

ANÁLISE DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CILINDRO GIRANTE

José Carlos A. Amarante
Jayme P. de Gouveia

Instituto Militar de Engenharia - Rio de Janeiro -
Brasil

RESUMO

O escoamento permanente, laminar, incompressível e plano, em torno de um cilindro girante é analisado mediante a solução numérica das equações completas de Navier-Stokes. Utiliza-se o método dos resíduos ponderados de Galerkin, resolvido pelo processo dos elementos finitos e baseado no modelo de Taylor e Hughes.

São estabelecidos os campos de pressão e de vorticidade em torno da superfície cilíndrica e são calculados os coeficientes de sustentação de Magnus e de arrasto para um Número de Reynolds, com base no raio do cilindro, de 10 e velocidades tangenciais adimensionalizadas em relação à velocidade da corrente livre de 0.0, 0.5 e 1.0. O desbalanceamento do campo de pressão em torno do cilindro girante, devido à ação cisalhante da superfície cilíndrica, é o principal responsável pelo surgimento da força de sustentação de Magnus.

ABSTRACT

The two-dimensional, incompressible, laminar and steady flow past a rotating cylinder is analyzed through the numerical solution of the full Navier-Stokes equations. The Galerkin weighted residuals approach, solved by the finite element method and based on the Taylor and Hughes Model, is used to determine the pressure, the velocity and the vorticity field.

The Magnus lift coefficient and the drag coefficient are evaluated for a flow with Reynolds number, based on the cylinder radius, of 10 and for tangential speeds, nondimensionalised with respect to the free-stream velocity, of 0.0, 0.5 and 1.0. The unbalancing of the pressure field, caused by the friction of the rotating cylinder surface on the viscous fluid, is the main responsible for the resulting Magnus lift.

INTRODUÇÃO

O estudo do escoamento em torno de um cilindro girante é de fundamental importância em Aerodinâmica Aplicada e em Mecânica dos Fluidos, devido ao aparecimento de uma força de sustentação normal à direção da velocidade da corrente livre, conhecida como força de Magnus [1]. No terreno prático, o efeito Magnus encontra aplicação no aproveitamento da energia eólica em cataventos [2] e em propulsão de barcos [3]. A Balística Externa é também uma área interessada na ação aerodinâmica do fenômeno, uma vez que por sua causa os projetis estabilizados giroscopicamente sofrem desvios de trajetória em relação ao plano vertical de voo [4].

As pesquisas teóricas sobre o efeito de Magnus começaram no século passado com o estudo intitulado "On the Irregular Flight of a Tennis Ball" realizado por Lord Rayleigh [5], utilizando um modelo matemático baseado na teoria do escoamento potencial em torno de um cilindro com circulação. Entretanto, os avanços teóricos relacionados ao fenômeno foram muito lentos por ser a força de Magnus resultante do desbalanceamento dos campos de pressão e de tensão cisalhante em torno da superfície do corpo. Esse efeito é consequência da ação de fricção da superfície em movimento circular sobre o fluido viscoso em escoamento. Por essa razão, uma análise apropriada do problema requer o emprego das equações de Navier-Stokes, de difícil solução analítica.

O advento dos computadores de grande capacidade possibilitou a utilização de técnicas numéricas na solução de problemas complexos governados por equações diferenciais não lineares, como as de Navier-Stokes. Só recentemente, foram realizados estudos computacionais sobre o efeito Magnus em projetis, mediante o emprego de diferenças finitas para a solução das equações parabolizadas de Navier-Stokes em camadas finas [6].

Por outro lado, no campo experimental, o fenômeno vem sendo exaustivamente pesquisado [2,5] desde que Magnus, em 1851, realizou as primeiras investigações práticas sobre o desvio da trajetória de corpos estabilizados por rotação.

Neste trabalho, o escoamento em torno de um cilindro girante é analisado mediante a solução numérica das equações de Navier-Stokes. Utiliza-se o método dos resíduos ponderados de Galerkin, resolvido pelo processo dos elementos finitos e baseado no modelo de Taylor e Hughes [7].

MODELO FÍSICO

O escoamento laminar, plano, incompressível e em regime permanente em torno de um cilindro girante (figura 1)

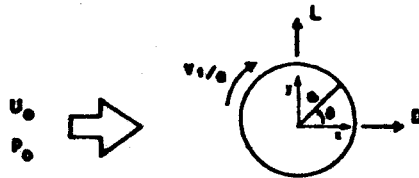


Figura 1 - Efeito Magnus em cilindro girante

é inteiramente descrito pelas equações da continuidade e de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_a} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_a} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

onde u e v são as componentes do vetor velocidade ao longo das coordenadas cartesianas x e y , respectivamente. A pressão p e o número de Reynolds, baseado no raio a do cilindro, é $R_a = a U_0 / \nu$, onde ν é a viscosidade cinemática do fluido e U_0 a velocidade da corrente livre. Por conveniência, todas as variáveis estão adimensionalizadas.

As condições de contorno para o problema são:

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} : u_0(x,y) = \frac{u_0^*(x,y)}{U_0} = 1.0 ; v(x,y) = 0 \quad (4a)$$

$$p_0(x,y) = \frac{p_0^*(x,y)}{\rho U_0^2} = 1.0$$

$$ii) \lim_{y \rightarrow \pm \infty} : u(x,y) = \frac{u_0^*(x,y)}{U_0} = 1.0 ; v(x,y) = 0 \quad (4b)$$

$$p(x,y) = \frac{p_0^*(x,y)}{\rho U_0^2} = 1.0$$

$$iii) (x^2 + y^2)^{1/2} = 1 : u_a(x,y) = v_T \cos \theta ; v_a(x,y) = v_T \sin \theta \quad (4c)$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow \infty} : \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0.0 \quad (4d)$$

onde p_0 é a pressão uniforme da corrente livre, ρ a massa específica do fluido, v_1/a a velocidade de rotação do cilindro e o subscrito a denota um valor calculado na superfície cilíndrica.

O campo de vorticidade é dado por:

$$\Omega = \frac{\Omega^* a}{U_1} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

O coeficiente de pressão

$$C_p = \frac{p^* - p_0}{(1/2) \rho U_1^2} \quad (6)$$

onde p^* é a pressão termodinâmica e $(1/2) \rho U_1^2$ a pressão dinâmica é calculado por:

$$C_p = 2 (p - p_0) \quad (7)$$

O vetor tensão, $\bar{\sigma}_a$, que atua em cada ponto da superfície do cilindro, é dado por:

$$\bar{\sigma}_a = (\sigma_{xx} \cos \theta + \sigma_{yx} \sin \theta) \bar{e}_y + (\sigma_{xy} \cos \theta + \sigma_{yy} \sin \theta) \bar{e}_y \quad (8)$$

onde σ_{ij} é o tensor tensão para escoamentos incompressíveis

$$\sigma_{ij} = -p_a \delta_{ij} + \frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

e δ_{ij} é o delta de Kronecker. A substituição de σ_{ij} na equação do vetor tensão permite a identificação das contribuições da pressão e da viscosidade na força total de superfície:

$$\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_{ap} + \bar{\sigma}_{av} \quad (10)$$

O coeficiente de arrasto, definido por $C_D = D/(1/2) \rho U_1^2 a$, onde D é a força de arrasto, pode ser obtido pela integração do componente $-x$ adimensional do vetor tensão ao longo da superfície cilíndrica:

$$C_D = C_{Dp} + C_{Dv} \quad (11)$$

onde

$$C_{Dp} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-C_{pa} \cos \theta) d\theta \quad (12)$$

$$C_{Dv} = \frac{1}{R_a} \int_0^{2\pi} \left(2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_a \cos\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_a \sin\theta \right) d\theta \quad (13)$$

e C_{Dp} é o coeficiente de arrasto de pressão e C_{Dv} o coeficiente de arrasto viscoso.

De forma idêntica, o coeficiente de sustentação de Magnus, definido por $C_L = L/(1/2)\rho U_a^2 a$, onde L é a força de sustentação, é obtido pela integração do componente -y adimensional do vetor tensão ao longo da superfície cilíndrica:

$$C_L = C_{Lp} + C_{Lv} \quad (14)$$

onde

$$C_{Lp} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-C_{pa} \sin\theta) d\theta \quad (15)$$

$$C_{Lv} = \frac{1}{R_a} \int_0^{2\pi} \left(2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_a \sin\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_a \cos\theta \right) d\theta \quad (16)$$

e C_{Lp} é o coeficiente de sustentação de pressão e C_{Lv} o coeficiente de sustentação viscoso.

MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico, baseado no trabalho de Taylor e Hughes [7], é resolvido com a técnica dos elementos finitos aplicada ao método dos resíduos ponderados de Galerkin.

Basicamente, a idéia é discretizar um setor importante do domínio de interesse em um número finito de elementos parabólicos isoparamétricos (figura 2). Em seguida, supor que cada variável no interior de um elemento seja definida em termos de valores discretos na fronteira do elemento,

$$x = \sum_{j=1}^i N_j x_j = N_j x_j \quad (17)$$

$$y = \sum_{j=1}^i N_j y_j = N_j y_j \quad (18)$$

$$u = \sum_{j=1}^i N_j u_j = N_j u_j \quad (19)$$

$$v = \sum_{j=1}^i N_j v_j = N_j v_j \quad (20)$$

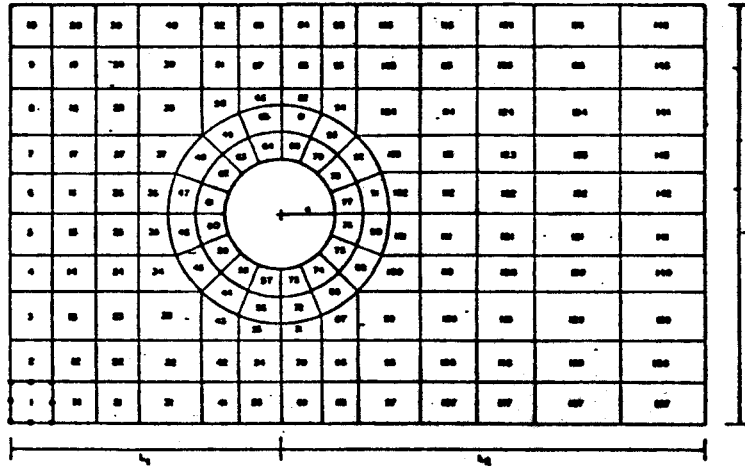


Figura 2 - Discretização do domínio de escoamento

onde N_i são funções de forma escritas em termos de coordenadas locais (ξ, η) associadas com os oito nós considerados na fronteira do elemento. A notação de Einstein é utilizada para simbolizar um somatório quando dois índices são repetidos. A variação da pressão é calculada por funções de forma lineares M_j [8]:

$$p = \sum_{l=1}^8 M_l p_l = M_l p_l \quad (21)$$

O método de Galerkin é extensamente empregado [9] na solução de problemas por elementos finitos. A aplicação [7] desse método de resíduos ponderados ao sistema de governo (1)-(3) leva a

$$\sum_1^{n^e} \int_{A^e} M_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) dA^e = 0 \quad (22)$$

$$\sum_1^{n^e} \left[\int_{A^e} \left(N_i N_k u_k \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + N_i N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j + N_i \frac{\partial M_l}{\partial x} p_l + \frac{1}{R_a} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) \right) dA^e \right]$$

$$-\int_{\Gamma^e} \frac{1}{R_a} N_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^{n^e} \left[\int_{A^e} \left(N_i N_k \bar{u}_k \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j + N_i N_k v_k \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j + N_i \frac{\partial M_\ell}{\partial y} P_\ell + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{R_a} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) \right) dA^e - \int_{\Gamma} \frac{1}{R_a} N_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial n} \right) d\Gamma \right] = 0 \quad (24)$$

onde n^e denota o número de elementos, Γ as fronteiras regidas por condições de contorno naturais e A^e a área do elemento. Os índices valem $\ell = 1...4$; $j = 1...8$; $k = 1...8$; $e = 1... n^e$, onde n^e é o número total de nós.

O sistema de equações acima é expresso na forma matricial [7] por

$$A \Delta = R \quad (25)$$

onde A é a matriz global em banda cujos elementos são da forma

$$a_{ij} = \sum_{i=1}^{n^e} \int_{A^e} \begin{bmatrix} N_i N_k \bar{u}_k \frac{\partial N_j}{\partial y} & N_i \frac{\partial M_\ell}{\partial x} & 0 \\ + \frac{1}{R_a} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) & & \\ M_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & M_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ 0 & N_i \frac{\partial M_\ell}{\partial y} & N_i N_k \bar{u}_k \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i N_k \bar{u}_k \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ & & + \frac{1}{R_a} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \end{bmatrix} dA^e \quad (26)$$

Δ é o vetor solução cujos elementos são da forma

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ P_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (27)$$

e R é o vetor referente às condições de contorno naturais (de Newman)

$$r_i = \frac{n^e}{\Sigma} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \frac{1}{R-E} N_i \left\{ \left(\frac{\partial u_j}{\partial n} \right)^{\Gamma} \right\} \\ 0 \\ \frac{1}{R-E} N_i \left\{ \left(\frac{\partial v_j}{\partial n} \right)^{\Gamma} \right\} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (28)$$

As condições de fronteira essenciais (de Dirichlet) são substituídas diretamente na equação (25) reduzindo o número de incógnitas do problema. Os componentes a_{ij} apresentam termos $N_i N_k \bar{u}_k \frac{\partial N_j}{\partial x}$ que resultam em contribuição não simétrica para a matriz global. A técnica mais adequada para a solução desse tipo de equação matricial é adotar um processo iterativo de atualização da variável responsável pela não linearidade e empregar o método de eliminação frontal de Irons [7]. Esse método utiliza o pivoteamento diagonal e é baseado na Eliminação Direta de Gauss.

A vorticidade, equação (5), pode ser calculada em cada nó i por

$$\Omega_i = \sum_{j=1}^{n-8} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right)_i v_j - \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right)_i u_j \quad (29)$$

O coeficiente de pressão, equação (7), é avaliado em cada nó i por

$$C_{p_i} = 2 (p_i - p_0) \quad (30)$$

Os coeficientes de arrasto de pressão e viscoso são calculados por integração numérica, utilizando o método Spline, por intermédio das seguintes equações:

$$C_{Dp} = - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_p} W_k(\theta_k) C_p(a, \theta_k) \cos \theta_k \quad (31)$$

$$C_{Dv} = \frac{1}{R_a} \sum_{k=1}^{m_v} W_k(\theta_k) \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x}(a, \theta_k) \cos \theta_k + \left[\frac{\partial u}{\partial y}(a, \theta_k) + \frac{\partial v}{\partial x}(a, \theta_k) \right] \sin \theta_k \right\} \quad (32)$$

onde $W(\theta_k)$ são funções peso, m_p é o número de pontos com dados de pressão para integração ao longo da superfície do cilindro, entre 0 e 2π , e m_v o número de pontos com dados de velocidade.

De forma similar, são obtidos os coeficientes de sustentação de Magnus de pressão e viscoso:

$$C_{Lp} = -\frac{1}{Z} \sum_{k=1}^{m_p} W_k(\theta_k) C_p(a, \theta_k) \text{sen } \theta_k \quad (33)$$

$$C_{Lv} = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{m_v} W_k(\theta_k) \left\{ 2 \frac{\partial v}{\partial y}(a, \theta_k) \text{sen} \theta_k + \left[\frac{\partial u}{\partial y}(a, \theta_k) + \frac{\partial v}{\partial x}(a, \theta_k) \right] \text{cos} \theta_k \right\} \quad (34)$$

O processo iterativo estabelece a convergência com base no erro relativo das variáveis primitivas calculadas a cada etapa de integração (n+1) e em cada nó i da malha computacional:

$$\left| \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{u_i^n} \right| < 0.1, \quad \left| \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{v_i^{n+1}} \right| < 0.1 \text{ e } \left| \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{p_i^{n+1}} \right| < 0.1 \quad (35)$$

RESULTADOS

O estudo considera um escoamento com as seguintes características:

- Número de Reynolds, baseado no raio do cilindro: $R_a = 10$;
- Velocidade adimensional da corrente livre: $u_0 = 1.0$;
- Pressão adimensional da corrente livre: $p_0 = 1.0$;
- Velocidades tangenciais adimensionais da superfície cilíndrica: $v_T = 0.0$; 0.5 e 1.0 .

O domínio de escoamento discretizado (figura 2) consiste de 146 elementos, 500 nós e 1177 incógnitas. As dimensões da malha computacional envolvem as seguintes grandezas:

- Raio adimensional do cilindro: $a = 1.0$;
- Distância adimensional a montante da origem do sistema de eixos ortogonais, localizada no eixo longitudinal do cilindro: $L_1 = 9.0$;
- Distância adimensional a jusante da origem dos eixos: $L_2 = 19.0$;
- Largura adimensional do domínio: $L_3 = 40.0$;

A variação da vorticidade na superfície cilíndrica está

mostrada na figura 3. No caso do cilindro parado, são apresentados também os resultados de Dennis e Chang [10], baseados no método das diferenças finitas, e de Furtado [11], obtido com o método dos elementos finitos, ambos aplicados à formulação vorticidade-função de corrente. Uma análise da figura permite observar que a distribuição de vorticidade calculada neste trabalho se aproxima muito daquela computada por Dennis e Chang [10].

É de se notar que o aumento da velocidade tangencial tem uma ação mais pronunciada sobre a vorticidade superficial na parte do cilindro a jusante do escoamento. A vorticidade em $\theta = \pi$ permanece nula e em $\theta = 0$ ela cresce: para v_T nulo, Ω é nulo; para v_T igual a 0.5, Ω é 0.81; e para v_T igual a 1.0, Ω é 1.70.

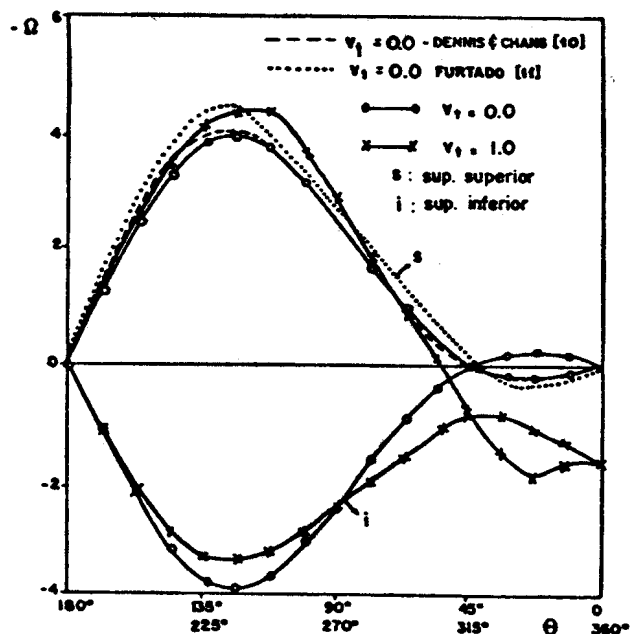


Figura 3 - Distribuição de vorticidade na superfície do cilindro.

As curvas do coeficiente de pressão na superfície do cilindro estão mostradas na figura 4. No caso do cilindro parado, os resultados são comparados com os obtidos por Dennis e Chang [10] e apresentam uma razoável correspondência.

Com o aumento da velocidade tangencial da superfície cilíndrica, observa-se que a pressão na parte inferior do cilindro ($\pi < \theta < 2\pi$) se torna maior do que a pressão na parte

superior ($0 \leq \theta \leq \pi$). Esse desbalanceamento crescente de pressão é a principal causa do efeito de Magnus e está refletido no valor do coeficiente de sustentação de pressão. Nota-se também que o ponto máximo do coeficiente de pressão, indicativo do ponto de estagnação da face de ataque do cilindro, se desloca para baixo atingindo para v_T igual a 0.5 θ_e aproximadamente igual a 191° e para v_T igual a 1.0 θ_e aproximadamente igual a 202° .

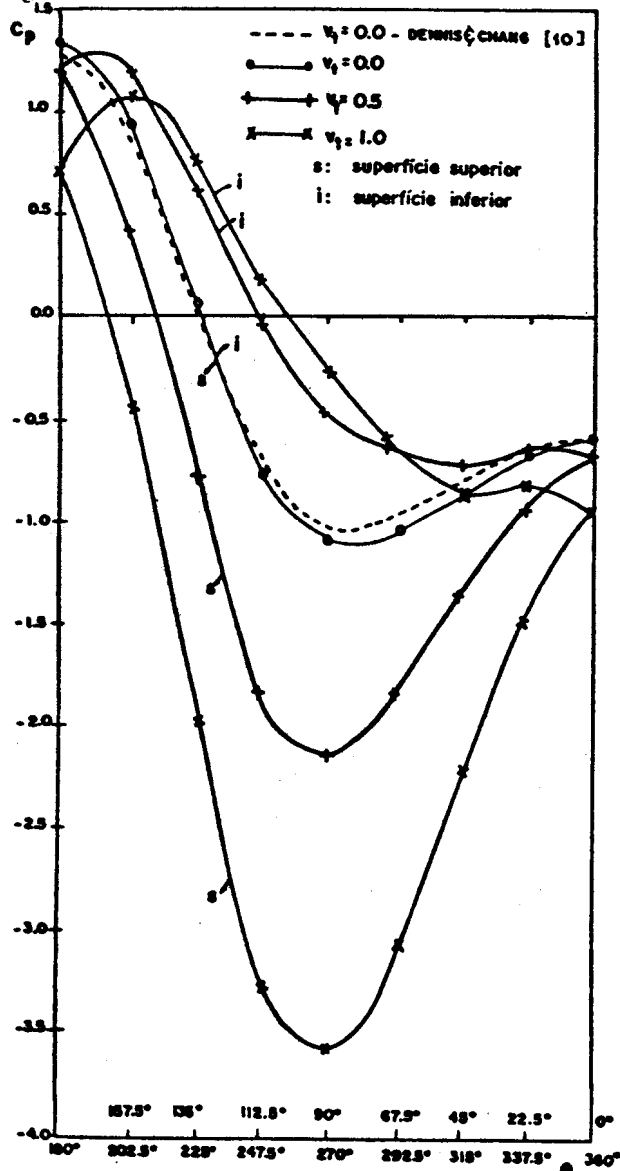


Figura 4 - Distribuição do coeficiente de pressão na superfície

De maneira idêntica, o máximo local do ponto de fuga do cilindro, que no caso estacionário se situa em $\theta = 360^\circ$, se desloca para baixo a medida que v_T cresce. Entretanto, a estação onde ocorre esse máximo relativo não fica nítida em decorrência da discretização relativamente grosseira adotada para o cálculo de pressão. Finalmente, o coeficiente de pressão mínimo permanece estacionário na região de $\theta = 90^\circ$, correspondente à região de velocidade potencial máxima.

A figura 5 apresenta as curvas dos coeficientes de arrasto de pressão, viscoso e total como função de velocidade tangencial cilíndrica, para $R_a = 10$. Para efeito de comparação de resultados, a figura também mostra os coeficientes de arrasto calculados por Dennis e Chang [10].

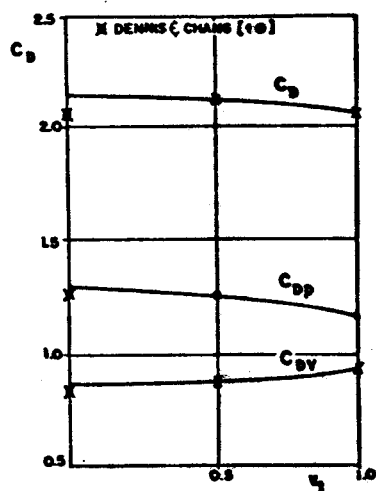


Figura 5 - Coeficiente de Arrasto

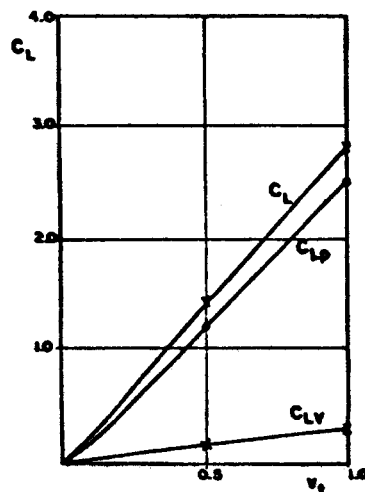


Figura 6 - Coeficiente de Sustentação de Magnus

A interferência da rotação do cilindro no coeficiente de arrasto é muito pequena. O coeficiente total, que para $v_T = 0.0$ é igual a 2.141, atinge 2.111 para $v_T = 0.5$ e 2.052 para $v_T = 1.0$. Essa queda de cerca de 4.2% no C_{Dt} é motivada por uma perda no coeficiente de arrasto de pressão superior ao ganho no coeficiente de arrasto viscoso.

A figura 6 mostra a variação do coeficiente de sustentação de Magnus com a velocidade tangencial da superfície cilíndrica, para $R_a = 10$. Diversamente do que ocorre com o arrasto, a sustentação é muito sensível à rotação do cilin-

dro. A principal contribuição advem do coeficiente de sustentação de pressão com cerca de 89% enquanto que as ações viscosas contribuem com apenas 11% para o efeito de Magnus.

A tabela 1 apresenta os valores calculados dos coeficientes de arrasto e de sustentação nos diversos casos de estudo.

v_T	Arrasto			Sustentação		
	C_{Dp}	C_{Dv}	C_{Dt}	C_{Lp}	C_{Lv}	C_{Lt}
0.0	1.285	0.856	2.141	0.0	0.0	0.0
0.5	1.246	0.865	2.111	0.221	0.151	1.372
1.0	1.160	0.892	2.052	2.453	0.294	2.747

Tabela 1 - Coeficientes de Arrasto e de Sustentação, para $R_a = 10$.

CONCLUSÃO

Os resultados obtidos neste trabalho são preliminares e espelham o andamento dos primeiros passos da pesquisa teórica realizada no Instituto Militar de Engenharia com o objetivo de melhor compreender o efeito de Magnus. No atual estágio, as principais conclusões são:

- a) o método dos elementos finitos possibilita a análise do efeito Magnus, mediante a solução das equações de Navier-Stokes na sua forma completa e a obtenção dos campos de velocidade, de pressão e de vorticidade;
- b) a análise realizada envolve tão somente um Número de Reynolds e o escoamento laminar. Entretanto, investigações subsequentes estão sendo conduzidas para avaliar o fenômeno numa ampla varredura de números de Reynolds, envolvendo inclusive o regime turbulento;
- c) no caso estudado, para $R_a = 10$, o desbalanceamento do campo de pressão em torno do cilindro girante, devido à ação cisalhante da superfície cilíndrica em movimento circular, é o principal responsável pelo surgimento da força de sustentação de Magnus. O coeficiente de sustentação é muito sensível à variação da velocidade tangencial da superfície cilíndrica e
- d) no caso estudado, para $R_a = 10$, o coeficiente de arrasto diminui suavemente com o aumento de rotação do cilindro.

BIBLIOGRAFIA

1. Schlichting, H., "Boundary-Layer Theory", 6^a ed., McGraw-Hill, 1968.
2. Corrêa, C.J., "Estudo Experimental do Efeito Magnus", Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 1985.
3. Anderson Jr, J.D., "Fundamentals of Aerodynamics", McGraw Hill, 1984.
4. Sturek, W.B., e Mylin, D.C., "Computational Study of the Magnus Effect on Boattailed Shell", AIAA Journal, Vol.20, Nr. 10, Oct 82, pg 1462.
5. Swansn, W.M., "The Magnus Effect: A Summary of Investigation to Date", Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, Set 1961, pg 461-470.
6. Sturek, W.B., e Schiff, L.B., "Computations of the Magnus Effect fro Slender Bodies in Supersonic Flow", Proceedings of AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Aug 1980.
7. Taylor, C., e Hughes, T.G., "Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations", Pineridge Press, 1981.
8. Hood, P. e Taylor, C., "Navier-Stokes Equations using mixed interpolation", Proc. 1st Int. Conf. on F.E.M. in Flow Problems, Swansea, 1974.
9. Chung, T.J., "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics", McGraw-Hill, 1978.
10. Dennis, S.C.R. e Chang, G.Z., "Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 1.0", J. Fluid Mech., part 3, 1970, pg 471-489.
11. Furtado, F.C., "Aplicação do Método dos Elementos Finitos às Equações de Navier-Stokes", Tese de Mestrado, COPPE - UFRJ, 1984.