art Paper, W. Germany, June, 1980.