

CODIGOS NUMERICOS PARA EL PRODUCTO DE MATRICES RALAS

Horacio E. Retamales

Instituto de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas,
Físicas y Naturales.
Universidad Nacional de San Juan
San Juan - República Argentina

Carlos H. Delahaye

Luis E. Sanchez

Centro de Cómputos y Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de San Juan.
San Juan - República Argentina

RESUMEN

Con el objeto de minimizar el tiempo de procesamiento de algoritmos numéricos que resulten un sistema de ecuaciones lineales, como así también minimizar los requerimientos de memoria, se han desarrollado un conjunto de subrutinas que realizan productos de bloques (componentes de las matrices factores) utilizando solamente los elementos no nulos de cada bloque, o bien, las filas o columnas que contienen los elementos no nulos.

Se establecen comparaciones entre productos de bloques, considerados como matrices ralas, con solo filas o columnas y como matrices llenas.

Los resultados obtenidos muestran ventajas del empleo de las técnicas desarrolladas.

ABSTRACT

A set of subroutines have been developed, in order to minimize the CPU time and storing requirements in processing block matrix products using non zero elements of each block matrix or non zero rows (columns).

Comparison is set among product of blocks considered as sparse matrixes (column matrixes) or complete matrixes.

Advantages are shown by results been obtained, in using developed techniques.

1. INTRODUCCION

Las técnicas numéricas empleadas en la resolución de la ecuación diferencial gobernante de un determinado fenómeno (método de los elementos finitos, método de las diferencias finitas, métodos de los elementos de contorno), plantean la solución de un sistema de ecuaciones lineales. El tamaño de este sistema de ecuaciones a resolver, ha aumentado a medida que los computadores han evolucionado en cuanto a su capacidad de almacenamiento y velocidad. Debido a que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones es una matriz rala, el tratamiento de ellas ha establecido toda una disciplina conocida como "el arte en manejo de matrices ralas". La idea de dividir una gran matriz en "submatrices" o "bloques" surge naturalmente ya que los bloques pueden ser tratados como si ellos fuesen los elementos de la matriz y en este caso la matriz se transforma en una matriz de matrices. El particionamiento puede ser considerado simplemente como una herramienta de manejo de datos, lo cual ayuda a organizar la transferencia de información entre memoria principal y dispositivos periféricos.

Los algoritmos de solución del sistema de ecuaciones consisten en operaciones de suma, resta y producto entre bloques los cuales contienen en la mayoría de los casos una pequeña cantidad de elementos no nulos. La existencia de pocos elementos no nulos en un bloque hace que las operaciones entre ellos cuando son utilizados como llenos demanden una mayor cantidad de memoria y un mayor tiempo de procesamiento. Ello ha inducido al desarrollo de un conjunto de subrutinas que realicen el producto entre bloques de forma tal que se tomen en cuenta únicamente los elementos no nulos de ellos. Los resultados obtenidos demuestran claramente la conveniencia de su empleo ya que se consigue un menor tiempo de procesamiento, gran ahorro de memoria y un fácil manejo de la información a suministrar de cada bloque.

En el presente trabajo se describen las experiencias realizadas en el procesamiento de un programa que resuelve el producto de bloques (matrices), de distintos tipos, según la distribución de sus elementos no nulos, teniendo como objetivo el menor tiempo de procesamiento de la operación.

La misma operación se realiza considerando, a un bloque con muy pocos elementos no nulos, ya sea como bloque lleno, esto es operando con todos sus elementos, incluso los nulos, y luego solo con sus elementos no nulos solamente, o bien, con los elementos no nulos ubicados en una fila, en una columna o en la diagonal.

Para cada situación se desarrolló una subrutina particular que permite el tratamiento adecuado de la información referente a la ubicación de los elementos.

Finalmente se dan conclusiones sobre los resultados obtenidos.

2. TIPOS DE BLOQUES.

De acuerdo a la distribución y cantidad de elementos no nulos del bloque este es informado como:

- Bloque lleno: se consideran todos los elementos del bloque.

- Bloque raro: se consideran únicamente los elementos no nulos del bloque los cuales pueden ocupar cualquier posición dentro de él.
- Bloque fila: los elementos no nulos se ubican en una fila bloque.
- Bloque columna: los elementos no nulos se ubican en una columna del bloque.
- Bloque diagonal: los elementos no nulos se ubican en la diagonal del bloque.

3. FUNCION DE DISTRIBUCION (referencia[4])

El almacenamiento de los elementos no nulos de un bloque raro se realiza en dos vectores fila que tienen tantos componentes como elementos no nulos del bloque. En el segundo de ellos se almacena la información relativa a la ubicación del elemento correspondiente en el bloque, según el valor que toma la siguiente función de distribución:

$$ND(K) = IC * (I - 1) + J ; \quad K = 1, 2, \dots, NN$$

donde:

IC: número de columnas del bloque.

I, J: fila y columna del K-ésimo elemento no nulo del bloque.

ND(K) ; valor de la función de distribución en el k-ésimo elemento no nulo del bloque.

NN: número de elementos no nulos del bloque.

3.1. LISTADO DE LA SUBROUTINA PRINCIPAL DEL PAQUETE DE PROGRAMAS.

SUBROUTINE MULT (A, NDA, NNA, ICA, NTA, B, NDB, NNB, ICB, NTB, R, NDR, NNR, ICR, *NTR, AJX)

M U L T

C PROPOSITO = MULTIPLICAR BLOQUES DE MATRICES RALAS.-
C
C
C NDA = FUNCION DE DISTRIBUCION DEL PREFACTOR.-
C NDB = FUNCION DE DISTRIBUCION DEL POSFACTOR.-
C NDR = FUNCION DE DSITRIBUCION DEL RESULTANTE.-
C
C NNA = CANTIDAD DE ELEMENTOS NO NULOS DEL PREFACTOR.-
C NNB = CANTIDAD DE ELEMENTOS NO NULOS DEL POSFACTOR.-
C NNR = CANTIDAD DE ELEMENTOS NO NULOS DEL RESULTANTE.
C
C ICA = CANTIDAD DE COLUMNAS DEL PREFACTOR.-
C ICB = CANTIDAD DE COLUMNAS DEL POSFACTOR.-
C ICR = CANTIDAD DE COLUMNAS DEL RESULTANTE.-
C
C A = PREFACTOR.-

C B = POSFACTOR.-
C R = RESULTANTE.-
C AUX = VECTOR DE TRABAJO DE DIMENSION.-
C' (FILAS * COLUMNAS) DE LA MATRIZ PREFACTOR.
C
C NTA = TIPO DE BLOQUE DEL PREFACTOR.
C NTB = TIPO DE BLOQUE DEL POSFACTOR.
C NTR = TIPO DE BLOQUE DEL RESULTANTE.
C
C DIFERENTES TIPOS
C TIPO = 1 BLOQUE LLENO.-
C TIPO = 2 BLOQUE RALO.-
C TIPO = 3 BLOQUE FILA.-
C TIPO = 4 BLOQUE COLUMNA.-
C TIPO = 5 BLOQUE DIAGONAL.-
C
C SUBPROGRAMAS SUBROUTINAS USADOS._
C
C LLELLE RALLLE FILLLE COLLE DIALLE
C LLERAL RALRAL FILRAL COLRAL DIARAL
C LLEFIL RALFIL FILFIL COLFIL DIAFIL
C LLECOL RALCOL FILCOL COLCOL DIACOL
C LLEDIA RALDIA FILDIA COLDIA DIADIA
C
C I.N.M.A.S.J.
C-----
C INTEGER*2 NDA,NDB,MDR
C DIMENSION A(1), NDA(1), B(1), MDB(1),R(1),NDR(1), AUX(1)
C-----
C DECISION DEL TIPO DE PRODUCTO A REALIZAR
C-----
C GO TO (10,20,30,40,50),NTA
10 GO TO (11,12,13,14,15),NTB
20 GO TO (21,22,23,24,25),NTB
30 GO TO (31,32,33,34,35),NTB
40 GO TO (41,42,43,44,45),NTB
50 GO TO (51,52,53,54,55),NTB
C-----
C BLOQUE PREFACTOR LLENO
C-----
11 CALL LLELLE(A,NDA,NNA,ICA,B,NDB,NNB,ICB,R,NDR,NNR,ICR,NTR)
RETURN
12 CALL LLERAL(A,NDA,NNA,ICA,B,NDB,NNB,ICB,R,NDR,NNR,ICR,NTR)
RETURN
13 CALL LLEFIL(A,NDA,NNA,ICA?B,NDB,NNB,ICB,R,NDR,NNR,ICR,NTR)
RETURN
14 CALL LLECOL(A,NDA,NNA,ICA,B,NDB,NNB,ICB,R,NDR,NNR,ICR,NTR)
RETURN
15 CALL LLEDIA(A,NDA,NNA,ICA,B,NDB,NNB,ICB,R,NDR,NNR,ICR,NTR)

RETURN

C-----

BLOQUE PREFACTOR RALO

C-----

- 21 CALL RALLLE (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 22 CALL RALRAL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR, AUX)
RETURN
- 23 CALL RALFIL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 24 CALL RALCOL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 25 CALL RALDIA (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN

C-----

BLOQUE PREFACTOR FILA

C-----

- 31 CALL FILLE (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 32 CALL FILRAL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 33 CALL FILFIL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 34 CALL FILCOL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 35 CALL FILDIA (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN

C-----

BLOQUE PREFACTOR COLUMNA

C-----

- 41 CALL COLLLE (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 42 CALL COLRAL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 43 CALL COLFIL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 44 CALL COLCOL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 45 CAL COLDIA (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN

C-----

BLOQUE PREFACTOR DIAGONAL

C-----

- 51 CALL DIALLE (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 52 CALL DIARAL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN
- 53 CALL DIAFUL (A, NDA, NNA, ICA, B, NDB, NNB, ICB, R, NDR, NNR, ICR, NTR)
RETURN

```
54 CALL DIACOL(A,NDA,NNA,ICA,B,NDB,NNB,ICB,R,NDR,NNR,ICR,NTR)
RETURN
55 CALL DIADIA(A,NDA,NNA,ICA,B,NDB,NNB,ICB,R,NDR,NNR,ICR,NTR)
RETURN
END
```

3.2. LISTADO CORRESPONDIENTE A LA SUBROUTINA RALRAL DEL PAQUETE DE PROGRAMAS.

```
SUBROUTINE RALRAL(AA,NDA,NNA,ICA,B,NDB,NNB,ICB,R,NDR,NNR,ICR,NTR*,A)
```

C-----

C SUBROUTINA QUE MULTIPLICA MATRIZ RALA * MATRIZ RALA

I.N.M.A.S.J.

C-----

```
C      INTEGER*2 NDA,NDB,NDR
      DIMENSION AA(1), NDA(1),B(1),NDB(1),R(1),NDR(1),A(1)
      IFA = (NDA(NNA) -0,5)/ICA+1
      DO 3 I=1,IFA*ICA
      3 A(I) = 0
      DO 4 I = 1,NNA
      4 A(NDA(I)) = AA(I)
      NNA = IFA * ICA
      NNR = IFA * ICB
      DO 10 I = 1, NNR
      10 R(I) = 0
      DO 20 I = 1,NNB
      IB = (NDB(I)-0,5)/ICB+1
      JB = NDB(I)-(IB-1)*ICB
      DO 20 J=1,IFA
      KA=ICA*(J-1)+IB
      KR = ICB*(J-1)+JB
      20 R(KR)=R(KR)+A(KA)*B(I)
      ICR=ICB
      NTR=1
      RETURN
      END
```

4. RESULTADOS OBTENIDOS

De acuerdo a la clasificación establecida en 3., se ha realizado el producto de cada clase de bloque consigo mismo y con cada uno de los tipos restantes'

Se han procesado bloques de orden 3 hasta orden 100 inclusive y un porcentaje de elementos no nulos que varía desde el 10% al 100% en los bloques malos.

Los resultados obtenidos se muestran en las tablas 1 y 2.

Estas fueron construidas de la siguiente forma:

Tabla 1 - en la primera columna ORD indica el orden de los bloques factores de 3x3 hasta 100x100.

- las restantes columnas muestran el tiempo aproximado de procesamiento del producto del tipo de bloques indicado en el encabezamiento de cada columna. (Valores menores que 0.005 seg no son indicados)

Tabla 2-se incorpora el tipo de bloque ralo.

- el orden se incrementa en 10 en cada caso (1° columna)
- para cada orden, se consideran diferentes porcentajes de e lementos no nulos (PORC: 2° columna)

5. DISCUSION DE RESULTADOS

De los resultados obtenidos de la tabla 1 se deduce que:

- Para cualquier orden de bloque, es conveniente tomar los bloques co mo FILA, COLUMNA O DIAGONAL antes que LLENO. Los tiempos en estos ca sos se reducen enormemente.

De los resultados obtenidos de la tabla 2 se deduce que:

- Es conveniente realizar el producto entre bloques como RALO*RALO en lugar de LLENO*LLENO siempre que el porcentaje de elementos no nulos en el bloque RALO sea menor o igual al 90%.
- Es conveniente realizar el producto entre bloques como LLENO*RALO en lugar de LLENO*LLENO cualquiera sea el porcentaje de elementos no nulos del bloque RALO.
- Es conveniente realizar el producto entre bloques como RALO*LLENO en lugar de LLENO*LLENO siempre que el porcentaje de elementos no nulos del RALO sea menor o igual al 94%.
- Es conveniente realizar el producto entre bloques como RALO*COLUM NA en lugar de LLENO*COLUMNA hasta un porcentaje de elementos no nulos del bloque RALO menor o igual al 50%.
- Es conveniente realizar el producto entre bloques como RALO*DIAGO NAL en lugar de LLENO*DIAGONAL hasta un porcentaje de elementos no nulos del bloque RALO menor o igual al 80%.

6. TABLA 1

Tiempos de procesamiento del producto de bloques para bloques de or den 3 hasta 100.

ORD	LLELE	LLEFIL	LLECOL	LLEDIA	FILLE	FILFIL	FILCOL	FILDIA	COLLE	COLFIL	COLCOL	COLDIA	DIALLE	DIAPIL	DIACOL	DIADIA
3	--	--	--	--	--	--	--	0.01	--	0.01	--	--	--	--	0.01	--
4	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
5	0.01	0.01	--	--	0.01	--	--	--	--	0.01	--	--	--	--	--	--
6	0.01	--	--	--	--	0.01	0.01	--	0.01	--	--	--	--	0.01	--	--
7	0.01	0.01	--	--	--	--	--	--	--	0.01	--	--	--	--	--	--
8	0.01	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
9	0.02	--	--	0.01	0.01	--	--	--	--	0.01	--	--	--	--	--	--
10	0.03	0.01	--	--	0.01	--	--	0.01	0.01	--	0.01	--	--	--	--	--
11	0.05	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
12	0.06	--	--	--	0.01	--	--	--	--	0.01	--	--	0.01	--	--	--
13	0.07	0.01	0.01	0.01	0.01	--	--	--	--	0.01	--	--	0.01	0.01	--	--
14	0.09	0.01	0.01	0.01	0.01	--	--	--	--	0.01	--	--	--	--	--	--
15	0.11	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	--	--	0.01	0.01	0.01	--	--	0.01	--	--
16	0.13	0.01	0.01	0.01	0.01	--	--	--	0.01	0.01	0.01	--	--	--	--	--
17	0.16	0.01	--	0.01	0.01	--	--	--	0.01	0.01	0.01	--	0.01	--	--	--
18	0.19	0.01	0.01	0.01	0.02	--	0.01	--	--	0.01	0.01	--	0.01	--	--	--
19	0.22	0.01	0.01	0.01	0.01	--	--	--	--	0.01	0.01	0.01	0.01	--	--	--
20	0.27	0.01	0.01	0.02	0.02	0.01	--	--	0.01	0.01	0.01	--	--	--	--	--
21	0.31	0.01	0.01	0.02	0.02	--	--	0.01	0.01	0.01	0.01	--	0.01	--	--	--
22	0.35	0.02	0.01	0.02	0.03	--	0.01	--	--	0.01	0.01	--	0.01	--	--	0.01
23	0.39	0.02	0.01	0.02	0.02	--	--	--	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	--	--
24	0.46	0.01	0.02	0.03	0.02	--	--	--	0.01	0.02	0.01	--	0.01	0.01	--	--
25	0.53	0.02	0.03	0.02	0.03	0.01	--	--	0.01	0.01	0.01	--	0.01	--	--	--
26	0.57	0.02	0.02	0.03	0.03	--	--	--	0.01	0.01	0.01	--	0.01	--	--	--
27	0.64	0.02	0.02	0.03	0.04	0.01	--	--	0.01	0.02	0.02	--	0.01	--	--	--
28	0.72	0.03	0.02	0.03	0.03	--	--	--	0.01	0.02	0.02	--	0.01	0.01	--	--
29	0.79	0.02	0.03	0.04	0.04	0.01	--	--	0.02	0.02	0.02	--	0.01	--	--	--
30	0.88	0.03	0.03	0.03	0.05	--	--	--	0.01	0.02	0.02	--	0.02	--	--	--
31	0.99	0.03	0.03	0.04	0.04	--	--	--	0.02	0.03	0.02	--	0.02	--	--	--
32	1.07	0.03	0.03	0.05	0.05	--	--	--	0.02	0.03	0.02	--	0.02	--	0.01	--
33	1.17	0.03	0.03	0.04	0.05	--	--	--	0.02	0.02	0.02	--	0.03	--	--	--

34	1.28	0.04	0.03	0.05	0.06	--	--	--	0.02	0.03	0.02	--	0.02	--	0.01	--
35	1.40	0.03	0.03	0.06	0.06	--	0.01	--	0.02	0.03	0.02	--	0.02	--	--	--
36	1.52	0.04	0.04	0.05	0.07	0.01	--	--	0.03	0.03	0.03	--	0.02	--	--	--
37	1.67	0.04	0.04	0.06	0.07	--	--	--	0.02	0.03	0.03	0.01	0.02	--	--	--
38	1.89	0.05	0.04	0.06	0.07	--	--	--	0.03	0.04	0.03	--	0.03	--	--	--
39	1.98	0.04	0.04	0.06	0.08	--	--	--	0.03	0.04	0.03	--	0.03	--	--	0.01
40	2.11	0.04	0.04	0.08	0.08	--	--	--	0.03	0.04	0.03	--	0.03	--	--	--
41	2.26	0.05	0.05	0.08	0.10	--	--	--	0.03	0.04	0.03	--	0.03	--	--	--
42	2.42	0.05	0.05	0.07	0.10	--	--	0.01	0.03	0.04	0.03	--	0.02	--	--	--
43	2.64	0.06	0.05	0.07	0.09	0.01	--	--	0.04	0.04	0.04	--	0.03	--	--	--
44	2.80	0.07	0.05	0.09	0.09	0.01	--	0.01	0.04	0.05	0.04	--	0.03	0.01	--	--
45	2.99	0.06	0.06	0.09	0.10	--	--	--	0.04	0.05	0.04	--	0.03	--	--	--
46	3.24	0.07	0.05	0.09	0.10	--	--	--	0.04	0.05	0.04	--	0.03	--	--	--
47	3.46	0.07	0.06	0.11	0.11	--	--	--	0.04	0.06	0.03	--	0.04	--	--	--
48	3.63	0.07	0.07	0.10	0.11	--	--	--	0.04	0.06	0.04	--	0.04	0.01	--	--
49	3.91	0.08	0.06	0.12	0.11	--	--	0.01	0.04	0.06	0.04	--	0.04	--	0.01	--
50	4.26	0.07	0.06	0.11	0.12	--	--	--	0.04	0.06	0.05	--	0.04	0.01	--	--
51	4.58	0.08	0.07	0.11	0.12	--	--	--	0.05	0.06	0.05	--	0.05	--	0.01	--
52	4.62	0.09	0.07	0.13	0.13	--	--	--	0.05	0.07	0.06	--	0.05	0.01	--	--
53	4.88	0.08	0.07	0.11	0.14	0.01	--	--	0.06	0.06	0.06	--	0.05	--	--	--
54	5.19	0.10	0.07	0.13	0.13	--	--	--	0.05	0.07	0.06	--	0.05	--	--	--
55	5.44	0.10	0.07	0.13	0.14	0.01	--	--	0.06	0.07	0.06	--	0.05	--	--	--
56	5.73	0.10	0.08	0.14	0.16	--	0.01	--	0.05	0.08	0.08	--	0.05	--	--	0.01
57	6.43	0.11	0.09	0.15	0.15	0.01	--	--	0.05	0.08	0.07	--	0.05	0.01	--	--
58	6.38	0.10	0.08	0.14	0.17	--	--	--	0.06	0.08	0.07	--	0.05	--	--	--
59	6.73	0.11	0.10	0.15	0.17	--	--	--	0.06	0.08	0.06	--	0.05	0.01	--	--
60	7.28	0.12	0.10	0.16	0.17	--	--	--	0.07	0.09	0.07	--	0.05	--	0.01	--
61	7.52	0.11	0.10	0.17	0.18	--	--	--	0.07	0.10	0.07	--	0.06	--	--	0.01
62	7.79	0.12	0.10	0.17	0.19	--	--	--	0.08	0.09	0.07	--	0.07	0.01	--	--
63	8.19	0.12	0.10	0.16	0.20	--	--	0.01	0.07	0.10	0.08	0.01	0.07	--	--	--
64	9.21	0.15	0.11	0.18	0.21	--	--	--	0.08	0.09	0.09	--	0.07	--	--	--
65	9.22	0.13	0.11	0.19	0.20	--	0.01	0.01	0.08	0.10	0.08	--	0.07	--	--	--
66	9.58	0.13	0.12	0.19	0.22	--	--	--	0.07	0.10	0.08	--	0.07	--	--	--

67	10.06	0.14	0.12	0.20	0.22	--	0.01	0.01	0.10	0.10	0.09	--	0.08	--	0.01	--
68	10.59	0.15	0.11	0.19	0.23	--	--	--	0.09	0.10	0.09	0.01	0.07	--	--	0.01
69	10.91	0.15	0.14	0.22	0.23	--	--	--	0.08	0.12	0.10	--	0.08	--	--	--
70	11.37	0.16	0.12	0.20	0.24	--	--	--	0.08	0.11	0.10	--	0.08	0.01	0.01	--
71	11.82	0.16	0.14	0.22	0.25	--	--	--	0.09	0.12	0.11	--	0.09	--	0.01	--
72	12.76	0.18	0.12	0.22	0.24	--	0.01	0.01	0.09	0.13	0.11	--	0.09	--	0.01	--
73	13.38	0.20	0.14	0.25	0.25	--	--	--	0.10	0.14	0.11	0.01	0.09	--	--	--
74	13.74	0.18	0.15	0.25	0.25	--	--	--	0.10	0.13	0.12	--	0.10	--	0.01	--
75	13.85	0.19	0.15	0.27	0.27	--	--	0.01	0.09	0.13	0.11	--	0.10	0.01	0.01	0.01
76	14.33	0.19	0.15	0.27	0.29	--	--	--	0.11	0.14	0.11	--	0.10	--	0.01	0.01
77	15.24	0.10	0.16	0.28	0.29	--	0.01	--	0.10	0.14	0.11	--	0.09	--	0.01	0.01
78	15.66	0.20	0.16	0.27	0.30	0.01	--	--	0.10	0.15	0.12	0.01	0.11	--	--	--
79	16.83	0.21	0.18	0.27	0.29	--	--	--	0.11	0.15	0.12	--	0.11	--	--	--
80	17.04	0.22	0.17	0.29	0.32	0.01	0.01	--	0.11	0.14	0.13	--	0.11	0.01	0.01	0.01
81	17.82	0.21	0.17	0.31	0.32	--	--	--	0.12	0.15	0.13	0.01	0.12	--	--	0.01
82	18.35	0.23	0.18	0.29	0.32	--	--	0.01	0.11	0.15	0.13	--	0.12	--	--	--
83	18.93	0.26	0.20	0.30	0.34	--	0.01	0.01	0.11	0.16	0.13	--	0.13	0.01	--	--
84	19.65	0.25	0.18	0.33	0.34	0.01	--	--	0.12	0.16	0.13	--	0.12	--	--	--
85	21.54	0.26	0.20	0.34	0.35	--	--	--	0.13	0.16	0.14	--	0.12	--	--	--
86	21.97	0.26	0.20	0.34	0.34	--	--	--	0.13	0.17	0.15	--	0.13	0.01	0.01	0.01
87	23.92	0.25	0.20	0.35	0.37	--	--	--	0.13	0.18	0.14	--	0.13	--	0.01	--
88	24.33	0.26	0.19	0.33	0.36	--	0.01	--	0.14	0.19	0.16	--	0.13	--	0.01	0.01
89	24.03	0.26	0.23	0.34	0.38	--	--	--	0.14	0.19	0.16	--	0.13	0.01	--	--
90	24.60	0.28	0.22	0.34	0.39	--	0.01	0.01	0.14	0.19	0.16	0.01	0.14	--	0.01	--
91	25.92	0.29	0.21	0.37	0.39	--	--	0.01	0.15	0.20	0.16	--	0.14	--	--	--
92	26.15	0.31	0.22	0.37	0.40	--	--	--	0.14	0.20	0.17	--	0.14	0.01	0.01	0.01
93	28.11	0.30	0.23	0.37	0.42	--	--	--	0.15	0.21	0.16	--	0.16	--	0.01	--
94	27.94	0.30	0.25	0.37	0.42	--	--	--	0.16	0.22	0.17	--	0.15	--	--	--
95	28.65	0.30	0.23	0.39	0.43	--	--	--	0.16	0.21	0.18	--	0.15	--	--	--
96	31.31	0.32	0.25	0.40	0.45	0.01	--	--	0.16	0.22	0.20	--	0.15	--	--	--
97	30.51	0.22	0.26	0.39	0.46	--	--	--	0.16	0.22	0.19	--	0.16	--	--	0.01

98	31.87	0.32	0.28	0.41	0.46	--	0.01	--	0.17	0.23	0.20	0.01	0.16	--	--
99	32.79	0.33	0.27	0.42	0.48	--	--	--	0.18	0.24	0.19	--	0.17	0.01	0.01
100	33.54	0.34	0.28	0.44	0.49	--	--	0.01	0.17	0.25	0.21	--	0.17	--	--

T A B L A 1

98. TABLA 2

Tiempos de procesamiento del producto de bloques, para bloques de orden 3 a 100 y diferentes porcentajes de elementos no nulos (bloques raros).

ORD	PORC	RALRAL	RALLE	RALFIL	RALCOL	RALDIA	LLERAL	FILRAL	COLRAL	DIARAL
10	10.-	--	--	--	--	--	0.01	--	--	--
10	20.-	0.01	0.01	--	--	--	0.01	--	--	0.01
10	40.-	0.01	0.02	0.01	0.01	--	0.02	--	--	--
10	50.-	0.02	0.02	--	--	--	0.01	--	--	--
10	70.-	0.03	0.03	--	--	--	0.02	0.01	--	--
10	80.-	0.04	0.02	0.01	--	0.01	0.02	0.01	0.01	--
10	85.-	0.03	--	--	--	--	--	--	0.01	0.01
10	90.-	0.03	0.03	--	0.01	--	0.03	--	0.01	--
10	95.-	0.04	--	--	--	--	--	--	0.01	--
10	96.-	0.04	0.04	0.01	--	0.01	0.04	0.02	--	0.01
10	98.-	0.04	0.04	--	0.01	0.01	0.03	--	0.01	0.01
10	100.-	0.04	0.03	0.01	--	--	0.04	0.01	--	--
20	10.-	0.04	0.03	0.02	--	--	0.03	--	--	--
20	20.-	0.06	0.05	0.02	0.01	--	0.06	0.01	0.01	--
20	40.-	0.11	0.11	0.01	--	0.01	0.11	0.01	0.01	0.01
20	50.-	0.14	0.14	0.02	0.01	0.01	0.13	0.01	0.02	0.01
20	70.-	0.20	0.18	0.02	0.02	0.02	0.19	0.02	0.02	0.02
20	80.-	0.22	0.21	0.02	0.02	0.01	0.23	0.02	0.03	0.01
20	85.-	0.23	--	--	--	--	--	--	0.02	0.02
20	90.-	0.26	0.24	0.02	0.02	0.02	0.23	0.02	0.02	0.02
20	95.-	0.26	--	--	--	--	--	--	0.03	0.02
20	96.-	0.26	0.25	0.03	0.02	0.03	0.25	0.02	0.03	0.02
20	98.-	0.29	0.26	0.02	0.02	0.02	0.27	0.02	0.02	0.01
20	100.-	0.27	0.26	0.02	0.03	0.02	0.26	0.02	0.03	0.02

50	95.-	4.17	--	--	--	--	--	--	0.17	0.10
50	96.-	4.28	3.86	0.15	0.12	0.13	4.09	0.13	0.17	0.11
50	98.-	4.30	3.87	0.17	0.13	0.13	4.18	0.13	0.17	0.11
50	100.-	4.43	3.97	0.16	0.13	0.14	4.24	0.13	0.19	0.11
60	10.-	0.81	0.69	0.11	0.02	0.02	0.80	0.02	0.02	0.02
60	20.-	1.57	1.30	0.12	0.04	0.05	1.55	0.04	0.06	0.04
60	40.-	3.15	2.56	0.14	0.08	0.08	3.05	0.08	0.11	0.07
60	50.-	3.96	3.35	0.16	0.09	0.10	3.82	0.10	0.13	0.08
60	70.-	5.58	4.63	0.19	0.13	0.13	5.49	0.13	0.18	0.11
60	80.-	6.43	5.34	0.22	0.15	0.16	6.26	0.15	0.21	0.13
60	85.-	6.87	--	--	--	--	--	--	0.22	0.14
60	90.-	7.33	6.01	0.22	0.17	0.16	6.99	0.16	0.23	0.14
60	95.-	7.86	--	--	--	--	--	--	0.25	0.15
60	96.-	7.87	6.43	0.23	0.18	0.18	7.58	0.17	0.25	0.15
60	98.-	8.10	6.54	0.23	0.18	0.18	7.72	0.18	0.26	0.15
60	100.-	8.16	6.71	0.23	0.18	0.19	7.90	0.18	0.25	0.16
70	10.-	--	1.03	0.02	0.03	0.03	1.29	0.02	0.04	0.02
70	20.-	--	2.06	0.16	0.05	0.05	2.47	0.05	0.08	0.05
70	40.-	--	4.08	0.21	0.10	0.11	4.87	0.10	0.15	0.09
70	50.-	--	5.30	0.09	0.13	0.13	6.05	0.13	0.18	0.11
70	70.-	--	7.22	0.26	0.18	0.18	8.42	0.18	0.25	0.15
70	80.-	--	8.38	0.29	0.20	0.21	9.64	0.21	0.28	0.18
70	85.-	--	--	--	--	--	--	--	0.30	0.18
70	90.-	--	9.46	0.30	0.23	0.24	10.88	0.23	0.32	0.19
70	95.-	--	--	--	--	--	--	--	0.37	0.20
70	96.-	--	10.29	0.31	0.25	0.26	11.74	0.24	0.35	0.20
70	98.-	--	10.22	0.30	0.25	0.26	12.07	0.24	0.34	0.21
70	100.-	--	10.85	0.32	0.25	0.25	12.25	0.25	0.36	0.21
80	10.-	--	1.54	0.19	0.03	0.04	2.01	0.04	0.05	0.03
80	20.-	--	3.04	0.22	0.07	0.07	3.80	0.07	0.10	0.05
80	40.-	--	6.07	0.28	0.14	0.14	7.61	0.14	0.19	0.11
80	50.-	--	7.58	0.30	0.16	0.17	9.44	0.18	0.23	0.14

80	70.-	--	10.59	0.34	0.24	0.27	14.47	0.24	0.32	0.20
80	80.-	--	12.19	0.39	0.26	0.31	14.98	0.26	0.37	0.21
80	85.-	--	--	--	--	--	--	--	0.39	0.23
80	90.-	--	13.96	0.38	0.30	0.31	18.07	0.30	0.42	0.25
80	95.-	--	--	--	--	--	--	--	0.46	0.26
80	96.-	--	14.83	0.41	0.33	0.32	19.36	0.32	0.43	0.27
80	98.-	--	15.59	0.41	0.33	0.33	19.33	0.32	0.46	0.27
80	100.-	--	15.48	0.42	0.33	0.34	19.47	0.33	0.47	0.28
90	10.-	--	2.27	0.04	0.04	0.05	2.98	0.05	0.06	0.04
90	20.-	--	4.49	0.29	0.09	0.08	5.90	0.09	0.13	0.07
90	40.-	--	8.93	0.27	0.16	0.17	10.85	0.17	0.23	0.14
90	50.-	--	10.66	0.24	0.20	0.21	13.37	0.21	0.31	0.17
90	70.-	--	14.85	0.44	0.30	0.30	18.77	0.29	0.45	0.24
90	80.-	--	17.12	0.46	0.35	0.34	21.51	0.32	0.47	0.28
90	85.-	--	--	--	--	--	--	--	0.51	0.30
90	90.-	--	19.39	0.52	0.37	0.38	24.69	0.37	0.53	0.31
90	95.-	--	--	--	--	--	--	--	0.56	0.34
90	96.-	--	21.61	0.53	0.39	0.41	26.59	0.40	0.56	0.32
90	98.-	--	22.03	0.54	0.40	0.42	27.08	0.41	0.56	0.34
90	100.-	--	22.49	0.45	0.42	0.42	27.55	0.40	0.62	0.35
100	10.-	4.01	3.06	0.31	0.05	0.05	3.83	0.05	0.07	0.04
100	20.-	7.77	6.00	0.34	0.10	0.11	7.64	0.11	0.15	0.08
100	40.-	15.40	11.86	0.44	0.20	0.22	14.97	0.20	0.29	0.17
100	50.-	19.15	14.76	0.48	0.26	0.27	18.81	0.26	0.36	0.21
100	70.-	27.55	21.57	0.54	0.38	0.36	26.23	0.36	0.51	0.30
100	80.-	32.18	23.61	0.61	0.42	0.43	30.77	0.41	0.59	0.34
100	85.-	--	--	--	--	--	--	--	0.61	0.37
100	90.-	37.11	26.74	0.63	0.45	0.46	34.24	0.46	0.64	0.39
100	95.-	--	--	--	--	--	--	--	0.68	0.40
100	96.-	39.98	28.67	0.63	0.48	0.50	36.03	0.51	0.68	0.42
100	98.-	40.14	29.34	0.63	0.50	0.53	36.23	0.51	0.71	0.42
100	100.-	41.77	30.05	0.65	0.51	0.53	37.50	0.52	0.72	0.44

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] DELAHAYE, C. y SANCHEZ, L.:Un programa de computación para la optimización del producto de matrices. IN.MA.SJ., Informe Interno, San Juan 1985.
- [2] PIZZANETZKY, S.: Sparse Matrix Technology Academic Press. (1984).
- [3] RETAMALES, H.E., DELAHAYE, C. y SANCHEZ, L.:Matrices Ralas en la solución de grandes sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. (en preparación) IN.MA.SJ., San Juan - Argentina.
- [4] RETAMALES, H.E.: Matrices Ralas, aplicación al estudio de la estabilidad de funcionamiento de turbinas hidráulicas y a las redes de distribución de agua. CONAGUA 85'. Mendoza - Argentina.
- [5] RETAMALES, H.E.:Matrices Ralas y la representación de redes. Cuaderno N° 1- Serie "B" del IN.MA.SJ. (1985) SAN Juan -Argentina.