

VIBRACIONES DE PLACAS RECTANGULARES CON DOS BORDES OPUESTOS
ELASTICAMENTE RESTRINGIDOS CONTRA ROTACION Y LOS
RESTANTES LIBRES: EFECTO DE APOYOS INTERMEDIOS

Patricio A. A. LAURA - Instituto de Mecánica Aplicada (COMICET-SEMED)
Base Naval Puerto Belgrano
Roberto GELOS - Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
Julio C. UTJES - Empresa Nuclear Argentina de Centrales Eléctricas
S.A., Av. L.M. Alem 712 - (1001) Buenos Aires

RESUMEN

Se resuelve el problema descrito en el título mediante el método de elementos finitos y la técnica de Rayleigh-Schmidt, determinando las frecuencias de interés práctico con diversas condiciones de borde. El problema tiene diversas aplicaciones en ingeniería y aparentemente no ha sido tratado en la literatura. Se destaca que con la técnica de Rayleigh Schmidt es conveniente el uso de funciones coordenadas polinómicas que satisfacen idénticamente las condiciones esenciales y solamente algunas de las naturales. Se obtuvieron buenas coincidencias con ambos métodos y se puntualiza el hecho de que cuando las condiciones de contorno son simétricas existen posiciones de los apoyos que coinciden con la línea nodal de un modo superior correspondiente a una placa que no posee apoyos intermedios, y por consiguiente las frecuencias son las mismas. La concordancia entre estos valores y otros que existen en la literatura, es muy buena.

Introducción

En este trabajo se determina la frecuencia fundamental de vibración del sistema estructural que se muestra en la Figura 1. El problema es de interés en diversas situaciones de la ingeniería, no existiendo resultados en la literatura.*

* Al respecto, cabe señalar que el caso de vigas con apoyos internos ha sido estudiado [1].

Dos metodologías son utilizadas para determinar los coeficientes de frecuencias fundamentales: a) la metodología de Rayleigh-Schmidt [2], y b) la técnica de elementos finitos.

Método de Rayleigh-Schmidt

Tomemos como aproximación modal fundamental a la expresión:

$$W_a = A[\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x + 1] \left[y^4 + \sum_{j=1}^n \beta_j y_j^4 \right] \quad (1)$$

donde los α 's y β 's serán determinados sustituyendo (1) en las condiciones de borde:

$$W(x_1, y) = W(x_2, y) = 0 \quad (2a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{x=1} = 0 \quad (2b)$$

$$W(x, 0) = W(x, 1) = 0 \quad (2c)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{1}{S_3'} \left. \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right|_{y=0} \quad (2d)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{y=1} = \frac{1}{S_4'} \left. \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right|_{y=1} \quad (2e)$$

donde $S_3' = \frac{b}{S_3' D}$; $S_4' = \frac{b}{S_4' D}$

En la figura 2 puede verse al polinomio aproximante W_a para el caso en que $x_1 = 0.1$ y $x_2 = 0.9$

Se hace notar que las expresiones (2b) son aproximadas. Por otra parte no se han tenido en cuenta las condiciones nu las de esfuerzo de Kirchoff para $x = 0; 1$

El exponente λ constituye el parámetro que permite minimizar al coeficiente de frecuencia obtenido de igualar la energía máxima de deformación del sistema (U_{\max}) con la máxima energía cinética (T_{\max}).

En efecto, el procedimiento clásico de Rayleigh-Ritz consiste en obtener al coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 al igualar.

$$\begin{aligned}
 2U_{\max} = & \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx dy + \delta^4 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 dx dy + \\
 & + 2(1-\mu)\delta^2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy + 2\mu\delta^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dx dy + \\
 & + \delta^4 \int_0^1 \left. \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{y=0} dx - \delta^4 \int_0^1 \left. \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{y=l} dx \\
 (\delta = a/b) & \hspace{15em} (3a)
 \end{aligned}$$

con

$$2T_{\max} = \Omega_1^2 \int_0^1 \int_0^1 W^2 dx dy \quad (3b)$$

Obviamente, de (3a) y (3b) se obtiene

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_1 a^2 = \Omega_1(\lambda) \quad (4)$$

La técnica de Rayleigh-Schmidt consiste en obtener $(\Omega_1)_{\min}$, requiriendo

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda} = 0 \quad (5)$$

Por motivos de índole práctico es conveniente efectuar (5) numéricamente

Resultados mediante el método de Elementos Finitos

Para representar el modelo del problema en cuestión se generó una malla como se puede ver en la figura 3, la cual

consta de 121 nodos y 100 elementos isoparamétricos de 4 nodos c/u.

Mediante el código SAP IV [3] se efectuó el análisis modal y a los fines de mantener el error de discretización para todos los casos estudiados se mantuvo la misma malla.

Resultados numéricos

Las tablas 1 y 2 contienen valores de coeficientes de frecuencias fundamentales obtenidos mediante el enfoque de Rayleigh-Schmidt.

La figura 4 contiene una comparación de coeficiente de frecuencias obtenidos a) mediante el método de elementos finitos, y b) mediante la técnica de Rayleigh-Schmidt.

AGRADECIMIENTOS

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET (PID 3009400/85).

Referencias

- [1]. D.J. Gorman - Free lateral vibration analysis of double-span uniform beams. (International Journal of Mechanical Sciences 16, 345-351, 1974).
- [2]. C.W. Bert - Use of symmetry in applying the Rayleigh-Schmidt method to static and free vibration problems. (Industrial Mathematics 34 (1) 65-67, 1984).
- [3]. Klaus-Jürgen Bathe, Edward L. Wilson y Fred E. Peterson SAP IV - A Structural analysis program for static and dynamic response of linear systems. Report No. EERC 13-11 June 1973. College of Engineering, University of California, Berkeley, California.

$\delta = \frac{a}{b}$	x_1	$\Omega_{w1} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} w_m a^2$	λ
1	0.1	27.790	4.2
	0.2	37.305	4.2
	0.3	32.173	4.1
	0.4	26.020	4.2
	0.45	24.642	4.2
1.5	0.1	41.304	4.1
	0.2	52.621	4.2
	0.3	45.926	4.1
	0.4	38.443	4.1
	0.45	36.823	4.1
2	0.1	59.375	4.1
	0.2	72.176	4.1
	0.3	64.226	4.1
	0.4	55.778	4.1
	0.45	54.002	4.1
3	0.1	109.618	4.1
	0.2	124.396	4.1
	0.3	114.791	4.1
	0.4	105.214	4.1
	0.45	103.279	4.1

Tabla 1

$\delta = \frac{a}{b}$	x_1	$\Omega_n = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} v_n a^2$	λ
1	0.1	35.664	4.1
	0.2	44.365	4.0
	0.3	39.481	4.0
	0.4	33.965	4.1
	0.45	32.784	4.1
1.5	0.1	63.032	4.1
	0.2	72.172	4.0
	0.3	66.560	4.0
	0.4	60.770	4.1
	0.45	59.588	4.1
2	0.1	101.982	4.1
	0.2	111.317	4.0
	0.3	105.339	4.0
	0.4	99.468	4.1
	0.45	98.299	4.1
3	0.1	213.945	4.1
	0.2	223.434	4.1
	0.3	217.145	4.1
	0.4	211.231	4.1
	0.45	210.080	4.1

Tabla 2

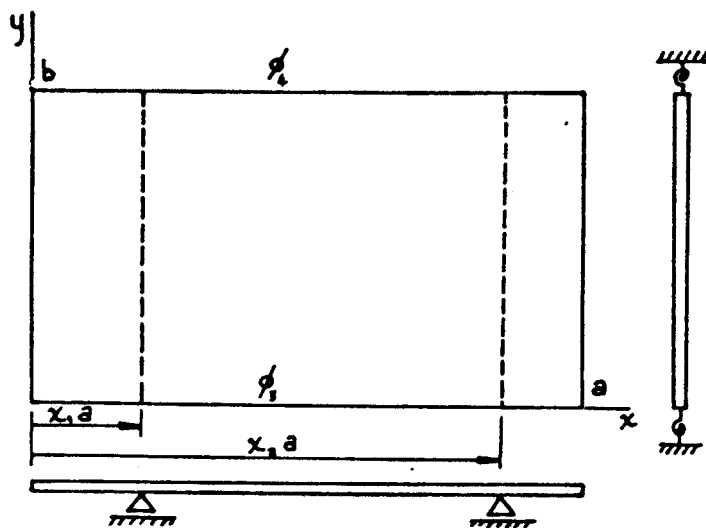


FIGURA N°1

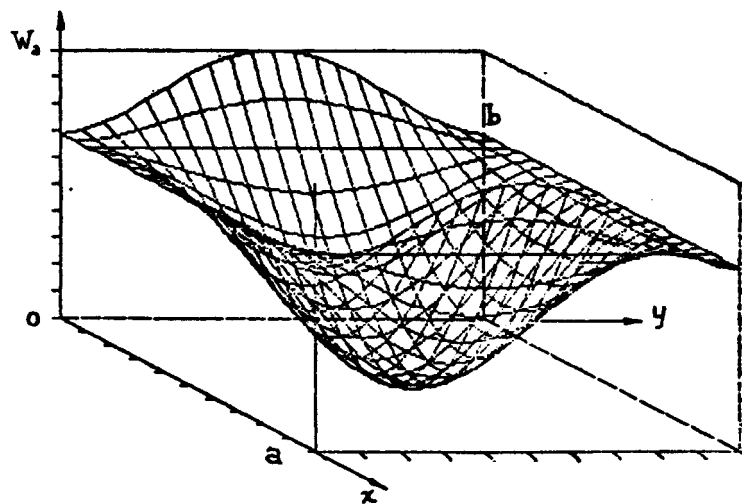


FIGURA N°2

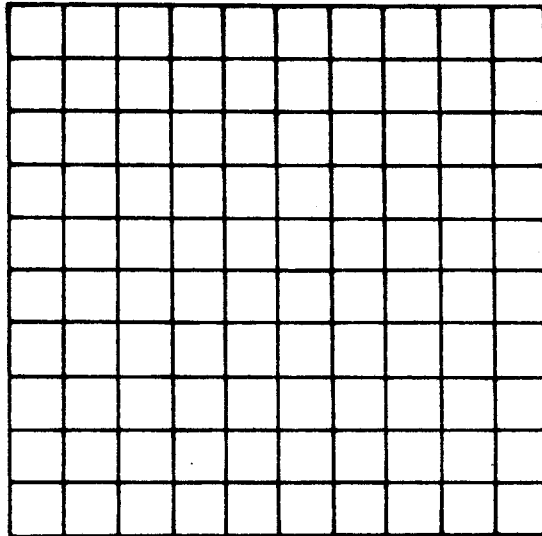
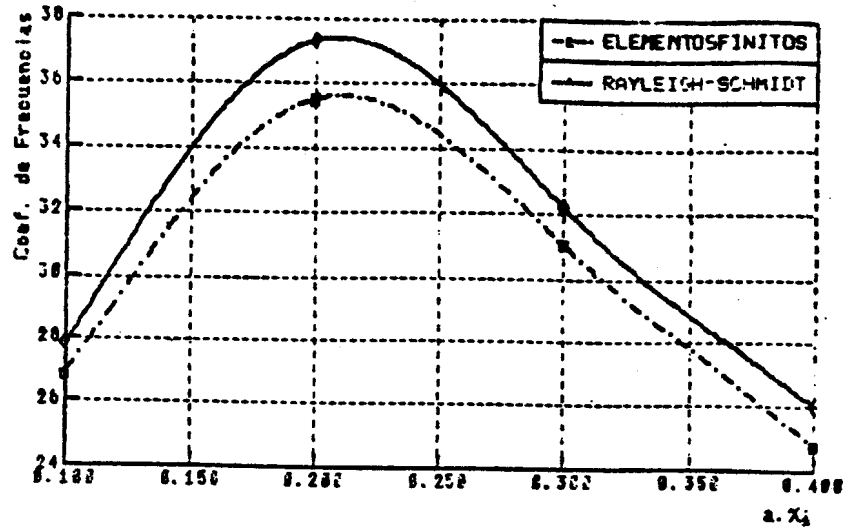
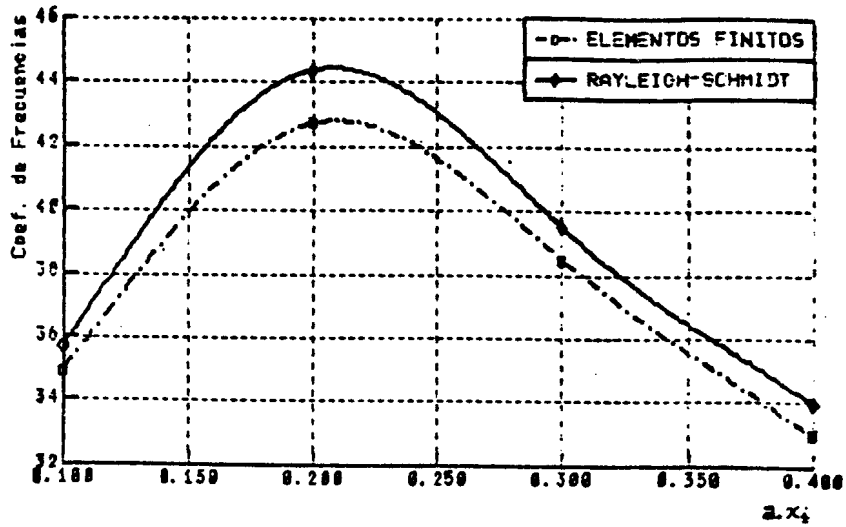


FIGURA N°3



PLACA SIMPLEMENTE APOYADA



PLACA EMPOTRADA

FIGURA N°4

*Esta edición se terminó de imprimir
el día 30 de marzo de 1987
en la imprenta del
Centro Regional de Investigación y Desarrollo (CERIDE),
y fue encuadrada en la imprenta de la
Universidad Nacional del Litoral*