APLICACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS
A LA APROXIMACION DE
PROBLEMAS DE CONTROL HEREDITARIO

Néstor E. Aguilera

Programa Especial de Matemática Aplicada Santa Fe (PEMA) dependiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Elena M. Fernández Berdaguer

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC) dependiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Resumen

Aplicamos el método de elementos finitos mixtos a un problema de optimización sujeto a restricciones funcionales dadas por ecuaciones ordinarias con retardos, problema clásico de la teoría de control.

Abstract

We apply the mixed finite element method to an optimization problem with functional restrictions given by delay differential equations. This is a typical problem in control theory.

1. INTRODUCCION

Nos interesa encontrar aproximaciones discretas al problema:

(P) *Encontrar un par* x,u *que minimice el funcional*

$$\int_0^T (x\,Q\,x + u\,R\,u)\,dt$$

sujeto a las condiciones

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{\nu} A_i\, x(t-h_i) + B\,u(t) \qquad \textit{para} \quad 0 < t < T$$

y

$$x(t) = x_0(t) \qquad\qquad \textit{para} \quad -h < t \le 0$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$; la matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y semidefinida positiva; la matriz $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es simétrica y definida positiva; $0<T<+\infty$; $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_\nu$; A_i, $i=0,\dots,\nu$ son matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$ y B es una matriz en $\mathbb{R}^{n\times m}$. Supónemos por simplicidad que las matrices son constantes.

El problema (P) ha sido y es objeto de intenso estudio dentro de la teoría de control óptimo, pues es un modelo más real que el usual donde no hay retardos, y tiene variadas aplicaciones en economía, biología, procesos industriales, etc. Podemos citar, por ejemplo, el control de estabilización y del timón de un buque. Una referencia clásica para este problema es el libro de J. Hale [1].

Naturalmente, también es de interés el estudio de aproximaciones numéricas a las soluciones del problema. En este sentido son varias las contribuciones en los últimos años. Para los interesados en el "state of the art" recomendamos el artículo de F. Kappel y D. Salamon [2].

Una técnica usual para resolver este tipo de problemas es la de introducir multiplicadores de Lagrange para posteriormente resolver un problema de puntos de ensilladura, técnica que adoptamos. Resulta entonces que si el par óptimo para el problema (P) es $\bar{x},\bar{u}$, entonces existe una función $\bar{\eta}$ (multiplicador de Lagrange) tal que $\bar{x},\bar{u},\bar{\eta}$ es un punto de ensilladura para el funcional:

$$\int_0^T [x\,Q\,x + u\,R\,u - 2\eta(\dot{x} - A\,x - B\,u)]\,dt$$

donde hemos puesto $A\,x = \Sigma A_i\, x(t-h_i)$.

Si consideramos (sin pérdida de generalidad) que x_0 está definida en todo el intervalo $(-h,T)$ y poniendo $x(t) = x_0(t) + y(t)$, con $y(t) = 0$ para $t \le 0$, y análogamente, $\bar{x}(t) = x_0(t) + \bar{y}(t)$, tenemos que el punto de ensilladura debe satisfacer las ecuaciones

$$\int_0^T y\,Q\,\bar{y}\,dt \qquad\qquad - \int_0^T \bar{\eta}(\dot{y} - A\,y)\,dt = -\int_0^T x_0\,Q\,y\,dt$$

$$\int_0^T u R \bar{u}\, dt - \int_0^T \bar{\eta} B u\, dt \qquad = 0$$

$$\int_0^T \eta\, (\dot{\bar{y}} - A\bar{y})\, dt - \int_0^T \eta B \bar{u}\, dt \qquad = 0$$

cualesquiera sean las funciones y, u, η.

Este último sistema de ecuaciones sugiere el uso de elementos finitos para la aproximación del punto de ensilladura. Sin embargo para hacerlo debemos tener cuidado con la elección de los subespacios aproximantes, puesto que de lo contrario pueden aparecer oscilaciones espúrias, es decir debemos utilizar la técnica de elementos mixtos que ha sido estudiada por varios autores. Aquí seguiremos los lineamientos dados por F. Brezzi [3]. La aplicación de esta técnica nos dará, por ejemplo que si deseamos aproximar la función x por funciones continuas y lineales (resp. cuadráticas) a trozos, entonces la función u deberá aproximarse por funciones constantes (resp. lineales) a trozos que no son necesariamente continuas.

En el próximo parágrafo enunciaremos algunos resultados teóricos en los que se apoya nuestro trabajo y en el siguiente mostraremos algunos ejemplos numéricos.

2. RESULTADOS TEORICOS

Dispensamos a nuestros amigos ingenieros de la lectura de esta sección. Aunque esperamos que nuestros amigos matemáticos la lean, para hacerles la tarea más grata no hemos incluido demostraciones. Éstas no son extremadamente difíciles y creemos que el texto siguiente es una guía suficiente para el muy interesado.

Comenzamos por introducir algunas notaciones:

Con $L^2(a,b;\mathbb{R}^p)$ indicamos el conjunto de las funciones definidas en el intervalo (a,b) que toman valores en $\mathbb{R}^p$. Con $H^k(a,b;\mathbb{R}^p)$ indicamos las funciones de $L^2(a,b;\mathbb{R}^p)$ con k derivadas también en $L^2(a,b;\mathbb{R}^p)$.

El primer resultado de importancia que nos interesa es el siguiente

Teorema 1: *Si el dato inicial* $x_0 \in H^k(-h,0;\mathbb{R}^p)$, *y* $k=1$ *ó* $k=0$. *entonces existe un único par óptimo* $\bar{x}, \bar{u}$ *para el problema* (P). *Este par satisface*

a) $\bar{x} \in H^{k+1}(0,T;\mathbb{R}^n)$ *y* $\|\bar{x}\|_{H^{k+1}} \leq C\, \|x_0\|_{H^k}$

b) $\bar{u} \in H^k(0,T;\mathbb{R}^m)$ *y* $\|\bar{u}\|_{H^k} \leq C\, \|x_0\|_{H^k}$

Además, el multiplicador de Lagrange asociado, η, *satisface*

c) $\bar{\eta} \in H^k(0,T;\mathbb{R}^n)$ *y* $\|\bar{\eta}\|_{H^k} \leq C\, \|x_0\|_{H^k}$.

Es interesante observar que si $k \geq 2$ la conclusión del teorema no es cierta en general.

La demostración del teorema utiliza las condiciones necesarias y suficientes establecidas por Brezzi [3] para existencia y unicidad de puntos de ensilladura. Para poder aplicar esos resultados en la demostración del Teorema 1, introducimos los espacios:

$H_+^k(0,T;\mathbb{R}^n)$ como el espacio de las funciones en $H^k(-\infty,T;\mathbb{R}^n)$ que se anulan en $(-\infty,0)$,

$V = \{v = (y,u):\ y \in H_+^1(0,T;\mathbb{R}^n),\ u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)\}$ con norma

dada por $\|v\|_V^2 = \|\dot{y}\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2$, y finalmente ponemos

$$W = L^2(0,T;\mathbb{R}^n).$$

También consideramos las funcionales bilineales:

i) a definida en $V \times V$ como

$$a(v,v') = \int_0^T (y\,Q\,y' + y\,R\,u')\,dt \qquad \text{si} \quad v = (y,u),\ v' = (y',u')$$

ii) b definida en $V \times W$ por

$$b(v,\eta) = \int_0^T \eta(\dot{y} - A\,y - B\,u)\,dt \qquad \text{si} \quad v = (y,u)$$

y la funcional lineal L definida sobre V por

$$L(v) = -\int_0^T y\,Q\,x_0\,dt$$

Con estas notaciones nuestro problema de punto de ensilladura se escribe como:

Encontrar $\bar{v} \in V$, $\bar{\eta} \in W$ tales que

$$a(\bar{v},v) + b(v,\bar{\eta}) = L(v) \quad \text{para toda} \quad v \in V$$

y

$$b(\bar{v},\eta) = 0 \quad \text{para toda} \quad \eta \in W$$

Para aplicar los resultados de Brezzi mencionados bastará establecer el siguiente:

Lema 2: *Existe una constante* $k > 0$ *tal que*

i) *Si* $v \in V$ *es tal que* $b(v,\eta) = 0$ *para toda* $\eta \in W$, *entonces*

$$a(v,v) \geq k \, \|v\|_V^2$$

y

ii) *Para toda* $\eta \in W$ *existe* $v \in V$ *tal que*

$$b(v,\eta) \geq k \, \|v\|_V \cdot \|\eta\|_W$$

Pasando ahora a las aproximaciones discretas, hacemos las siguientes hipótesis:

i) Suponemos el intervalo $(0,T)$ dividido de tal manera que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

definimos

$$I_j = (t_{j-1}, t_j),$$

y ponemos

$$\delta = \max_{1 \leq j \leq N} (t_j - t_{j-1})$$

ii) Consideramos

$V_\delta = \{v = (y,u) \in V$: la restricción de y a cada I_j es lineal, la restricción de u a cada I_j es constante$\}$

(También podríamos haber tomado por ejemplo y cuadrática a trozos pero en ese caso, u debe ser lineal a trozos, observar que entonces como sólo se pide $u \in L^2$, u no es necesariamente continua).

iii) y el espacio

$W_\delta = \{\eta \in W$: la restricción de η a cada I_j es constante$\}$

(Si hubiéramos considerado funciones lineales para u, tendríamos que hacer lo mismo para las η. Observar, sin embargo, que $u(t)$ es un vector de <u>m</u> dimensiones, mientras que $\eta(t)$ es un vector de <u>n</u> dimensiones. Otra vez, η no es necesariamente continua).

Podemos plantear ahora el problema discreto:

(P_δ) *Encontrar* $v_\delta \in V_\delta$, $\eta_\delta \in W_\delta$ *tales que*

$$a(v_\delta, v) + b(v, \eta_\delta) = L(v) \quad \textit{para toda} \quad v \in V_\delta$$

y

$$b(v_\delta, \eta) = 0 \quad \textit{para toda} \quad \eta \in W_\delta .$$

Para resolver el problema discreto bajo las condiciones de Brezzi, suponemos además que δ es suficientemente pequeño de modo que:

1) $\delta < h_1$.

2) $2/\delta > \max\{|\lambda| : \lambda$ es autovalor de $A_0\}$

Bajo estas hipótesis, es posible demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3: *Bajo las condiciones anteriores tenemos que existe* $k_\delta > 0$ *tal que*

i) *Si* $v \in V_\delta$ *es tal que* $b(v,h) = 0$ *para toda* $\eta \in W_\delta$, *entonces*

$$a(v,v) \geq k_\delta \|v\|_V^2$$

y

ii) *Para toda* $\eta \in W_\delta$ *existe* $v \in V_\delta$ tal que

$$b(v,\eta) \geq k_\delta \|v\|_V \cdot \|\eta\|_W$$

Por lo tanto el problema (P_δ) *admite una única solución, y se satisface*

$$\|v_\delta - v\|_V + \|\eta_\delta - \eta\|_W \leq C\,\delta\, \|x_0\|_{H^1}$$

si $x_0 \in H^1(-h,0;\mathbb{R}^n)$.

Es interesante destacar que la constante k_δ obtenida tiene un límite positivo para δ tendiendo a 0, lo que implica estabilidad en el método numérico.

3. EJEMPLOS NUMERICOS

Exponemos aquí el siguiente ejemplo numérico citado por Kappel y Salamon [2]:

$$\min\ x(2)\cdot x(2) + \int_0^2 u \cdot u\, dt$$

sujeto a las condiciones

$$\dot{x}(t) = A\,x(t-1) + u(t)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$x(t) = 1 \qquad \text{para} \quad t \leq 0$$

La solución analítica de este problema es

$$u_1(t) = \begin{cases} \mu + \delta(1-t) & \text{para } 0 \le t \le 1 \\ \mu & \text{para } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$u_2(t) = \delta \qquad \text{para } 0 \le t \le 2$$

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 + \mu t - \delta(t-1)^2/2 + \delta/2 & \text{para } 0 \le t \le 1 \\ 1 + ut + \delta/2 & \text{para } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 + (1+\delta)t & \text{para } 0 \le t \le 1 \\ 2 + 5\,\delta/6 + (1 + 3\,\delta/2)(t-1) + & \\ + \mu(t-1)^2/2 - \delta(t-2)^6/6 & \text{para } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Siendo el valor óptimo del funcional

$$3\,\mu^2 + \mu\,\delta + 10\,\delta^2/2$$

donde

$$\delta = -34/39 \qquad \text{y} \qquad \mu = -22/117$$

En este ejemplo tenemos $n = m = 2, Q = 0$, y puesto que B y R son la identidad, $u = \eta$. Observamos que el funcional no es exactamente de la forma planteada en el problema (P), pero nuestros resultados se pueden extender sin variantes para cubrir este caso (porque, ach!, la evaluación en T es continua en H^1).

Realizamos la aproximación utilizando primeramente funciones lineales a trozos (continuas) para x y constantes a trozos para u, dividiendo el $[0,2]$ en 8 subintervalos iguales ($\Delta t = 0.25$), usando precisión simple (real*4) y subrutinas IMSL para la inversión de las matrices. Resumimos los resultados en la tabla 1.

Como se puede observar, en este caso la aproximación a u coincide prácticamente con su proyección en L^2, siendo los errores relativos para todas las aproximaciones menores que 0.17 E-2.

Luego hicimos la aproximación utilizando funciones cuadráticas a trozos (continuas) para x y lineales a trozos (no necesariamente continuas) para u. En este caso dividimos el intervalo $[0,2]$ en 4 partes iguales ($\Delta t = 0.5$) a fin de obtener resultados comparables con los anteriores (las matrices a invertir son del mismo tamaño), usamos también las subrutinas IMSL y precisión simple. Los resultados están en la tabla 2.

Observamos ahora que los errores son mucho menores. La función aproximante de u, a pesar de que no se lo pedimos, resulta ser continua y coincide exactamente con la solución analítica. Para x obtenemos que

TABLA I

Intervalo	u_1 discreta	u_1 verdadera (promedio en el intervalo)
0.00-0.25	-0.9518	-0.9508
0.25-0.50	-0.7335	-0.7329
0.50-0.75	-0.5152	-0.5149
0.75-1.00	-0.2969	-0.2970
1.00-1.25	-0.1878	-0.1880
1.25-1.50	-0.1878	-0.1880
1.50-1.75	-0.1878	-0.1880
1.75-2.00	-0.1878	-0.1880

Intervalo	u_2 discreta	u_2 verdadera (promedio en el intervalo)
todos	-0.8731	-0.8718

Nodo	x_1 discreta	x_1 verdadera
0.25	0.7620	0.7622
0.50	0.5786	0.5790
0.75	0.4498	0.4503
1.00	0.3756	0.3760
1.25	0.3286	0.3290
1.50	0.2817	0.2920
1.75	0.2347	0.2350
2.00	0.1878	0.1880

Nodo	x_2 discreta	x_2 verdadera
0.25	1.0317	1.0320
0.50	1.0634	1.0641
0.75	1.0951	1.0961
1.00	1.1268	1.1282
1.25	1.1287	1.1294
1.50	1.0780	1.0779
1.75	0.9883	0.9875
2.00	0.8731	0.8717

TABLA II

Nodo	u_1 - discreta	u_1 + discreta	u_1 verdadera
0.00	*******	-1.0598	-1.0598
0.50	-0.6239	-0.6239	-0.6239
1.00	-0.1880	-0.1880	-0.1880
1.50	-0.1880	-0.1880	-0.1880
2.00	-0.1880	*******	-0.1880

Nodo	u_2 - discreta	u_2 + discreta	u_2 verdadera
0.00	*******	-0.8718	-0.8718
0.50	-0.8718	-0.8718	-0.8718
1.00	-0.8718	-0.8718	-0.8718
1.50	-0.8718	-0.8718	-0.8718

Nodo	x_1 discreta	x_1 verdadera
0.25	0.7622	0.7622
0.50	0.5790	0.5790
0.75	0.4503	0.4503
1.00	0.3760	0.3760
1.25	0.3290	0.3290
1.50	0.2820	0.2820
1.75	0.2350	0.2350
2.00	0.1880	0.1880

Nodo	x_2 discreta	x_2 verdadera
0.25	1.0320	1.0320
0.50	1.0641	1.0641
0.75	1.0961	1.0961
1.00	1.1282	1.1282
1.25	1.1294	1.1294
1.50	1.0779	1.0779
1.75	0.9875	0.9875
2.00	0.8717	0.8717

los errores relativos no superan 0.16 E-6.

En ambos casos resulta que los errores son bastante menores que h.

REFERENCIAS

[1] Hale, J., *Theory of Functional differential equations*, Springer-Verlag, 1977.

[2] Kappel, F. y Salamon, D., *Spline Approximation for retarded systems and the Riccati equation*, MRC Technical Report #2680, University of Wisconsin, 1984.

[3] Brezzi, F., *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian Multipliers*, R.A.I.R.O., 1974, R.2, pgs. 129-151.