

CÁLCULO AUTOMÁTICO DE VIGAS CONTÍNUAS E GRELHAS
CONSTITUÍDAS POR BARRAS CURVAS

Mauro A. Demarzo

Ronaldo G. de Figueiredo

Departamento de Construção Civil

Faculdade de Engenharia de Limeira

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Limeira - São Paulo - Brasil

RESUMO

No presente trabalho é estudado o comportamento de uma barra de eixo curvo circular submetida a um carregamento perpendicular ao seu plano. Através de equações da estática chega-se a um formulário adequado à automação do cálculo de deslocamentos e esforços em estruturas contínuas ou reticuladas dotadas de barras retas e curvas.

Apresenta-se um exemplo para cálculo de uma viga contínua com segmentos curvos, e, outro, de uma grelha com simetria polar.

ABSTRACT

In this paper is studied the behavior of a beam with circular curved axis when subjected to loading perpendicular to its plane. By means of the equations of the statics of structures it is obtained an appropriate formulary for the calculation of displacements and actions in continuous or framed structures with straight and curved bars.

An example is presented for analysis of a continuous beam, and another one, for analysis of a gridworks with polar symmetry.

INTRODUÇÃO

Para a análise do problema em foco tem sido formuladas diversas hipóteses e métodos de cálculos, como podemos constatar na bibliografia apresentada ao final. O presente trabalho, adotando as hipóteses iniciais de VELUTINI [1], e tendo em vista a automação, encaminhou o problema via matricial.

Com o objetivo de conseguir fórmulas mais compactas e menos complexas, coloca-se um sistema intermediário de coordenadas em um particular ponto (centro elástico) o qual leva à diagonalização da matriz de flexibilidade da barra, e, em seguida, com simples inversão dos elementos da diagonal principal, fácil obtenção da matriz de rigidez para o sistema neste ponto.

Posteriormente, é obtida a matriz de rigidez e esforços de engastamento perfeito para deslocamentos situados num triedro com eixos tangentes e radiais nas extremidades das barras. Com a adoção dos deslocamentos nestas direções, estruturas com simetria polar podem ser analisadas usando o sistema global com coordenadas polares.

A obtenção de um formulário mais simples, devido ao procedimento adotado, facilitou a programação, além de ter dado mais confiabilidade e facilidade na verificação do conteúdo físico das expressões, que, de outra maneira, seriam quase impossíveis devido a alta complexidade das expressões trigonométricas que surgiriam.

O presente trabalho tem, portanto, a finalidade de fornecer um procedimento de análise de estruturas que tenham barras de eixo curvo contidas em plano perpendicular às cargas, e tendo, em cada tramo, seção transversal e raio de curvatura constantes. Embora as limitações geométricas impostas ao problema possam restringir sua aplicação, nos casos em que é aplicável oferece a vantagem de um cálculo relativamente simples, principalmente se se dispôr de computador digital.

DIAGONALIZAÇÃO DA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

Considerações iniciais

Na Fig. 1 ilustra-se uma barra circular cujas extremidades estão presas a duas barras infinitamente rígidas, de mesmo comprimento.

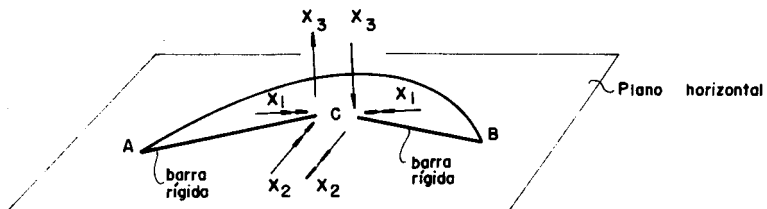


Fig. 1 - Ações aplicadas no centro elástico

Os esforços no centro elástico (ponto C, Fig. 1) estão relacionados estaticamente com os esforços nas extremidades A e B da barra curva. A matriz de flexibilidade correspondente aos deslocamentos relati-

vos F_{ij} para o sistema de coordenadas no centro elástico fica diagonalizada, obtendo-se, assim, facilmente, a matriz de rigidez $[S]$.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_{33}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

De VELUTINI [1] foram tiradas as hipóteses:

- a) A lei de Hooke é válida.
- b) O princípio da superposição é válido.
- c) As deformações devido às cortantes verticais são desprezíveis.
- d) O ângulo de flexão por unidade de comprimento da viga varia com $M/(EJ)$ onde M é o momento em torno do eixo radial, e EJ é a rigidez à flexão.
- e) O ângulo de torção por unidade de comprimento da viga varia com $T/(GJ_T)$, onde T é o momento torçor, e GJ_T é a rigidez de torção.

A partir da hipótese de validade do princípio da superposição pode-se estudar o problema com os três estados de carregamento unitários, distintos, mostrados na Fig. 2.

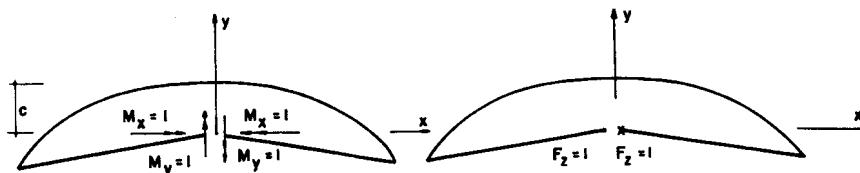


Fig. 2 - Carregamentos 1(M_x), 2(M_y) e 3(F_z)

Nestas figuras, a distância c corresponde à posição das extremidades livres das barras rígidas, cujo valor interessante é aquele que define o centro elástico da barra curva, para os 3 carregamentos unitários descritos.

No passo seguinte obtêm-se os diagramas de momento fletor e momento torçor com os quais determina-se os deslocamentos relativos e deduz-se o particular valor de c que provoca a diagonalização da matriz de flexibilidade, e que, portanto, posiciona o centro elástico.

Centro Elástico (C.E.)

Os deslocamentos relativos F_{ij} na extremidade livre das barras rígidas, que são os coeficientes de flexibilidade na eq. (1), são calculados para os carregamentos unitários da Fig. 2, pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Por considerações de simetria e antimetria dos diagramas de momento fletor e torçor, desprezando as deformações devidas ao esforço constante, segundo a hipótese (c), e fazendo os índices 1, 2 e 3 representarem respectivamente os esforços M_x , M_y e F_z tem-se:

$$F_{12} = F_{21} = 0 \quad (2)$$

$$F_{13} = F_{31} = 0 \quad (3)$$

Para que a matriz [F] resulte diagonalizada é apenas necessário que se anulem os elementos $F_{13} = F_{31}$ já que os outros elementos fora da diagonal principal são nulos, como mostram as eqs. (2) e (3).

Impondo-se, então, $F_{13} = 0$ resultará uma equação que fornece o valor de c , cujo valor é a coordenada procurada do C.E.. Assim procedendo obtém-se:

$$c = \rho \left[1 - \frac{4 \lambda \frac{\text{sen } \frac{\phi}{2}}{\phi}}{(1 + \lambda) - (1 - \lambda) \frac{\text{sen } \phi}{\phi}} \right] = \rho \chi \quad (4)$$

onde: c = coordenada procurada do centro elástico.

ρ = raio da viga curva circular.

ϕ = ângulo de abertura da viga curva.

$\lambda = \frac{EJ}{GJ_T}$ = relação entre a rigidez à flexão e a rigidez de torção.

χ = coeficiente que multiplica o raio para obter-se c , dado pela expressão entre colchetes.

Considerando que a viga curva tem um comprimento $L = \rho \phi$ resulta

$$c = L \frac{\chi}{\phi} \quad (5)$$

que define a posição do centro elástico a partir da geometria e do material empregado.

Coefficientes de Flexibilidade e de Rigidez Correspondentes ao C.E.

A aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais para os pares de esforços M_x , M_y e F_z da Fig. 2, representados respectivamente pelos índices 1, 2 e 3, resulta em:

$$F_{11} = \frac{L}{GJ_T} \left[\frac{(1 + \lambda)}{2} - \frac{(1 - \lambda)}{2} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right] \quad (6)$$

$$F_{22} = \frac{L}{EJ} \left[\frac{(1 + \lambda)}{2} + \frac{(1 - \lambda)}{2} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right] \quad (7)$$

$$F_{33} = \frac{L^3}{12EJ} \left[\frac{12}{\phi^2} \left\{ \left[- (1 + \lambda) + (1 - \lambda) \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right] \frac{(1 - \chi)^2}{2} + \lambda \right\} \right] \quad (8)$$

Chamando de ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 os inversos dos fatores entre os colchetes

mais externos, resultam, segundo a equação (1), os coeficientes:

$$S_{11} = (GJ_T/L)\xi_1 \quad S_{22} = (EJ/L)\xi_2 \quad S_{33} = (12EJ/L^3)\xi_3 \quad (9)$$

que são os coeficientes de rigidez da matriz $[S]$ referente ao C.E.. Os fatores ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 tendem à unidade quando a viga tende a retificar-se, ou seja, quando ϕ tende a zero, resultando para S_{11} , S_{22} e S_{33} os conhecidos coeficientes de flexibilidade da viga reta.

MATRIZ DE RIGIDEZ CORRESPONDENTE AOS DESLOCAMENTOS NAS EXTREMIDADES

Chamemos de $\{\delta\}$ o vetor dos deslocamentos relativos entre os pontos extremos das barras rígidas no centro elástico e de $\{\Delta\}$ o vetor dos deslocamentos absolutos na extremidade da barra curva, ilustrado pela Fig. 3.

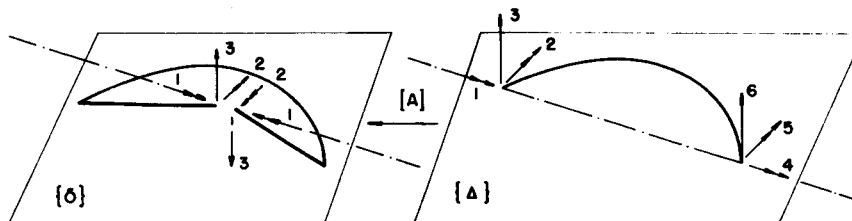


Fig. 3 - Transformação de deslocamentos $\{\Delta\}$ em deslocamentos generalizados $\{\delta\}$

Seja $[A]$ a matriz que transforma deslocamentos $\{\Delta\}$ em deslocamentos generalizados $\{\delta\}$. Esta matriz é obtida tendo-se em conta que o centro elástico está situado a distâncias a e b da extremidade das barras, como mostra a Fig. 4.

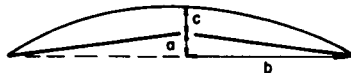


Fig. 4 - Posicionamento do C.E.

Pela geometria, e usando as eqs. (4) e (5), obtêm-se:

$$a = \rho(1 - \cos \frac{\phi}{2} - \chi) \quad (10)$$

$$b = \rho \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \quad (11)$$

A matriz $[A]$ será, então:

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ a & -b & 1 & -a & -b & -1 \end{array} \right] \quad (12)$$

A matriz de rigidez $[S]_{\Delta}$ relativa aos deslocamentos $\{\Delta\}$ nas extremidades da barra curva pode, portanto, ser calculada:

$$[S]_{\Delta} = [A]^t [S] [A] \quad (13)$$

onde $[A]^t$ é a matriz transposta de $[A]$ (eq. 14) e $[S]$ é dada pela eq. (1) onde se substituí os valores das equações (9).

Efetuando-se os produtos matriciais da eq. (15) tem-se:

$$[S]_{\Delta} = \begin{bmatrix} (S_{11} + a^2 S_{33}) & & & & & \\ - (a b S_{33}) & (S_{22} + b^2 S_{33}) & & & & \\ (a S_{33}) & - (b S_{33}) & (S_{33}) & & & \\ - (S_{11} + a^2 S_{33}) & (a b S_{33}) & - (a S_{33}) & (S_{11} + a^2 S_{33}) & & \\ - (a b S_{33}) & - (S_{22} - b^2 S_{33}) & - (b S_{33}) & (a b S_{33}) & (S_{22} + b^2 S_{33}) & \\ - (a S_{33}) & (b S_{33}) & - (S_{33}) & (a S_{33}) & (b S_{33}) & (S_{33}) \end{bmatrix} \quad \text{simétrico} \quad (14)$$

GRELHAS COM SIMETRIA POLAR

No caso de grelhas com simetria polar, convém adotar um sistema de coordenadas polares. Utiliza-se, então, uma matriz $[R]$ de rotação que transforma os deslocamentos da extremidade fim da barra, de um sistema global para um sistema local, como ilustrado pela Fig. 5.

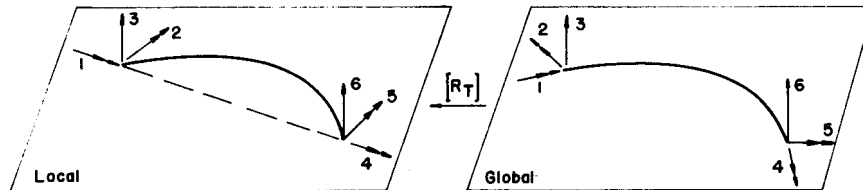


Fig. 5 - Transformação de deslocamento de um sistema global para um local

Chamando de $C_x = \cos \frac{\phi}{2}$ e $C_y = \sin \frac{\phi}{2}$ a matriz de rotação na extremidade fim da barra curva fica

$$[R] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

A matriz de transformação $[R_T]$ que efetua a transformação de todos os deslocamentos da barra do sistema global para o sistema local será:

$$[R_T] = \begin{bmatrix} [R]^t & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde $[R]^t$ é a transposta da matriz $[R]$.

Assim, a matriz de rigidez $[S_{MD}]$ para a barra, com as rotações consideradas nas direções radiais e tangenciais (direções globais) será:

$$[S_{MD}] = [R_T]^t [S]_{\Delta} [R_T] \quad (17)$$

onde $[R_T]^t$ é a transposta da matriz dada na eq. (16) e $[S]_{\Delta}$ é dada pela eq. (14).

Efetuando-se os produtos matriciais da eq. (17) chega-se finalmente à equação (18), mostrada à página seguinte, que é a matriz de rigidez da barra curva para um sistema de coordenadas polares global, onde, para simplificar, usou-se a notação:

$$n_1 = a C_x - b C_y \quad (19)$$

$$n_2 = b C_x - a C_y \quad (20)$$

e S_{11} , S_{22} e S_{33} são dados pelas equações (9).

ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO

Introdução

Mostra-se, agora, a obtenção dos esforços de engastamento perfeito para a viga curva circular carregada perpendicularmente ao seu plano.

Adota-se como estrutura básica isostática a viga curva engastada em uma extremidade, como mostra a Fig. 6. A partir daí calculam-se as 3 incógnitas hiperestáticas na extremidade livre.



Fig. 6 - Estrutura Básica Isostática

Os esforços na extremidade engastada são calculados através de 3 equações de equilíbrio. O procedimento adotado segue o mesmo cálculo apresentado por VREDEN [2], o qual usa o Processo dos Esforços e o Princípio dos Trabalhos Virtuais no cálculo dos deslocamentos. Também aqui, desprezam-se as deformações devidas ao esforço cortante.

$$[S_{MD}] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline C_x^2 S_{11} + C_y^2 S_{22} + n_1^2 S_{33} & & & & & \\ \hline -C_x C_y S_{11} + C_x C_y S_{22} - n_1 n_2 S_{33} & C_y^2 S_{11} + C_x^2 S_{22} + n_2^2 S_{33} & & & & \\ \hline n_1 S_{33} & -n_2 S_{33} & S_{33} & & & \\ \hline -C_x^2 S_{11} + C_y^2 S_{22} - n_1^2 S_{33} & C_x C_y S_{11} + C_x C_y S_{22} + n_1 n_2 S_{33} & -n_1 S_{33} & C_x^2 S_{11} + C_y^2 S_{22} + n_1^2 S_{33} & & \\ \hline -C_x C_y S_{11} - C_x C_y S_{22} - n_1 n_2 S_{33} & C_y^2 S_{11} - C_x^2 S_{22} + n_2^2 S_{33} & -n_2 S_{33} & C_x C_y S_{11} - C_x C_y S_{22} + n_1 n_2 S_{33} & C_y^2 S_{11} + C_x^2 S_{22} + n_2^2 S_{33} & \\ \hline -n_1 S_{33} & n_2 S_{33} & -S_{33} & n_1 S_{33} & n_2 S_{33} & S_{33} \\ \hline \end{array}$$

simétrico

Obtenção das Incógnitas Hiperestáticas

As incógnitas hiperestáticas são as correspondentes ao momento torçor (X_1), momento fletor (X_2) e força cortante (X_3). A compatibilidade do deslocamento nas direções de X_1 , X_2 e X_3 fornece um sistema de equações que, matricialmente, pode ser escrito:

$$\left\{ \Delta_r \right\} = \left\{ \begin{matrix} \Delta_{1r} \\ \Delta_{2r} \\ \Delta_{3r} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \left\{ \Delta_o \right\} + [F] \{X\} \quad (21)$$

Imaginando-se que não há recalque na direção das incógnitas, e portanto $\left\{ \Delta_r \right\} = 0$, obtêm-se:

$$\{X\} = -[F]^{-1} \left\{ \Delta_o \right\} \quad (22)$$

onde $[F]^{-1}$ corresponde aos deslocamentos nas direções 1, 2 e 3 para ações unitárias enquanto a extremidade direita permanece engastada, e os valores $\left\{ \Delta_o \right\}$ dependem do carregamento.

Verifica-se pela própria definição da matriz de rigidez que a matriz $[F]^{-1}$ é justamente a matriz de rigidez da viga curva engastada correspondente aos 3 deslocamentos na esquerda da viga. Ela coincide com a submatriz (3x3) da matriz $[S_{MD}]$ dada pela equação (18) que se situa no cruzamento das 3 primeiras linhas com as 3 primeiras colunas.

Quanto aos valores de $\left\{ \Delta_o \right\}$, que dependem do carregamento, seguiu-se a linha de VREDEN [2], o qual trabalha com quatro tipos de carregamentos: força uniformemente distribuída, força concentrada, momento torçor uniformemente distribuído, momento torçor concentrado. As expressões para $\left\{ \Delta_o \right\}$ deste trabalho são as mesmas daquele autor, e seguindo a mesma convenção de sinal ali adotada para os carregamentos.

Esforços de Engastamento na extremidade direita da viga bi-engastada

$$\left\{ \begin{matrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{matrix} \right\} = - \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & -\rho(1 - \cos \phi) \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & \rho \text{sen } \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} X_4^o \\ X_5^o \\ X_6^o \end{matrix} \right\} \quad (23)$$

No segundo membro da equação (23) a matriz quadrada (3x3) faz a transferência dos esforços X_1 , X_2 e X_3 da extremidade esquerda para a extremidade direita da viga curva.

Os valores de X_1 , X_2 e X_3 são dados pelo vetor $\{X\}$ da eq. (22).

Os valores X_4^o , X_5^o e X_6^o são os esforços que aparecem na estrutura isostática básica devido apenas aos carregamentos considerados. Eles valem:

força uniformemente distribuída:

$$X_4^o = -q\rho^2(\phi - \text{sen}\phi); X_5^o = q\rho^2(1 - \cos\phi); X_6^o = q\rho\phi \quad (24)$$

força concentrada:

$$X_4^0 = -P \rho (1 - \cos \theta); X_5^0 = P \rho \sin \theta; X_6^0 = P \quad (25)$$

momento torçor distribuído:

$$X_4^0 = -m \rho \sin \phi; X_5^0 = -m \rho (1 - \cos \phi); X_6^0 = 0 \quad (26)$$

momento torçor concentrado:

$$X_4^0 = -M \cos \theta; X_5^0 = -M \sin \theta; X_6^0 = 0 \quad (27)$$

onde ϕ é o ângulo de abertura da viga curva e θ , o ângulo que posiciona a carga concentrada medido a partir da extremidade direita da viga.

APLICAÇÃO

Com o procedimento estudado, conseguiu-se elaborar um programa automático para o cálculo de grelhas com simetria polar, podendo o mesmo ser usado, também, para o cálculo de vigas contínuas curvas. A estrutura básica do programa segue a literatura existente, tal como Gere & Weaver [3].

No programa é permitido que as barras da estrutura recebam mais do que um carregamento. Para isto, basta entrar com o número da barra e seu carregamento quantas vezes for necessário.

Pode-se também pedir para que sejam impressos os esforços solicitantes em várias seções especificadas para cada barra, além, logicamente, dos esforços solicitantes nas extremidades da mesma.

O programa foi testado com várias estruturas já resolvidas manualmente, existentes na bibliografia, como por exemplo o anel circular proposto por REDDY & TUMA [4].

A seguir são mostrados dois exemplos de estruturas analisadas com o programa.

Exemplo 1: Viga contínua curva

A estrutura e seu carregamento são mostrados na Fig. 7. Consta de uma viga curva de 5 tramos iguais, de raio $\rho = 64\text{m}$, ângulo de abertura $\phi = 12,5^\circ$, $J = 1,5\text{m}^4$, $J_t = 3,25\text{m}^4$, $E = 2.100.000\text{tf/m}^2$, $G = 780.000\text{tf/m}^2$.

Portanto neste exemplo $\lambda = EJ/GJ_t = 1,24$.

Os tramos estão orientados da esquerda para a direita.

Os apoios 2, 3, 4 e 5 não resistem a nenhum momento. A extremidade 1 é totalmente engastada, enquanto que a extremidade 6 é livre, de maneira que o tramo 4-6 está em balanço.

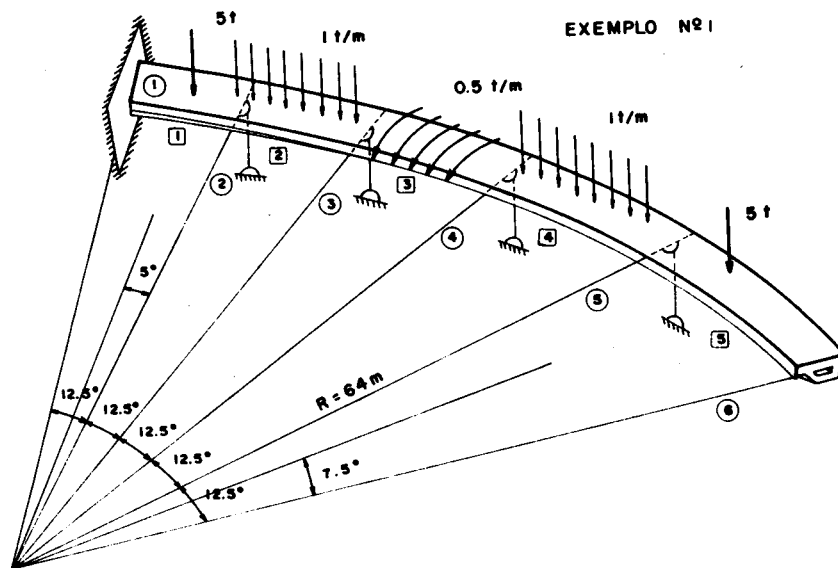


Fig. 7 - Viga contínua curva analisada

Os resultados listados pelo computador estão na TABELA I, abaixo.

TABELA I

DESLOCAMENTOS DOS NO'S			
NO'	DESL. 1	DESL. 2	DESL. 3
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	0.345E-04	0.679E-05	0.000E+00
3	0.710E-04	-0.132E-04	0.000E+00
4	0.924E-04	0.909E-05	0.000E+00
5	0.100E-03	0.138E-04	0.000E+00
6	0.909E-04	0.596E-04	-0.641E-03

REAÇÕES DE APOIO			
NO'	REAÇÃO 1	REAÇÃO 2	REAÇÃO 3
1	-6.204	-3.658	1.322
2	0.000	0.000	11.513
3	0.000	0.000	6.664
4	0.000	0.000	4.282
5	0.000	0.000	14.145
6	0.000	0.000	0.000

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS CURVAS						
BARRA	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	-6.20	-3.66	1.32	6.05	14.49	3.68
2	-6.05	-14.49	7.83	7.59	4.02	6.13
3	-7.59	-4.02	0.54	0.42	-2.62	-0.54
4	-0.42	2.62	4.82	1.22	27.89	9.14
5	-1.22	-27.89	5.00	0.00	0.00	0.00

Exemplo 2: Grelha com simetria polar

Este exemplo é de uma estrutura de tamanho mais avantajado. Adota-se $E = 2.100.000 \text{tf/m}^2$ e $G = 780.000 \text{tf/m}^2$ para todas as barras.

Nas barras curvas tem-se $J = 16,8 \text{m}^4$, $J_t = 0,4 \text{m}^4$, e nas retas, $J = 0,5 \text{m}^4$ e $J_t = 0,25 \text{m}^4$. Os anéis concêntricos tem raios respectivos de 2, 4, 7 e 10m.

As dimensões são mostradas na Fig. 8 e uma vista em perspectiva está na Fig. 9. As barras curvas são orientadas no sentido horário para um observador situado acima do plano da estrutura, enquanto as barras radiais são orientadas do centro para a periferia.

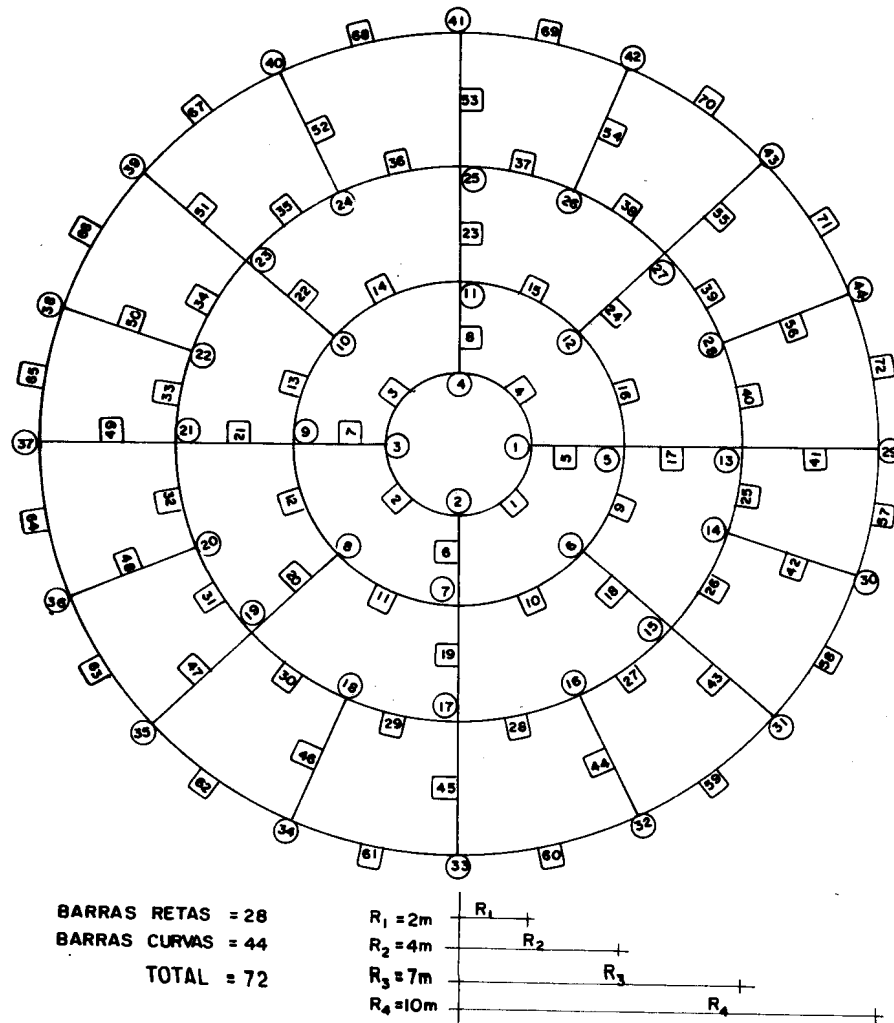


Fig. 8 - Numeração dos nós e barras, e dimensões da grelha analisada

O carregamento é constituído de cargas verticais concentradas e distribuídas, cujas posições e valores são mostrados na Fig. 9. A vinculação é feita através de apoios em todos os nós do anel externo, articulações estas que não resistem a momento nenhum, somente a forças verticais.

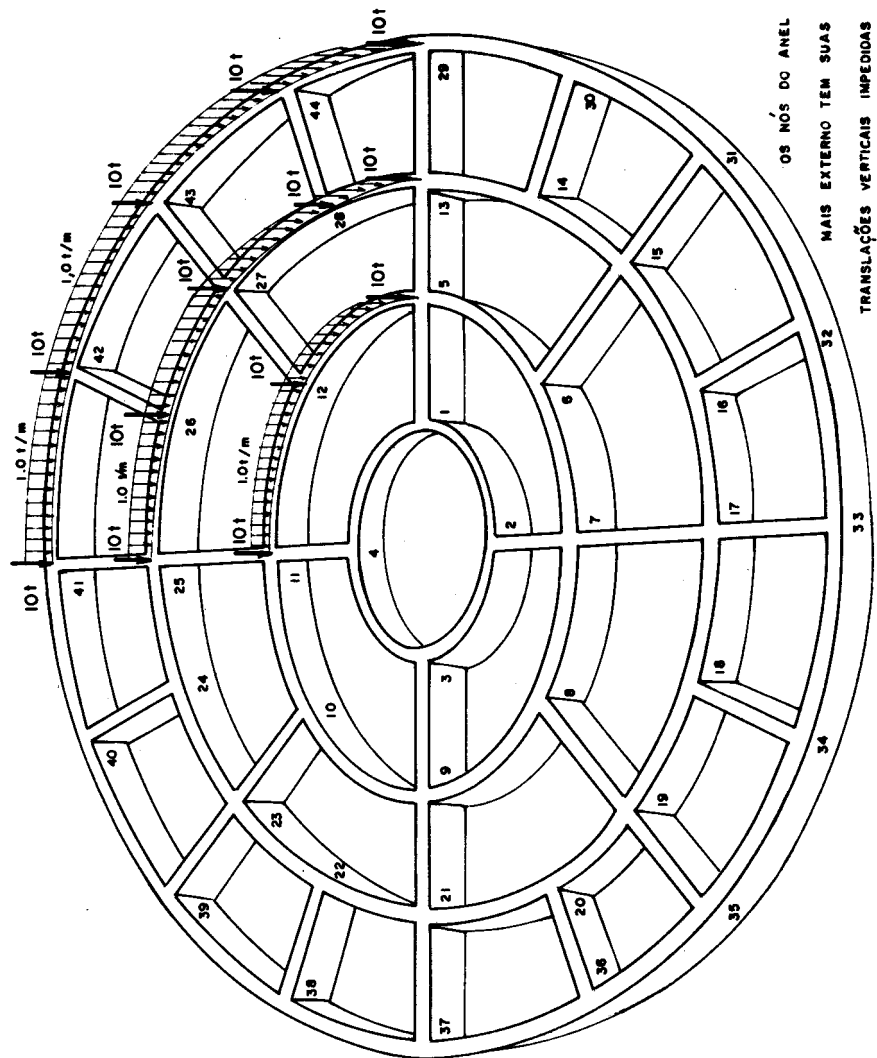


Fig. 9 - Perspectiva, numeração dos nós e carregamentos da grelha analisada

As reações de apoio e os esforços nas extremidades de barra, listados pelo computador, estão mostrados na TABELA II, abaixo e a seguir.

TABELA II

REACOES DE APOIO						
NO	REACAO 1	REACAO 2	REACAO 3	REACAO 4	REACAO 5	REACAO 6
29	0.000000E+00	0.000000E+00	0.227970E+02			
30	0.000000E+00	0.000000E+00	0.656278E+01			
31	0.000000E+00	0.000000E+00	0.554898E+01			
32	0.000000E+00	0.000000E+00	0.233200E+01			
33	0.000000E+00	0.000000E+00	0.241240E+01			
34	0.000000E+00	0.000000E+00	0.768205E+00			
35	0.000000E+00	0.000000E+00	0.166974E+01			
36	0.000000E+00	0.000000E+00	0.768194E+00			
37	0.000000E+00	0.000000E+00	0.241239E+01			
38	0.000000E+00	0.000000E+00	0.233198E+01			
39	0.000000E+00	0.000000E+00	0.554898E+01			
40	0.000000E+00	0.000000E+00	0.656274E+01			
41	0.000000E+00	0.000000E+00	0.227970E+02			
42	0.000000E+00	0.000000E+00	0.263167E+02			
43	0.000000E+00	0.000000E+00	0.278408E+02			
44	0.000000E+00	0.000000E+00	0.263167E+02			
ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS CURVAS						
BARRA	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	0.191E+01	0.258E+01	-0.110E+01	0.383E+00	0.280E+00	0.110E+01
2	0.210E+00	0.210E+00	-0.572E-05	0.210E+00	-0.210E+00	0.572E-05
3	0.383E+00	-0.280E+00	0.110E+01	0.191E+01	-0.258E+01	-0.110E+01
4	0.259E+01	0.259E+01	-0.153E-04	0.259E+01	-0.259E+01	0.153E-04
9	0.566E+01	0.174E+02	-0.423E+01	0.352E+01	-0.451E+01	0.423E+01
10	0.271E+01	0.511E+01	-0.874E+00	0.671E+00	-0.306E+01	0.674E+00
11	0.150E+01	0.294E+01	-0.657E+00	0.251E+00	-0.128E+01	0.657E+00
12	0.251E+00	0.138E+01	0.657E+00	0.150E+01	-0.294E+01	-0.657E+00
13	0.671E+00	0.306E+01	0.874E+00	0.271E+01	-0.511E+01	-0.874E+00
14	0.352E+01	0.451E+01	0.423E+01	0.566E+01	-0.176E+02	-0.423E+01
15	0.808E+01	0.172E+02	0.415E+01	0.101E+02	-0.249E+02	-0.101E+01
16	0.101E+02	0.249E+02	-0.101E+01	0.808E+01	-0.172E+02	0.415E+01
25	0.107E+02	0.592E+02	-0.114E+02	0.672E+01	-0.283E+02	0.114E+02
26	0.558E+01	0.288E+02	-0.369E+01	0.392E+01	-0.189E+02	0.369E+01
27	0.403E+01	0.188E+02	-0.346E+01	0.161E+01	-0.961E+01	0.346E+01
28	0.212E+01	0.991E+01	-0.635E+00	0.150E+01	-0.827E+01	0.635E+00
29	0.192E+01	0.807E+01	-0.998E+00	0.779E+00	-0.552E+01	0.998E+00
30	0.106E+01	0.559E+01	0.458E+00	0.141E+01	-0.680E+01	-0.458E+00
31	0.141E+01	0.680E+01	-0.458E+00	0.106E+01	-0.559E+01	0.458E+00
32	0.779E+00	0.552E+01	0.998E+00	0.192E+01	-0.807E+01	-0.998E+00
33	0.150E+01	0.827E+01	0.635E+00	0.212E+01	-0.991E+01	-0.635E+00
34	0.161E+01	0.961E+01	0.346E+01	0.403E+01	-0.188E+02	-0.346E+01
35	0.392E+01	0.189E+02	0.369E+01	0.558E+01	-0.288E+02	-0.369E+01
36	0.672E+01	0.283E+02	0.114E+02	0.107E+02	-0.592E+02	-0.114E+02
37	0.128E+02	0.591E+02	0.287E+01	0.126E+02	-0.632E+02	-0.125E+00
38	0.128E+02	0.629E+02	0.456E+01	0.142E+02	-0.715E+02	-0.181E+01
39	0.142E+02	0.715E+02	-0.181E+01	0.128E+02	-0.629E+02	0.456E+01
40	0.126E+02	0.632E+02	-0.125E+00	0.120E+02	-0.591E+02	0.287E+01
57	0.697E+01	0.347E+02	-0.174E+01	0.551E+01	-0.280E+02	0.174E+01
58	0.529E+01	0.275E+02	-0.288E+01	0.343E+01	-0.164E+02	0.288E+01
59	0.322E+01	0.159E+02	-0.920E+00	0.242E+01	-0.124E+02	0.920E+00
60	0.231E+01	0.121E+02	-0.141E+01	0.143E+01	-0.670E+01	0.141E+01
61	0.136E+01	0.653E+01	0.527E-01	0.128E+01	-0.675E+01	-0.527E-01
62	0.125E+01	0.667E+01	-0.635E+00	0.914E+00	-0.421E+01	0.635E+00
63	0.914E+00	0.421E+01	0.635E+00	0.125E+01	-0.667E+01	-0.635E+00
64	0.128E+01	0.675E+01	-0.527E-01	0.136E+01	-0.653E+01	0.527E-01
65	0.143E+01	0.670E+01	0.141E+01	0.231E+01	-0.121E+02	-0.141E+01
66	0.242E+01	0.124E+02	0.920E+00	0.322E+01	-0.159E+02	-0.920E+00
67	0.343E+01	0.164E+02	0.288E+01	0.529E+01	-0.275E+02	-0.288E+01
68	0.551E+01	0.280E+02	0.174E+01	0.697E+01	-0.347E+02	-0.174E+01
69	0.733E+01	0.352E+02	0.423E+01	0.891E+01	-0.439E+02	-0.303E+00
70	0.901E+01	0.442E+02	0.219E+01	0.924E+01	-0.450E+02	0.174E+01
71	0.924E+01	0.450E+02	0.174E+01	0.901E+01	-0.442E+02	0.219E+01
72	0.891E+01	0.439E+02	-0.303E+00	0.733E+01	-0.352E+02	0.423E+01

(cont. da TABELA II)

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS RETAS						
BARRA	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
5	0.160E-01	0.450E+01	0.110E+01	-0.160E-01	-0.670E+01	-0.110E+01
6	-0.490E+00	0.593E+00	-0.110E+01	0.490E+00	0.160E+01	0.110E+01
7	0.490E+00	0.593E+00	-0.110E+01	-0.490E+00	0.160E+01	0.110E+01
8	-0.160E-01	0.450E+01	0.110E+01	0.160E-01	-0.670E+01	-0.110E+01
17	-0.409E+00	0.204E+02	-0.883E+01	0.409E+00	0.204E+01	0.883E+01
18	-0.595E+00	0.623E+01	-0.336E+01	0.595E+00	0.384E+01	0.336E+01
19	-0.374E+00	0.571E+00	-0.131E+01	0.374E+00	0.337E+01	0.131E+01
20	0.148E-06	0.501E+00	-0.131E+01	-0.148E-06	0.344E+01	0.131E+01
21	0.374E+00	0.571E+00	-0.131E+01	-0.374E+00	0.337E+01	0.131E+01
22	0.595E+00	0.623E+01	-0.336E+01	-0.595E+00	0.384E+01	0.336E+01
23	0.409E+00	0.204E+02	-0.883E+01	-0.409E+00	0.204E+01	0.883E+01
24	-0.588E-06	0.202E+02	-0.798E+01	0.588E-06	0.378E+01	0.798E+01
41	-0.502E+00	0.166E+02	-0.103E+02	0.502E+00	0.143E+02	0.103E+02
42	-0.559E+00	0.123E+02	-0.770E+01	0.559E+00	0.108E+02	0.770E+01
43	-0.445E+00	0.411E+01	-0.359E+01	0.445E+00	0.665E+01	0.359E+01
44	-0.301E+00	0.273E+01	-0.282E+01	0.301E+00	0.474E+01	0.282E+01
45	-0.176E+00	0.527E-01	-0.950E+00	0.176E+00	0.280E+01	0.950E+00
46	-0.784E-01	0.184E+01	-0.146E+01	0.784E-01	0.253E+01	0.146E+01
47	-0.776E-06	-0.622E+00	-0.399E+00	0.776E-06	0.183E+01	0.399E+00
48	0.784E-01	0.184E+01	-0.146E+01	-0.784E-01	0.253E+01	0.146E+01
49	0.176E+00	0.527E-01	-0.950E+00	-0.176E+00	0.280E+01	0.950E+00
50	0.301E+00	0.273E+01	-0.282E+01	-0.301E+00	0.474E+01	0.282E+01
51	0.445E+00	0.411E+01	-0.359E+01	-0.445E+00	0.665E+01	0.359E+01
52	0.559E+00	0.123E+02	-0.770E+01	-0.559E+00	0.108E+02	0.770E+01
53	0.502E+00	0.166E+02	-0.103E+02	-0.502E+00	0.143E+02	0.103E+02
54	0.278E+00	0.254E+02	-0.144E+02	-0.278E+00	0.179E+02	0.144E+02
55	0.857E-06	0.246E+02	-0.144E+02	-0.857E-06	0.185E+02	0.144E+02
56	-0.278E+00	0.254E+02	-0.144E+02	0.278E+00	0.179E+02	0.144E+02

CONCLUSÃO

Julga-se que o programa escrito é bastante eficiente. Quanto à precisão dos resultados encontrados, pelas comparações feitas ao longo do trabalho, conclui-se que são bastante satisfatórios.

Convém informar, finalmente, que o trabalho aqui apresentado é baseado na Dissertação de Mestrado [5] do primeiro autor, com a orientação do segundo.

REFERÊNCIAS

- [1] VELUTINI, B., "Analysis of Continuous Circular Beams", Jnl. ACI, Vol. 22, nº 47, nov. 1950, págs. 217-228.
- [2] VREDEN, W., "Curved Continuous Beams For Highway Bridges", Frederick Ungar Publishing Co. - New York, 1969.
- [3] GERE, J.M., e WEAVER, W. Jr., "Analysis of Framed Structures", D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton - New Jersey, 1967.
- [4] REDDY, M.N. e TUMA, J.J., "Analysis of Laterally Loaded Continuous Curved Beams", Jnl. Structural Div., ASCE, Vol. 93, nº ST 1, fev. 1967, págs. 495-513.
- [5] DEMARZO, M.A., "Cálculo Automático de Vigas Contínuas e Grelhas Constituídas por Barras Curvas", Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1979.