EL PROBLEMA DE STEFAN A TRAVES DE LA TEORIA DE LAS INECUACIONES VARIACIONALES

Domingo A. TARZIA
PROMAR (CONICET-U.N.R.),
Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas e Ing.,
Av. Pellegrini 250,
(2000) Rosario - Argentina.

RESUMEN

Esta conferencia describe el problema de Stefan (problemas de conducción del calor con cambio de fase) a través de las inecuaciones variacionales elípticas (caso estacionario) y parabólicas (caso de evolución) y sus aproximaciones numéricas.

ABSTRACT

This lecture describes the Stefan problem (heat conduction problems with change of phase) through eliptic (steady-state case) and parabolic (evolution case) varational inequalities and their numerical approximations.

I. INTRODUCCION

Las inecuaciones variacionales (I.V.) son un conjunto de desigualdades o de igualdades que reemplazan las ecuaciones de Euler-Lagrange del cálculo de variaciones clásico cuando éstas no son más válidas. Estas I.V. aparecen en numerosos problemas, a saber: cálculo de variaciones con restricciones, mecánica del continuo (problema del obstáculo, torsión elasto-plástica, fluido de Bingham, dique poroso, cambio de fase), teoría de control (tiempo final óptimo, sistemas a parámetros distribuidos), programación matemática, física del plasma, etc.

La teoría de las I.V. comenzó a cobrar importancia con el trabajo [Sta1] y sobre todo con [LiSt].

A partir de ese momento se hicieron nemerosos trabajos sobre el tema, entre los cuales merecen destacarse diferentes aplicaciones en la teoría del control [Ba1, BeLi1, BeLi2, Li1, Li2], en la mecánica y la física [DuLi, Li3], en el análisis numérico [Ci, Gl, GlLiTr], en problemas de frontera libre [BaCa, ElOc, Fri1, Ta1, Ta2], y aquellos de fundamentación matemática [Br, KiSt, LeSt, St2].

La teoría de las I.V., que venía cumpliendo un papel importante, cobró una mayor relevancia en el año 1971 al resolverse, previo cambio de función incógnita, un problema no-trivial de frontera libre en Hidráulica, conocido en la literatura como el problema del dique poroso [Ba1, Ba2].

Con respecto al problema de Stefan (conducción del calor con cambio de fase), la teoría de las I.V. fue aplicada en 1973 al problema a una fase en [Du1, Du2], y posteriormente al de dos fases en [Du3, Du4, Fre1, Fre2, Pa1, Ta3], y en [Ma1] para el caso unidimensional. A partir de ese momento se realizaron numerosos trabajos sobre la teoría de las I.V. aplicados al problema de Stefan, ya sea desde un punto de vista teórico, numérico o de las aplicaciones; por ejemplo se han realizado los siguientes congresos [AlCoHo, BoDaFr, FaPr, Fu, GoHo, Ho, Ma2, OcHo, Ta6, WiSoBo], libros [Ca, Cr, ElOc, Fri, Je1, KiSt, Ru] y trabajos de revisión con una extensa bibliografía [Cry, Ma3, Pr, Ta5, WiSoTr]. Estos trabajos pueden ser utilizados para obtener información general sobre el tema.

A continuación analizaremos suscintamente el problema de Stefan multidimensional a una y dos fases, el caso estacionario correspondiente al de dos fases y algunas de sus aproximaciones numéricas.

II. PROBLEMA DE STEFAN MULTIDIMENSIONAL A UNA FASE

Se considerará el trabajo [Du1, Du2] en el cual se estudia un bloque de hielo a 0 C que ocupa el dominio acotado $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ con frontera $\Gamma=\partial\Omega$ regular. Se supone que Γ está compuesta de tres porciones Γ_1, Γ_2 y Γ_3 sin puntos en común. Se supone además que Γ_1 y Γ_3 no tienen frontera común y que Γ_1 tiene una medida de superficie positiva ($\operatorname{med}(\Gamma_1)>0$).

El problema consiste en hallar la evolución del bloque de hielo cuando la frontera Γ_2 es una pared impermeable al calor, Γ_3 es mantenida a 0 C y sobre Γ_1 existe un flujo de calor del tipo Ley de Newton (con coeficiente de transferencia de calor α y temperatura exterior $\theta_1>0$).

Se supone que todos los coeficientes térmicos son iguales a la unidad y se designa con $\mathcal{S}(t)$ a la superficie de separación de las fases sólida (a temperatura 0 C) y líquida (a temperatura $\theta>0$), conocida como la frontera libre del problema de fusión en análisis.

Si se supone, por monotonía del problema planteado, que la frontera libre está definida por la ecuación

$$t=\ell(x) \qquad (x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3) \tag{1}$$

entonces el problema consiste en hallar $\ell=\ell(x)$, $T>0$ y $\theta=\theta(x,t)$ con $x\in\Omega$ y $t\in(0,T)$ de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{i)} & \dfrac{\partial\theta}{\partial t}-\Delta\theta=0 & , & t>\ell(x) \\ \text{ii)} & \theta\equiv 0 & , & t\leq\ell(x) \\ \text{iii)} & -\nabla\theta.\nabla\ell=1 & , & x=\ell(x) \\ \text{iv)} & -\left.\dfrac{\partial\theta}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=\alpha(\theta-\theta_1) & , & \text{v)}\quad \left.\dfrac{\partial\theta}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=0 \\ \text{vi)} & \left.\theta\right|_{\Gamma_3}=0 & , & \text{vii)}\quad \theta(x,0)=0 \quad , \quad x\in\Omega. \end{array}\right. \tag{2}$$

Si se introduce la nueva función incógnita $u=u(x,t)$, definida de la siguiente manera:

$$u(x,t)=\left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\int_{\ell(x)}^{t}\theta(x,s)\,ds & \text{si} & t>\ell(x) \\ 0 & \text{si} & t\leq\ell(x) \end{array}\right. \tag{3}$$

el problema (2) se transforma en el siguiente

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{i)} & \dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=-1 & , & t>\ell(x) \\ \text{ii)} & u\equiv 0 & , & t<\ell(x) \\ \text{iii)} & u=0 \quad , \quad \nabla u=0 & , & t=\ell(x) \\ \text{iv)} & -\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=\alpha(u-\theta_1 t) & , & \text{v)}\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=0 \\ \text{vi)} & \left.u\right|_{\Gamma_3}=0 & , & \text{vii)}\quad u(x,0)=0 \quad , \quad x\in\Omega. \end{array}\right. \tag{4}$$

Además, de (4), se deduce que la aplicación $u=u(t)$ (función de la variable espacial x) satisface la siguiente inecuación variacional parabólica:

$$\begin{cases} (u'(t),v-u(t)) + a_\alpha(u(t),v-u(t)) \geq L_\alpha(v-u(t)) \quad , \quad \forall v \in K, \\ u(t) \in K \quad , \quad u(0)=0 \end{cases} \tag{5}$$

donde

$$\begin{cases} V= \left\{ v \in H^1(\Omega) \ / \ v|_{\Gamma_2} = 0 \right\} \\ K= \left\{ v \in V \ / \ v \geq 0 \text{ en } \Omega \right\} \\ a_\alpha(u,v)= \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \alpha \int_{\Gamma_1} uv \, d\gamma \\ L_\alpha(v)= -\int_\Omega v \, dx + \alpha\theta_1 t \int_{\Gamma_1} v \, d\gamma \\ (u,v)= \int_\Omega uv \, dx \end{cases} \tag{6}$$

En [Du1,Du2] se estudia la existencia y unicidad de la solución de la inecuación variacional (5), como así también la convergencia cuando el parámetro α tiende a infinito, obteniéndose de este modo la solución del problema (2) reemplazando la condición (2iv) por

$$\theta|_{\Gamma_1} = \theta_1 \tag{2ivbis}$$

Puede notarse que el conjunto convexo que se obtiene en este caso depende del tiempo.

Esta formulación y algunas de sus generalizaciones han sido estudiadas desde un punto de vista teórico en [Ca, CaFr, DiSh, FrKi1, Ga, Li4-5, Ro2-Ro4] y desde el punto de vista de su cálculo o análisis numérico en [El1, Fe1, Je1, Je2, OdKi, PiVe, Sa3]. Además, se han realizado aplicaciones al problema de la colada continua (solidificación de metales les) [Br1, Br2, ChRo, Ro1-Ro3, Ro6], a la teoría de la homogeneización [BoDa, Da3, Li5, Li6, Ro5], a la teoría cuasiestacionaria (Hele-Shaw flow y electrochemical machinig) [El1, El3, ElJa2] con su correspondiente análisis numérico [El2, ElJa1, ElJa3], y a la teoría de control óptimo [Ba 2, MoSa, Sa3, Sa4, Sa6].

Con respecto al caso unidimensional del problema de Stefan a una fase pueden mencionarse desde un punto de vista teórico [Co, Fri2, Ga, Ma1, Sa2, Sa5, Ya], del cálculo o análisis numérico [Dj, KaSa, Ni-Ni6, Sa1, Sa2, Sa5], del control óptimo [Sa1, Sa5]. Por otra parte, el problema es estudiado a través de una inecuación cuasi-variacional en [Fri3, FrKi2].

Se considerará a continuación el análisis numérico del Problema de Stefan multidimensional a una fase siguiendo [Fe1]:

$$\begin{cases} (u',v-u) + a(u,v-u) \geq (f,v-u) \quad , \quad \forall v \in K(t), \\ u=u(t) \in K(t) \quad , \quad u(0)=0 \end{cases} \tag{7}$$

donde

$$\begin{cases} V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ / \ v|_{\Gamma_2} = 0 \right\} \\ K(t) = \left\{ v \in V \ / \ v \geq 0 \text{ en } \Omega, \ v|_{\Gamma_1} = \psi(x,t) \right\} \\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx \quad , \quad (u,v) = \int_\Omega uv \, dx \quad , \quad f \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{8}$$

Si se penaliza la condición de Dirichlet sobre Γ_1 se obtiene la siguiente inecuación variacional:

$$\begin{cases} (u_\varepsilon', v-u_\varepsilon) + a_\varepsilon(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) \geq \langle f_\varepsilon, v-u_\varepsilon \rangle \quad , \quad \forall v \in K_0 \\ u_\varepsilon = u_\varepsilon(t) \in K_0 \quad , \quad u_\varepsilon(0)=0 \end{cases} \tag{9}$$

donde

$$\begin{cases} K_0 = \left\{ v \in V \ / \ v \geq 0 \text{ en } \Omega \right\} \quad , \\ a_\varepsilon(u,v) = a(u,v) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_1} uv \, d\gamma \quad , \\ \langle f_\varepsilon, v \rangle = (f,v) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_1} \psi v \, d\gamma \quad , \end{cases} \tag{10}$$

obteniéndose que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||u_\varepsilon - u||_{L^2(0,T;V)} = 0 \tag{11}$$

Para hallar la solución de la inecuación variacional (9) puede utilizarse la metodología dada en [GlLiTr]: diferencias finitas en la variable tiempo $t \in [0,T]$ y elementos finitos en las variables espaciales $x=(x_1,x_2,x_3) \in \Omega$.

El intervalo $[0,T]$ se divide en N sub-intervalos de amplitud k y el conjunto Ω se triangulariza $(T \in \tau_h)$ con elementos finitos regulares, afín equivalentes de clase C^0 con parámetro h, obteniéndose un conjunto V_h de dimensión finita que aproxima a V. Sea

$$K_h = \left\{ v_h \in V_h \ / \ v_h(b) \geq 0, \ \forall b \text{ nodo de la triangulación} \right\} \tag{12}$$

el conjunto que aproxima a K.

Si la función $u=u(x,t)$ se aproxima por

$$\left\{\begin{array}{l} u_{h,k}(x,t)=\sum_{i=0}^{N-1} u_h^i(x)\ \chi_k^i(t) \quad , \quad u_h^i \in V_h \ , \\ \chi_k^i \ : \text{función característica de } [ik,(i+1)k] \end{array}\right. \qquad (13)$$

entonces se define la aproximación de la inecuación variacional (9) de la siguiente manera (se sigue notando u en lugar de u_ε, por conveniencia):

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} \ , \ v_h-u_h^{i+1}\right) + a_\varepsilon(u_h^{i+\theta} \ , \ v_h-u_h^{i+1}) \geq \\ \geq \ <f_{\varepsilon h}^{i+1} \ , \ v_h-u_h^{i+1}> \quad , \quad \forall\, v_h \in K_h \\ u_h^{i+1} \in K_h \end{array}\right. \qquad (14)$$

donde

$$\left\{\begin{array}{l} <f_{\varepsilon h}^{i+1} \ , \ v_h> = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_{ik}^{(i+1)k} <f_\varepsilon(t),v_h> \, dt \\ u_h^{i+\theta} = u_h^i + \theta(u_h^{i+1} - u_h^i) \\ \theta \in [0,1] \quad (\theta=1 \ : \text{implícito, } \theta=0 \ : \text{explícito, } \\ \qquad\qquad\qquad \theta=\frac{1}{2} \ : \text{Crank-Nicholson}) \, . \end{array}\right. \qquad (15)$$

La inecuación variacional elíptica (14) con incógnita u_h^{i+1} puede expresarse de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{l} (u_h^{i+1} \ , \ v-u_h^{i+1}) + k\theta \ a_\varepsilon(u_h^{i+1} \ , \ v-u_h^{i+1}) \geq \\ \geq (u_h^i \ , \ v-u_h^{i+1}) - k(1-\theta) \ a_\varepsilon(u_h^i \ , \ v-u_h^{i+1}) + \\ + k <f_h^{i+1} \ , \ v-u_h^{i+1}> \quad , \quad \forall\, v \in K_h \\ u_h^{i+1} \in K_h \ . \end{array}\right. \qquad (16)$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre inecuaciones variacionales elípticas con forma bilineal simétrica y minimización de funcionales, se tiene que u_h satisface el siguiente problema de mínimo:

$$\begin{cases} J_i(u_h^{i+1}) \leq J_i(v) \quad , \quad \forall\, v \in K_h \\ u_h^{i+1} \in K_h \end{cases} \tag{17}$$

donde

$$J_i(v) = \frac{1}{2}\left[(v,v) + k\theta\, a_\varepsilon(v,v)\right] - \left[(u_h^i,v) - \right.$$
$$\left. - k(1-\theta)\, a_\varepsilon(u_h^i,v) + k\, \langle f_h^{i+1},v\rangle\right] \tag{18}$$

con lo cual en cada paso de tiempo se debe hallar la solución de un problema de mínimo para el funcional J_i en K_h $(i=0,\ldots,M-1)$.

En [Fe1], se dan condiciones para que la aproximación utilizada sea convergente.

III. PROBLEMA DE STEFAN MULTIDIMENSIONAL A DOS FASES

Se considera un dominio material $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ a una temperatura inicial $\theta_0=\theta_0(x)$ $(x\in\Omega)$, al cual se le aplica una temperatura $b=b(x)$ sobre Γ_1 y un flujo de calor $\bar{h}=\bar{h}(x,t)$ sobre Γ_2 a un instante de tiempo $t>0$. Se considera además, sin pérdida de generalidad, que la temperatura del cambio de fase es 0 C. Se estudia la temperatura $\theta=\theta(x,t)$, definida para $x\in\Omega$ y $t\in(0,T)$ con $T>0$, tiempo dado. A cada instante $t>0$, el conjunto Ω está dividido en dos regiones ocupadas por la fase sólida $\Omega_1(t)$ y la fase líquida $\Omega_2(t)$ las cuales se encuentran separadas por la frontera libre $\mathcal{F}(t)$ ($\mathcal{F}(0)$ es un dato del problema).

Se definen los siguientes conjuntos:

$$\begin{cases} Q_i = \bigcup\limits_{0<t<T} \Omega_i(t)\times\{t\} \\ \Sigma = \bigcup\limits_{0<t<T} \mathcal{F}(t)\times\{t\} \\ Q = \Omega\times(0,T) = Q_1 \cup Q_2 \cup \Sigma \end{cases} \tag{1}$$

con lo cual la temperatura θ puede expresarse en Q de la siguiente forma:

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \theta_1(x,t)<0 & \text{si} \quad (x,t)\in Q_1 \\ 0 & \text{si} \quad (x,t)\in \Sigma \\ \theta_2(x,t)>0 & \text{si} \quad (x,t)\in Q_2 \end{cases} \tag{2}$$

debiendo satisfacer las siguientes condiciones:

$$\left\{\begin{array}{l}
C_i \dfrac{\partial\theta_i}{\partial t} - k_i \,\Delta\theta_i = g \quad , \quad \text{en } Q_i \ (i=1,2) \\
\theta_1(x,t) = \theta_2(x,t) = 0 \quad , \quad x \in \mathcal{F}(t) \quad , \quad 0<t<T \\
k_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial n} - k_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial n} = L\ V.n \quad , \quad x \in \mathcal{F}(t) \quad , \quad 0<t<T \\
\theta|_{\Gamma_1} = b \\
\quad -k_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \tilde{h} \quad \text{si} \quad \theta|_{\Gamma_2} < 0 \\
\quad -k_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \tilde{h} \quad \text{si} \quad \theta|_{\Gamma_2} > 0 \\
\theta(x,0) = \theta_0(x) \quad , \quad x \in \Omega
\end{array}\right. \qquad (3)$$

donde $k_i>0$ es la conductividad térmica de la fase i, $C_i>0$ es el calor específico por unidad de volumen de la fase i, $g=g(x,t)$ es el aporte de energía por unidad de tiempo y de volumen, n es un vector normal a $\mathcal{F}(t)$ en $\mathbb{R}^3$, $L>0$ es el calor latente de fusión por unidad de volumen, $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ es la frontera de Ω con $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$ y $med(\Gamma_1)>0$, i=1 y i=2 representan la fase sólida y líquida respectivamente.

Si se realiza el cambio de función incógnita

$$u(x,t) = \int_0^t \left[k_2\ \theta^+(x,s) - k_1\ \theta^-(x,s)\right] ds \qquad (4)$$

entonces u satisface el problema (se simboliza con $u'(t)$ la aplicación que a cada $x\in\Omega$ le hace corresponder $u_t(x,t)$):

$$\left\{\begin{array}{l}
\beta(u') - \Delta u = G - L\ \chi_{\{\theta>0\}} \quad , \quad \text{en } D'(Q) \\
u|_{\Gamma_1} = tb_0 \\
-\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = h(t) \equiv \displaystyle\int_0^t \tilde{h}(s)\ ds \\
u(0)=0
\end{array}\right. \qquad (5)$$

y, en consecuencia, la inecuación variacional parabólica de tipo II siguiente:

$$\begin{cases} (\beta(u'(t),v-u'(t)) + a(u(t),v-u'(t)) + L\, j(v) - L\, j(u'(t)) \geq \\ \geq \langle f(t),v-u'(t)\rangle \quad , \quad \forall\, v\in K \quad , \quad t\in[0,T] \\ u'(t)\in K \quad , \quad \frac{u(t)}{t}\in K \quad , \quad u(0)=0 \end{cases} \tag{6}$$

donde

$$\begin{cases} V= H^1(\Omega) \quad , \quad K=\left\{ v\in V \;/\; v|_{\Gamma_1} = b_0 \right\} \\ G(t)= C_2\theta_0^+ - C_1\theta_0^- + L\, H_0(\theta_0) + \int_0^t g(s)\, ds \\ \beta(v)= \frac{C_2}{k_2}\, v^+ - \frac{C_1}{k_1}\, v^- \quad , \quad (u,v)= \int_\Omega uv\, dx \\ \langle f(t),v\rangle = \langle G(t),v\rangle - \int_{\Gamma_2} h(t)\, v\, d\gamma \quad , \quad j(v)= \int_\Omega v^+\, dx \;, \end{cases} \tag{7}$$

donde H es la función de Heaviside y χ_A representa la función cafacterística del conjunto A.

Puede notarse que si $b=b(x,t)$ sobre Γ_1 , entonces el conjunto convexo K depende del tiempo.

Observación 1:

Si en (5) se incorpora la función característica χ a la función β, se obtiene de este modo una función, llamada entalpía, que tiene un salto en el origen igual al calor latente. De esta nueva ecuación surge la formulación entálpica, que no se tratará aquí, y sobre la cual se han realizado numerosos trabajos, ya sea desde un punto de vista teórico, numérico y de las aplicaciones.

La formulación (6) y algunas de sus generalizaciones han sido estudiadas desde un punto de vista teórico en [AgFr, Co, Da1, Da2, Du3-Du6, Fre1, Fre2, Pa1, Pa2, Ta3, Ta7] y desde el punto de vista de su cálculo o análisis numérico [Bo, Fe2, Ic Ki, KiIc, NiPa, Paó, PaNi, TiTi]. Además, se han realizado aplicaciones a la teoría de control [NeTi, Pa3-Pa5], a la solidificación de aleaciones binarias [Do], a la identificación de parámetros [HoNiPaSp]. En el caso unidimensional fue aplicado a la teoría de control en [Sa1].

IV. CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN MULTIDIMENSIONAL A DOS FASES Y SU ANALISIS NUMERICO

Se considera un material Ω, dominio acotado en $\mathbb{R}^3$, con frontera $\Gamma=\partial\Omega$, regular. Se supone que la temperatura del cambio de fase es 0 C y que Γ está compuesta de dos porciones Γ_1 y Γ_2 con $med(\Gamma_1)>0$. Se aplica una temperatura $b=b(x)$ sobre Γ_1 y un flujo de calor $q=q(x)$ sobre Γ_2.

El problema consiste en estudiar la temperatura $\theta=\theta(x)$, definida para $x\in\Omega$. El conjunto Ω puede expresarse de la forma $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup L$, donde

$$\begin{cases} \Omega_1=\{x\in\Omega \ / \ \theta(x)<0\} \quad , \quad \Omega_2=\{x\in\Omega \ / \ \theta(x)>0\} \\ L=\{x\in\Omega \ / \ \theta(x)=0\} \end{cases} \tag{1}$$

son la fase sólida, la fase líquida y la frontera libre que las separa.

La temperatura θ puede ser representada en Ω de la siguiente manera:

$$\theta(x)=\begin{cases} \theta_1(x)<0 & \text{si} \quad x\in\Omega_1 \\ 0 & \text{si} \quad x\in L \\ \theta_2(x)>0 & \text{si} \quad x\in\Omega_2 \end{cases} \tag{2}$$

y satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \Delta\theta_i=0 \quad , \quad \text{en } \Omega_i \ (i=1,2) \\ \theta_1=\theta_2=0 \quad , \quad k_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial n}=k_2\dfrac{\partial\theta_2}{\partial n} \quad \text{sobre } L \\ \theta|_{\Gamma_1}=b \\ \quad -k_2\dfrac{\partial\theta_2}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=q \quad \text{si} \quad \theta|_{\Gamma_2}>0 \\ \quad -k_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=q \quad \text{si} \quad \theta|_{\Gamma_2}<0 \end{cases} \tag{3}$$

donde $k_i>0$ es la conductividad térmica de la fase i ($i=1$:fase sólida, $i=2$:fase líquida).

Si se define una nueva función incógnita [Ta4, Ta8]

$$u=k_2\,\theta^+-k_1\,\theta^- \quad \text{en } \Omega\,, \tag{4}$$

donde θ^+ y θ^- representan la parte positiva y la parte negativa de la función θ respectivamente, entonces el problema (3) se transforma en

$$\begin{cases} \Delta u=0 \quad , \quad \text{en } D'(\Omega) \\ u|_{\Gamma_1}=b_*\equiv k_2\,b^+-k_1\,b^- \end{cases} \tag{5}$$

$$\left\{ \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \right. \tag{5}$$

cuya formulación variacional está dada por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(u,v-u) = \langle f, v-u \rangle \quad , & \forall\, v \in K \\ u \in K \end{array} \right. \tag{6}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} V = H^1(\Omega) \quad , \quad V_0 = \left\{ v \in V \;/\; v|_{\Gamma_1} = 0 \right\} \; , \\ K = \left\{ v \in V \;/\; v|_{\Gamma_1} = b_0 \right\} \quad , \quad H = L^2(\Omega) \quad , \\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \; dx \quad , \quad \langle f, v \rangle = -\int_{\Gamma_2} q v \; d\gamma \; . \end{array} \right. \tag{7}$$

Bajo la hipótesis $b \in H^{1/2}(\Gamma\;)$ se tiene que existe $B \in V$ tal que $B/_{\Gamma_1} = b_0$. Entonces, si se define $U = u - B \in V_0$, se tiene que (6) es equivalente a (8), donde

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(U,v) = \langle F, v \rangle \quad , & \forall\, v \in V_0 \\ U \in V_0 \end{array} \right. \tag{8}$$

con

$$\langle F, v \rangle = \langle f, v \rangle - a(B,v) \; . \tag{9}$$

Si además se tiene la hipótesis $q \in L^2(\Gamma_2)$, entonces por el Teorema de Lax-Milgram se deduce que existe una única solución U de (8) y por ende una única solución u de (6).

Sean Ω un dominio poligonal convexo con frontera regu-lar y τ_h una triangulación regular de Ω, donde $h>0$ es un parámetro destinado a tender a cero, formada por elementos finitos afín-equivalentes de clase C^0. Se toma h igual a la longitud del lado más grande de los triángulos $T \in \tau_h$ y se aproxima V_0 por:

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \;/\; v_{h/_T} \in P_1 \;,\; \forall\, T \in \tau_h \quad , \quad v_{h/_{\Gamma_1}} = 0 \right\} \tag{10}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1.

Sea Π_h el operador de interpolación lineal correspondiente. Se considera el siguiente problema aproximado, en dimensión finita, del problema continuo (8):

$$\begin{cases} a(U_h,v_h) = \langle F,v_h\rangle \quad , \quad \forall\, v_h \in V_h \\ U_h \in V_h \end{cases} \qquad (11)$$

obteniéndose los siguientes resultados:

Propiedad 1:

Bajo las hipótesis anteriores, se tienen las siguientes propiedades:

i) Existe una única solución U_h de (11), que satisface

$$a(U-U_h,v_h) = 0 \quad , \quad \forall\, v_h \in V_h \qquad (12)$$

es decir que $U_h = P_{V_h}(U)$.

ii) La sucesión U_h está acotada en V; más aún, se tiene

$$||U_h||_V \leq \frac{||F||}{\alpha} \quad , \quad \forall\, h>0, \qquad (13)$$

donde α es la constante de la coercitividad de la forma bilineal a en V_o, es decir:

$$a(v,v) = ||v||^2_{V_o} \geq \alpha\, ||v||^2_V \quad , \quad \forall\, v \in V_o \ . \qquad (14)$$

iii) $U_h \to U$ en V débil cuando $h\to 0$.

iv) $U_h \to U$ en V fuerte cuando $h\to 0$, es decir:

$$\lim_{h\to 0} ||U_h-U||_V = 0 \ . \qquad (15)$$

v) Se tiene la siguiente estimación:

$$||U_h-U||_V \leq \frac{1}{\alpha} \inf_{v_h\in V_h} ||U-v_h||_V \ . \qquad (16)$$

vi) Existe una constante $C_1>0$ (independiente de h) de manera que

$$||U_h-U||_V \leq C_1\, h \ . \qquad (17)$$

Si se definen

$$\begin{cases} K_h = V_h + \Pi_h(B) \\ u_h = U_h + \Pi_h(B) \in K_h \quad , \quad \theta_h = \frac{1}{k_2}\, u_h^+ - \frac{1}{k_1}\, u_h^- \in V \\ u = U + B \in K \quad , \quad \theta = \frac{1}{k_2}\, u^+ - \frac{1}{k_1}\, u^- \in V \end{cases}$$

entonces se deducen los siguientes resultados:

Propiedad 2

i) Bajo las hipótesis anteriores, se tiene:

$$\lim_{h\to 0} ||u_h - u||_V = \lim_{h\to 0} ||\theta_h - \theta||_H = 0 \quad . \tag{19}$$

ii) Si además, los datos del problema b y q son tales que se tenga la hipótesis suplementaria $\beta \in H^2(\Omega)$ (ver Propiedad siguiente), entonces existen dos constantes $C_2>0$, $C_3>0$ (independientes de h) de manera que:

$$\begin{cases} ||u_h - u||_V \leq C_2 h \\ ||\theta_h - \theta||_H < C_3 h \quad . \end{cases} \tag{20}$$

iii) Bajo hipótesis adicionales, los resultados (20) pueden generalizarse con h^k tomando P_k (polinomios de grado $k\geq 1$) en lugar de P_1.

Propiedad 3

i) Si se nota con $u=u_{bq}$ la solución correspondiente a los datos b y q, entonces se tiene el resultado de comparación siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 \leq b_2 \text{ sobre } \Gamma_1 \\ q_2 \leq q_1 \text{ sobre } \Gamma_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_{b_1 q_1} \leq u_{b_2 q_2} \text{ en } \Omega. \tag{21}$$

ii) Si $b=b(x)>0$ sobre Γ_1 y $q=q(x)>0$ sobre Γ_2 verifican la desigualdad (con $med(\Gamma_2)>0$):

$$\operatorname*{Inf}_{x\in\Gamma_2} q(x) > \frac{k_2 \, med(\Gamma_2)}{C} \cdot \operatorname*{Sup}_{x\in\Gamma_1} b(x)$$

donde C es una constante adecuada [Ta8], entonces se tiene un problema de Stefan a dos fases.

iii) Si los datos b y q son como en (ii), satisfacen (22) y $b\in H^{**}(\Gamma_1)$ entonces $\beta\in H^2(\Omega)$.

BIBLIOGRAFIA

[Ag Fr] J. AGUIRRE PUENTE-M. FREMOND, "Frost propagation in wet porous media", in Lecture Notes in Mathematics No. 503, Springer Verlag, Berlin (1976), 137-147.

[Al Co Ho] J. ALBRECHT-L. COLLATZ-K.H. HOFFMANN(Eds.), "Numerical treatment of free boundary value problems", ISNM No. 58, Birkhäuser Verlag, Basel (1982).

[Bai 1] C. BAIOCCHI, "Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux", C. R. Acad. Sc. Paris, 273A(1971), 1215-1217.

[Bai 2] C. BAIOCCHI, "Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica", Annali Mat. Pura Appl., 92(1972), 107-127.

[Ba Ca] C. BAIOCCHI-A. CAPELO, "Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Aplicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1, 2, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[Ba 1] V. BARBU, "Optimal control of variational inequalities", Research Notes in Mathematics No. 100, Pitman, London (1984).

[Ba 2] V. BARBU, "Boundary control of some free boundary problems", in Lecture Notes in Control and Information Sciences No. 54, Springer Verlag, Berlin (1983), 45-59.

[Be Li 1] A. BENSOUSSAN-J.L. LIONS, "Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique", Dunod, Paris (1978).

[Be Li 2] A. BENSOUSSAN-J.L. LIONS, "Contrôle impulsional et inéquations quasi variationnelles", Dunod, Paris (1982).

[Bo Da] A. BOSSAVIT-A. DAMLAMIAN, "Homogenization of the Stefan problem and application to magnetic composite media", IMA J. Appl. Math., 27(1981), 319-334.

[Bo Da Fr] A. BOSSAVIT-A. DAMLAMIAN-M. FREMOND (Eds.), "Free boundary problems: Applications and theory", Vol. III, IV, Research Notes in Mathematics No. 120, 121, Pitman, London (1985).

[Bo] J.F. BOURGAT, "Résolution du problème de Stefan à deux phases par une inéquation variationnelle", Travail inédit.

[Br] H. BREZIS, "Problèmes unilatéraux", J. Math. Pures Appl., 51(1972), 1-168.

[Br 1] T. BRIERE, "Application des méthodes variationnelles à la cristallisation d'un metal fondu s'écoulant dans une gaine de refroidissement", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Juin 1976).

[Br 2] T. BRIERE, "Application des méthodes variationnelles à la cristallisation d'un metal par passage dans une gaine de refroidissement", Ann. Fac. Sc. Toulouse, 2(1980), 219-247.

[Ca] L.A. CAFFARELLI, "Some aspects of the one-phase Stefan problem", Indiana Univ. Math. J., 27(1978), 73-77.

[Ca Fr] L.A. CAFFARELLI-A. FRIEDMAN. "Continuity of the temperature in the Stefan Problem", Indiana Univ. Math. J., 28(1979), 53-70.

[Ca] J.R. CANNON, "The one-dimensional heat equation", Addison-Wesley, Menlo Park, California (1984).

[Ch Ro] M. CHIPOT-J.F. RODRIGUES, "On the steady-state continous casting Stefan problem with nonlinear cooling", Quart. Appl. Math., 40(1983), 476-491.

[Ci] P.G. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam (1978).

[Co] P. COLLI, "On the Stefan problem with energy specification", Publicazione No. 366, Istituto di Analisi Numerica, Pavia (1983). Rend. Acc. Lincei, To appear.

[Cr] J. CRANK, "Free and moving boundary problems", Clarendon Press, Oxford (1984).

[Cry] C.W. CRYER, "A bibliography of free boundary problems", Technical Summary Report No. 1793, Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin (July 1977).

[Da 1] A. DAMLAMIAN, "Problèmes aux limites non linéaires du type du problème de Stefan, et inéquations variationnelles d'évolution", dans Thèse d'Etat "Résolution de certaines inéquations variationnelles stationnaires et d'évolution", Univ. Paris VI, 25 Mai 1976.

[Da 2] A. DAMLAMIAN, "Some results on the multi-phase Stefan problem", Comm. Partial Diff. Eq., 2(1977), 1017-1044.

[Da 3] A. DAMLAMIAN, "How to homogenize a nonlinear diffusion equation: Stefan's problem", SIAM J. Math. Anal., 12(1981), 306-313.

[Di Sh] E. Di BENEDETTO-R.E. SHOWALTER, "A pseudo-parabolic variational inequality and Stefan problem", Technical Summary Report NO. 2100, Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin (August 1980).

[Dj] M. DJOBIDJA, "Analyse numérique de problèmes d'identification en océanographie et de problèmes de frontière libre", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Juin 1979).

[Do] J.D.P. DONNELLY, "A model for non-equilibrium thermodynamic processes involving phase changes", J. Inst. Math. Appl., 24(1979), 425-438.

[Du 1] G. DUVAUT, "Résolution d'un problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace à zéro degré)", C. R. Acad. Sc. Paris, 276A (1973), 1461-1463.

[Du 2] G. DUVAUT, "Etude de problèmes unilatéraux en mécanique par des méthodes variationnelles", in New Variational Techniques in Mathematical Physics, CIME, Bressanone (17-26 June 1973), 45-102.

[Du 3] G. DUVAUT, "The solution of a two-phase stefan problem by a variational inequality", in [Oc Ho], 173-181.

[Du 4] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", 2ème Congrès Français de Mécanique, Toulouse (1975). Rapport de Recherche No.185, LABORIA-IRIA, Le Chesnay (1976).

[Du 5] G. DUVAUT, "Two phases Stefan problem with varying specific heat coefficients", An. Acad. Brasil. Cien., 47(1975), 377-380.

[Du 6] G. DUVAUT, "Stefan problem for two-phases varying", Memórias de Matemática da Univ. Fed. do Rio de Janeiro, No. 51 (1975).

[Du Li] G. DUVAUT-J.L. LIONS, "Les inéquations en mécanique et en physique", Dunod, Paris (1969).

[El 1] C.M. ELLIOTT, "Moving boundary problems and linear complementary", in ISNM No. 39, Birkhäuser Verlag, Basel (1978), 62-73.

[El 2] C.M. ELLIOTT, "On a variational inequality formulation of an electrochemical machining moving boundary problem and its approximation by the finite element method", J. Inst. Math. Appl., 25(1980), 121-131.

[El 3] C.M. ELLIOTT, "A variational inequality formulation of a steady state electrochemical machining free boundary problem", in [Fa Pr], Vol. II, 505-512.

[El Ja 1] C.M. ELLIOTT-V. JANOVSKY, "A finite element discretisation of a variational inequality formulation of a Hele-Shaw moving boundary problem", in The Mathematics of Finite Elements and Applications III, MAFELAP 1978, J.R. Whiteman (Ed.), Academic Press, London (1979), 97-104.

[El Ja 2] C.M. ELLIOTT-V. JANOVSKY, "A variational inequality approach to Hele-Shaw flow with a moving boundary", Proc. Royal Soc. Edinburgh, 88A (1981), 93-107.

[El Ja 3] C.M. ELLIOTT-V. JANOVSKY, "An error estimate for a finite-element approximation of an elliptic variational inequality formulation of a Hele-Shaw moving-boundary problem", IMA J. Numer. Anal., 3(1983), 1-9.

[El Oc] C.M. ELLIOTT-J.R. OCKENDON, "Weak and variational methods for moving problems", Research Notes in Mathematics No. 59, Pitman, London (1982).

[Fa Pr] A. FASANO-M. PRIMICERIO (Eds.), "Free boundary problems: Theory and Applications", Vol. I, II, Research Notes in Mathematics No. 78, 79, Pitman, London (1983).

[Fe 1] L. FERRAGUT, "Resolución del problema de Stefan mediante métodos variacionales", Tesis, Univ. de Zaragoza (setiembre 1982).

[Fe 2] L. FERRAGUT, "Aproximación numérica de una inecuación parabólica no clásica. Aplicación a la resolución de un problema de Stefan de dos fases", en Actas VI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Jaca (Huesca), 26-30 Sept. 1983, 339-344.

[Fre 1] M. FREMOND, "Variational formulation of the Stefan problem. Coupled Stefan problem-frost propagation in porous media", in Computational Methods in Nonlinear Mechanics, J.T. Oden et al. (Eds.), The Texas Inst. for Computational Mechanics (Sept. 1974), 341-350.

[Fre 2] M. FREMOND, "Diffusion problems with free boundaries", Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, I.C.T.P., Trieste (1976).

[Fri 1] A. FRIEDMAN, "Variational principles and free-boundary problems", J. Wiley, New York (1982).

[Fri 2] A. FRIEDMAN, "Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary", J. Functional Analysis, 18(1975), 151-176

[Fri 3] A. FRIEDMAN, "A class of parabolic quasi-variational inequalities, II", J. Diff. Eq., 22(1976), 379-401.

[Fr Ki 1] A. FRIEDMAN-D. KINDERLEHRER, "A one-phase Stefan problem", Indiana Univ. Math. J., 24(1975), 1005-1035.

[Fr Ki 2] A. FRIEDMAN-D. KINDERLEHRER, "A class of parabolic qusi-variational inequalities", J. Diff. Eq., 21(1976), 395-416.

[Fu] R.M. FURZELAND, "Symposium on: Free and moving boundary problems in heat flow and diffusion", Bull. IMA, 15(1979), 172-176.

[Ga] F. GASTALDI, "About the possibility of setting Stefan-like problems in variational form", Bollettino Un. Mat. Italiana, 16A(1979), 148-156.

[Gl] R. GLOWINSKI, "Numerical methods for nonlinear variational problems", Springer Verlag, Berlin (1984).

[Gl Li Tr] R. GLOWINSKI-J.L. LIONS-R.TREMOLIERES, "Analyse numérique des inéquations variationnelles", Tome 1, 2, Dunod, Paris (1976).

[Go Ho] R. GORENLO-K.H. HOFFMANN(Eds.), "Applied nonlinear functionalanalysis", Verlag Peter Lang, Frankfurt (1983).

[Ho] K.H. HOFFMAN (Ed.), "Freie Randwetprobleme I, II, III", Freie Universität Berlin, Berlin (1977).

[Ho Ni Pa Sp] K.H. HOFFMAN-M. NIEZGODKA-I. PAWLOW-J. SPREKELS, "Mathematical modelling of thermal and diffusive phase transitions - Identification of parameters, numerical treatment", Institut für Mathematik, Univ. Augsburg, Preprint No. 66 (1985).

[Ic Ki] Y. ICHIKAWA-N. KIKUCHI, "A one-phase multidimensional Stefan problem by the method of variational inequalities", Int. J. Numer. Meth. Eng., 14(1979), 1197-1220.

[Je 1] J.W. JEROME, "Approximation of nonlinear evolution systems", Academic Press, New York (1983).

[Je 2] J.W. JEROME, "Uniform convergence of the horizontal line method for solutions and free boundaries in Stefan evolution inequalities", Math. Meth. Appl. Sci., 2(1980), 149-167.

[Je 3] J.W. JEROME, "Convergent approximations in parabolic variational inequalities. I: One-phase Stefan problems", Technical Summary Report No. 2032, Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin (January 1980).

[Ka Sa] H. KAWARADA-C. SAGUEZ, "Numerical analysis of a Stefan problem", Technical Summary Report No. 2543, Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin, (July 1983).

[Ki Ic] N. KIKUCHI-Y. ICHIKAWA, "Numerical methods for a two-phase Stefan problem by variational inequalities", Int. J. Numer. Meth. Eng., 14(1979), 1221-1239.

[Ki St] D. KINDERLEHRER-G. STAMPACCHIA. "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[Le St] H. LEWY-G. STAMPACCHIA, "On the regularity of the solution of a variational inequality", Comm. Pure Appl. Math., 22(1969), 153-188.

[Li 1] J.L. LIONS, "Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles", Dunod-Gauthier Villars, Paris (1968).

[Li 2] J.L. LIONS, "Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires", Dunod-Gauthier Villars, Paris (1968).

[Li 3] J.L. LIONS, "Sur quelques questiones d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal", Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal (1976).

[Li 4] J.L. LIONS, "On free surface problems: methods of variational and quasi-variational inequalities", in Lecture Notes in Mathematics No. 461, Springer Verlag, Berlin (1974), 129-148.

[Li 5] J.L. LIONS, "Introduction to some aspects of free surface problems", in Numerical Solution of Partial Differential Equations III, SYNSPADE 1975, B. Hubbard (Ed.), Academic Press, New York (1976), 373-391.

[Li 6] J.L. LIONS, "Asymptotic behaviour of solutions of variational inequalities with highly oscillating coefficients", in Lecture Notes in Mathematics No. 503, Springer Verlag, Berlin (1976), 30-55.

[Li St] J.L. LIONS-G. STAMPACCHIA, "Variational inequalities", Comm. Pure Appl. Math., 20(1967), 493-519.

[Ma 1] E. MAGENES, "Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems", in Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations, H.G. Garnier (Ed.), D. Reidel Publ. Comp. Dordrecht (1976), 239-312.

[Ma 2] E. MAGENES (Ed.), "Free boundary problems", Vol. I, II, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma (1980).

[Ma 3] E. MAGENES, "Problemi di Stefan bifase in pui variabili spaziali", Le Matematiche, 36(1981), 65-108.

[Mo Sa] C. MORENO-C. SAGUEZ, "Dépendance par rapport aux données de la frontière libre associée à certaines inéquations variationnelles d'évolution", Rapport de Recherche No. 298, IRIA, Le Chesnay (Mai 1978).

[Ne Ti] P. NEITTAANMAKI-D. TIBA, "On the finite element approximation of the boundary control for two-phase

Stefan problems", in Lecture Notes in Control and Information Sciences No. 62, Springer Verlag, Berlin (1984), 356-370.

[Ni Pa] M. NIEZGODKA-I. PAWLOW, "Discrete approximation of multiphase Stefan problems with possible degenerations", in [Bo Da Fr], Vol. IV, 514-525.

[Ni 1] J. NITSCHE, "Finite element approximations to the one-dimensional Stefan problem", in Recent Advances in Numerical Analysis, C. De Boor-G.H. Golub (Eds.), Academic Press, New York (1978), 119-142.

[Ni 2] J. NITSCHE, "Approximation des eindimensionalen Stefan-problems durch finite elemente", in Proc. of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, August 15-23 (1978), 923-928.

[Ni 3] J. NITSCHE, "Finite element approximations for free boundary problems", in Computational Methods in Nonlinear Mechanics, J.T. Oden (Ed.), North-Holland, Amsterdam (1980), 341-360.

[Ni 4] J. NITSCHE, "Finite element approximation to the one phase Stefan problem", in [Fa Pr], Vol. II, 601-605.

[Ni 5] J. NITSCHE, "A finite element method for parabolic free boundary problems", in [Ma 2], Vol. I, 277-318.

[Ni 6] J. NITSCHE, "Moving boundary problems and finite elements", in [Al Co Ho], 224-232.

[Oc Ho] J.R. OCKENDON-W.R. HODGKINS (Eds.), "Moving boundary problems in heat flow and diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).

[Od Ki] J.T. ODEN-N. KIKUCHI, "Finite element methods for certain free boundary-value problems in mechanics", in [Wi So Bo], 147-164.

[Pa 1] I. PAWLOW, "A variational inequality approach to generalized two-phase Stefan problem in several space variables", Ann. Mat. Pura Appl., 131(1982), 333-373.

[Pa 2] I. PAWLOW, "Generalized Stefan-type problems involving additional nonlinearities", in [Fa Pr], Vol. II, 407-418.

[Pa 3] I. PAWLOW, "Approximation of boundary control problems for evolution variational inequalities arising from free boundary problems", in Lecture Notes in Control and Information Sciences No. 59, Springer Verlag, Berlin (1984), 362-372.

[Pa 4] I. PAWLOW, "Boundary control of degenerate two-phase Stefan problems", in [Bo Da Fr], Vol. IV, 526-536.

[Pa 5] I. PAWLOW, "Variational inequality formulation and optimal control of nonlinear evolution systems governed by free boundary problems", in [Go Ho], 213-250.

[Pa 6] I. PAWLOW, "Approximation of an evolution variational inequality arising from free boundary problems", in Optimal Control of Partial Differential Equations, K.H. Hoffmann-W. Krabs (Eds.), ISNM No. 68, Birkhäuser Verlag, Basel (1984), 188-209.

[Pa Ni] I. PAWLOW-M. NIEZGODKA, "Numerical analysis of degenerate Stefan problems", Preprint No. 62, Mathematisches Institut, Univ. Augsburg (1985).

[Pi Ve] P. PIETRA-C. VERDI, "Convergence of the approximated free boundary for the multidimensional one-phase Stefan problem", Publicazione No. 440, Istituto di Analisi Numerica, Pavia (1985).

[Pr] M. PRIMICERIO, "Problemi di diffusione a frontiera libera", Boll. Un. Mat. Italiana, 18A (1981), 11-68.

[Ro 1] J.F. RODRIGUES, "Sur un problème à frontière libre stationnaire traduisant la cristallisation d'un métal", C. R. Acad. Sc. Paris, 290A (1980), 823-825.

[Ro 2] J.F. RODRIGUES, "Sur la cristallisation d'un métal en coulée continue par des méthodes variationnelles", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Octobre 1980).

[Ro 3] J.F. RODRIGUES, "Alguns problemas de fronteira livre na mecanica do continuo", Textos e Notas NO. 27, CMAF, Lisboa (1981).

[Ro 4] J.F. RODRIGUES, "Sur le comportement asymptotique de la solution et de la frontière libre d'une inéquation variationnelle parabolique", Ann. Fac. Sc. Toulouse, 4(1982), 263-279.

[Ro 5] J.F. RODRIGUES, "Free boundary convergence in the homogenization of the one phase Stefan problem", Trans. Amer. Math. Soc., 274(1982), 297-305.

[Ru 1] L.I. RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Trans. Math. Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).

[Sa 1] C. SAGUEZ, "Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des inéquations variationnelles. Applications à des problèmes de frontière libre", Rapport de Recherche No. 191, IRIA, Le Chesnay (Octobre 1976).

[Sa 2] C. SAGUEZ, "Un problème de Stefan avec source sur la frontière libre ", Rapport de Recherche No. 268, IRIA, Le Chesnay (Novembre 1977). "A variational inequality associated with a Stefan problem simulation and control", in Lecture Notes in Control and Information Sciences No.6, Springer Verlag, Berlin (1978), 362-369.

[Sa 3] C. SAGUEZ, "Contrôle optimal d'inéquations variationnelles avec observation de domaines", Rapport de Recherche No. 286, IRIA, Le Chesnay (Mras 1978).

[Sa 4] C. SAGUEZ, "Conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes de contrôle optimal associés à des inéquations variationnelles", Rapport de Recherche No. 345, IRIA, Le Chesnay (Février 1979).

[Sa 5] C. SAGUEZ, "Contrôle optimal de systèmes à frontière libre", Thèse d'Etat, Univ. de Compiègne (Septembre 1980).

[Sa 6] C. SAGUEZ, "Optimal control of water solidification observation of the free-boundary", in Autumn Course on Variational Methods in Analysis and Mathematical Physics, I.C.T.P., 20 October - 11 December 1981, SMR/92-19.

[Sta1] G. STAMPACCHIA, "Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes", C. R. Acad. Sc. Paris, 258A (1964), 4413-4416.

[Sta2] G. STAMPACCHIA, "Variational inequalities", Proc. NATO Adv. Study Inst., Venezia (1968), Oderisi Ed. (1969), 101-192.

[Ta 1] D.A. TARZIA, "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI-CONICET, No. 5, Buenos Aires (1981).

[Ta 2] D.A. TARZIA, "Introducción a las inecuaciones variacionales parabólicas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", II Seminario Latinoamericano de Matemática Aplicada, Santa Fe-Rosario, 18-23 Julio 1983.

[Ta 3] D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse de 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Mars 1979), C. R. Acad. Sc. Paris, 288A(1979), 941-944.

[Ta 4] D.A. TARZIA, "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27(1979/80), 145-156.

[Ta 5] D.A. TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Math. Notae, 29(1981/82), 147-241. Ver también "Una bibliografía sobre los problemas de frontera libre del tipo de Stefan", con 1709 referencias, Rosario (1984), trabajo inédito.

[Ta 6] D.A. TARZIA, "Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", CUADERNOS No. 11. 12 del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Rosario (1984).

[Ta 7] D.A. TARZIA, "Etude de l'inéquation variationnelle proposée par Duvaut pour le problème de Stefan à deux phases, I, II", Boll. Un. Mat. Italiana, 1-B (1982), 865-883 y 2-B(1983), 589-603.

[Ta 8] D.A. TARZIA, "Una desigualdad para el flujo de calor constante a fin de obtener un problema estacionario de Stefan a dos fases", en Mecánica Computacional, Vol. 2, S.R. Idelsohn (Comp.), EUDEBA, Buenos Aires (1985), 359-370.

[Ti Ti] D. TIBA-M. TIBA, "Regularity of the boundary data and the convergence of the finite element discretization in two-phase Stefan problems", Int. J. Eng. Sci., 22(1984), 1225-1234.

[Wi So Bo] D.G. WILSON-A.D. SOLOMON-P.T. BOGGS (Eds.), "Moving Boundary Problems", Academic Press, New York 1978.

[Wi So Tr] D.G. WILSON-A.D. SOLOMON-J. STRENT, "A Bibliography on Moving Boundary Problems with Key Word Index", Oak Ridge National Laboratory, CSD 44 (October 1979).

[Ya] N. YAMADA, "Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities in bounded cylindrical domains", Hiroshima Math. J., 10(1980), 337-349.

[Ro 6] J.F.RODRIGUES, "Aspects of the variational approach to a continuous casting problem", in BoDaFr , Vol. III, 72-83.