# PROBLEMAS VARIACIONAIS NÃO CLÁSSICOS, ELEMENTOS FINITOS MISTOS E APLICAÇÕES AO TRATAMENTO DE MEIOS INCOMPRESSÍVEIS

Vitoriano Ruas
Departamento de Informática
PUC/RJ, Rio de Janeiro, Brasil

RESUMO

Partindo de um tratamento unificado e abrangente de problemas variacionais sob o ponto de vista matemático, baseado no conceito de fraca coercividade (ou condição inf-sup), chega-se às condições que garantem a boa escolha de métodos de elementos finitos para o cálculo de campos físicos descritos por equações diferenciais parciais.
Uma ênfase especial é dada às formulações mistas, as quais não correspondem a problemas coercivos ou positivos em geral. Várias aplicações de elementos finitos mistos estudados e usados atualmente para tais problemas são considerados, notadamente as relativas à simulação do comportamento de meios incompressíveis, e ilustrações de resultados numéricos são apresentadas.

## 1. TEORIA CLÁSSICA DOS PROBLEMAS VARIACIONAIS

Seja o problema variacional linear

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V, \text{ onde} \end{cases}$$

(i) $V$ é um espaço de Hilbert de norma $\|\cdot\|_V$

(ii) $a: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear contínua, isto é,

$$\|a\| = \sup_{\substack{u,v\in V\\ u,v\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_V \|v\|_V} < \infty$$

(iii) $L\in V'$, o dual topológico de $V$, isto é, $L: V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear contínua sobre $V$, ou seja:

$$\|L\| = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{L(v)}{\|v\|_V} < \infty$$

Nesse quadro, aplica-se o resultado seguinte amplamente difundido na literatura.

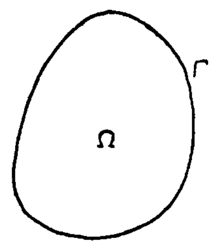
<u>Teorema de Lax-Milgram</u> (1954): Se sob as hipóteses (i), (ii)e (iii), $\underline{a}$ é também coerciva, isto é,

(iv) $\exists\alpha>0$ tal que $a(v,v)\geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v\in V$

então o problema $(P)$ tem uma solução única. $\square$

A hipótese de coercividade (iv) (juntamente com (i), (ii) e (iii)), é efetivamente satisfeita num sem número de problemas físicos, como por exemplo:

<u>Equação do calor estacionária</u>: Seja um corpo que ocupa uma região $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Dada uma fonte de calor $f$ e um coeficiente térmico $c\geq 0$ do corpo, deseja-se encontrar sua temperatura $u$ tal que:




$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{cases}$$

Problema variacional associado:

$$(P_1)\ \begin{cases} \text{Encontrar } u\in V \text{ tal que} \\ a(u,v) = \int_\Omega (\vec{\nabla} u\cdot \vec{\nabla} v + cuv) = \int_\Omega fv = L(v) \quad \forall v\in V \end{cases}$$

onde

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v / \int_\Omega |\nabla v|^2 < \infty \text{ e } v = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$$

As hipóteses (i), (ii) e (iii) são trivialmente satisfeitas por $V$, $\underline{a}$ e $\underline{L}$ se $\| v \|_V = \left[ \int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2 \right]^{1/2}$ e a coercividade de $\underline{a}$ ocorre se $c \geq 0$, isto é,

$$a(v,v) \geq \alpha \int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2 \quad \text{com } \alpha = 1.$$

Entretanto a coercividade não se aplicaria no mesmo exemplo se:

1º) $c<0$, com $|c|$ suficientemente grande.

No entanto o problema $(P)$ tem solução única, desde que $c$ não seja um valor próprio do operador $\Delta$, isto é:

$$c \neq \lambda \quad \text{onde } \lambda \text{ é tal que} \quad \begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

Observe-se que qualquer autovalor de $\Delta$ é negativo

2º) Para $c = 0$ escreveremos a equação do calor sob a forma

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{\nabla} u & \text{em } \Omega \\ -\, div\, \vec{p} = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

o que dá o <u>problema variacional misto</u>:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \vec{p} \in X \text{ e } u \in M \text{ tais que} \\ c(\vec{p},\vec{q}) + b(u,\vec{q}) = 0 & \forall \vec{q} \in X \\ b(v,\vec{p}) = G(v) & \forall v \in M \end{cases}$$

onde $c(\vec{p},\vec{q}) = \int_\Omega \vec{p} \cdot \vec{q}$ , $b(u,\vec{q}) = \int_\Omega u\, div \vec{q}$ e $G(v) = \int_\Omega f v$

$X = \{\vec{p} / \int_\Omega (|\vec{p}|^2 + |div\, \vec{p}|^2) < \infty\}$ e $M = L^2(\Omega) = \{v / \int_\Omega v^2 < \infty\}$

$$\|\vec{p}\|_X = \left[\int_\Omega (|\vec{p}|^2 + |div\, \vec{p}|^2)\right]^{1/2} \qquad \|v\|_M = \left[\int_\Omega v^2\right]^{1/2}$$

Observe-se que o problema $(Q)$ pode-se ser colocado na forma $(P)$ sobre o espaço $V = X \times M$, isto é:

$$(P_2) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (\vec{p},u) \in X{\times}M \text{ tal que} \\ a((\vec{p},u),\ (\vec{q},v)) = L\ ((\vec{q},v)) \qquad \forall (\vec{q},v) \in X{\times}M \end{cases}$$

onde

$$a(\vec{p},u),(\vec{q},v)) = \int_\Omega \vec{p}\cdot\vec{q} + \int_\Omega u \operatorname{div} \vec{q} + \int_\Omega v \operatorname{div} \vec{p} \quad \text{e}$$

$$L((\vec{q},v)) = \int_\Omega f\, v$$

A forma $\underline{a}$ visivelmente não é coerciva sobre $V$ porque $a((0,u),(0,u)) = 0 \quad \forall u$, mas $\|(0,u)\|_V = \|u\|_M \neq 0$, $u \neq 0$

## 2. TEOREMA DE LAX-MILGRAM GENERALIZADO

A coercividade da forma bilinear $\underline{a}$ é apenas uma condição suficiente para a boa colocação de $(P)$.

A condição necessária e suficiente é dada no teorema seguinte:

**Teorema (Lax-Milgram generalizado)**: Sob as hipóteses(i),(ii) e (iii), a condição necessária e suficiente para que $(P)$ tenha solução única é que $\underline{a}$ seja fracamente coerciva, isto é:

$$\text{(iv)} \quad \exists \alpha'>0 \text{ tal que } \forall u\in V \quad \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_V} \geq \alpha' \|u\|_V$$

$$\text{(iv)} \quad \exists \alpha''>0 \text{ tal que } \forall v\in V \quad \sup_{\substack{u\in V\\ u\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_V} \geq \alpha'' \|v\|_V$$

Demonstração: Suficiência: ver J. NEČAS [19] e I. BABUŠKA[ 3]
Necessidade: ver B. DUPIRE (tese de doutorado , INF, PUC/RJ,[6] ).

Obs: 1ª) Se $\underline{a}$ é simétrica, isto é, se $a(u,v)=a(v,u) \forall u,v \in V$ (iv)' e (iv)" são equivalentes.

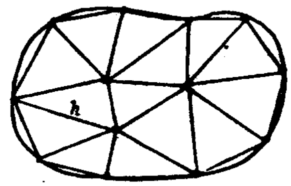
2ª) Se $\underline{a}$ é coerciva então $\underline{a}$ é fracamente coerciva com $\alpha'=\alpha''=\alpha$:

Dado $u\in V$ $\quad \displaystyle\sup_{v\in V} \frac{a(u,v)}{\|v\|_V} \geq \frac{a(u,u)}{\|u\|_V} \geq \alpha \|u\|_V$

$3^{\underline{a}}$) No caso dos exemplos $(P_1)$ e $(P_2)$ prova-se a coercividade fraca de $\underline{a}$ sobre o espaço $V$ respectivo usando argumentos de Análise Matemática [17] e [31].

## 3. APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS DE $(P)$

Introduzimos um subespaço $V_h$ de $V$, de dimensão finita, associado a uma malha de $\Omega$ de elementos finitos de diâmetro máximo $h$.




Assim em vez de resolvermos $(P)$ resolvemos o problema aproximado

$$(P_h)\begin{cases} \text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v \in V_h \end{cases}$$

O problema fundamental é estudar o erro $\| u-u_h \|_V$ dessa aproximação.

De acordo com resultados clássicos (p.ex.[ 4]), se $\underline{a}$ é coerciva, temos:

$$\text{(v)} \qquad \| u-u_h \|_V \leq \frac{\| a \|}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \| u-v_h \|_V .$$

Infelizmente, a fraca coercividade não se estende a subespaços, e se

(iv)' e (iv)" são satisfeitas, é preciso provar que para cada escolha do subespaço $V_h$, condições análogas são satisfeitas, isto é:

$$\text{(iv)} \qquad \exists \alpha_h' > 0 \text{ tal que } \forall u_h \in V_h \quad \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u_h, v_h)}{\| v_h \|_V} \geq \alpha_h' \| u_h \|_V .$$

$$\text{(iv)} \qquad \exists \alpha_h'' > 0 \text{ tal que } \forall v_h \in V_h \quad \sup_{u_h \in V_h} \frac{a(u_h, v_h)}{\| u_h \|_V} \geq \alpha_h'' \| v_h \|_V .$$

Neste caso, foi provado por B. DUPIRE (tese de doutorado INF. PUC/RJ, [6] ) que:

$$\text{(v)'} \qquad \| u-u_h \|_V \leq \frac{\| a \|}{\alpha_h'} \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \| u-v_h \|_V$$

<u>Obs</u> $1^{\underline{a}}$) Se $\underline{a}$ é coerciva a majoração clássica (v) se aplica.

2ª) O termo $\inf_{v_h \in V_h} \| u-v_h \|_V$ é majorado por resultados

clássicos da teoria da aproximação polinomial em espaços de Sobolev, na dimensão $n$.

Obtem-se tipicamente estimativas da forma [ 4 ]

$$\inf_{v_h \in V_h} \| u-v_h \|_V \leq C(u) h^{\mu} \qquad \mu>0$$

onde $C(u)$ é uma constante independente de $h$, e $\mu$ é um expoente positivo que depende da regularidade de $u$ e do grau dos polinômios usados no espaço $V_h$.

## 4. FORMULAÇÕES MISTAS

Um caso particular importante de problemas variacionais não coercivos é o de formulações mistas, como as do exemplo 2º), isto é:

$$(Q) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u,p) \in X \times M & \text{tal que} \\ c(u,v) + b(p,v) = F(v) & \forall v \in X \\ b(q,u) = G(q) & \forall q \in M \end{cases} \text{, onde}$$

- $X$ e $M$ são espaços de Hilbert com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_M$.
- $c$ é uma forma bilinear contínua sobre $X \times X$
- $b$ é uma forma bilinear contínua sobre $M \times X$, isto é:

$$\| b \| = \sup_{\substack{q \in M,\, v \in X \\ q,v \neq 0}} \frac{b(q,v)}{\| q \|_M \| v \|_X} < \infty$$

- $F \in X'$ e $G \in M'$.

Suponhamos que c seja simétrica. Aplicando o Teorema de Lax-Milgram generalizado, $(Q)$ tem solução única se e só se:

$$\exists \alpha>0 \text{ t.q. } \quad \forall (u,p) \in X \times M \quad \sup_{\substack{(v,q) \in X \times M \\ (v,q) \neq 0}} \frac{c(u,v)+b(p,v)+b(q,u)}{(\| v \|_X^2 + \| q \|_M^2)^{1/2}} \geq \alpha (\| u \|_X^2 + \| p \|_M^2)^{1/2}$$

Prova-se que tal condição equivale a:

- <u>Condição LBB</u>

(vi) $\exists\beta>0$ tal que $\forall q\in M$ $\displaystyle\sup_{\substack{v\in X\\ v\neq 0}} \frac{b(q,v)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M$

- <u>Fraca coercividade de c sobre o espaço U</u> ,

onde $U=\{v \,/\, v\in X,\ b(q,v)=0 \quad \forall q\in M\}$, isto é:

(vii) $\exists\gamma>0$ tal que $\forall u\in U$ $\displaystyle\sup_{\substack{v\in U\\ v\neq 0}} \frac{c(u,v)}{\|v\|_X} \geq \gamma \|u\|_X$

Na maioria das aplicações (vii) é trivialmente satisfeita.

No Ex. 2ª), por exemplo, c é coerciva sobre o espaço

$=\{\vec{q} \,/\, \int_\Omega v\, div\, \vec{q} = 0 \quad \forall v\in M\}$, isto é $\vec{q}\in U \Longleftrightarrow div\vec{q}=0$

Logo $c(\vec{q},\vec{q}) = \int_\Omega |\vec{q}|^2 \geq \gamma \int_\Omega (|\vec{q}|^2+|div\, \vec{q}|^2)$ $\quad \forall\vec{q}\in U$ com $\gamma=1$.

Por outro lado a condição (vi) é mais difícil de verificar, em geral.

## 5. ELEMENTOS FINITOS MISTOS

De forma natural aproxima-se o problema $(Q)$ por <u>elementos finitos mistos</u>, isto é:

Dados dois subespaços $X_h\subset X$ e $M_h\subset M$ de dimensão finita associados à malha de $\Omega$, resolvemos:

$$(Q_h)\begin{cases} \text{Encontrar } (u_h,p_h)\in X_h\times M_h & \text{tal que} \\ c(u_h,v_h)+b(p_h,v_h)=F(v_h) & \forall v_h\in X_h \\ b(q_h,u_h)=G(q_h) & \forall q_h\in M_h \end{cases}$$

O problema $(Q_h)$ não terá solução se a condição <u>LBB-discreta</u> não for satisfeita, isto é:

$(vi)_h$ $\exists\beta_h>0$ tal que $\forall q_h\in M_h$ $\displaystyle\sup_{\substack{v_h\in X_h\\ v_h\neq 0}} \frac{b(q_h,v_h)}{\|v_h\|_X} \geq \beta_h \|q_h\|_M$

Essa condição é equivalente à:

<u>Condição de posto</u>: A condição $(v_i)_h$ é satisfeita se e só se o <u>posto da matriz</u> $B$ de discretização de <u>$b$</u> é exatamente a <u>dimensão de $M_h$</u>, onde

$$B = \{b(\eta_i, \phi_j)\}\ , \text{ sendo } \{\eta_i\}_{i=1}^{\dim M_h} \text{ e } \{\phi_j\}_{j=1}^{\dim X_h}$$

bases arbitrárias de $M_h$ e $X_h$ respectivamente.

<u>Consequência</u>: Condição LBB-discreta $\Longrightarrow \dim M_h \leq \dim X_h$

<u>Obs:</u> Na prática constata-se que é preciso que $\frac{\dim X_h}{\dim M_h}$ não seja inferior a 4/3 $\forall h$. □

Pode-se provar que se $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\dim X_h}{\dim M_h} \simeq 1$ então forçosamente $\lim\limits_{h\to 0} \beta_h = 0$.

Ora as seguintes estimativas de erro se aplicam para $u_h$ e $p_h$

$$\| u-u_h \|_X \leq \frac{C}{\beta_h}[\inf_{\substack{v_h \in X_h \\ v_h \neq 0}} \| u-v_h \|_X + \inf_{\substack{q_h \in M_h \\ q_h \neq 0}} \| p-q_h \|_M] \quad (*)$$

$$\| p-p_h \|_M \leq \frac{C'}{\beta_h} \| u-u_h \|_X \quad (*)$$

Logo se $\lim\limits_{h\to 0} \beta_h = 0$ o método poderá divergir em $u$ e $p$ ou pelo menos em $p$.

<u>O caso mais favorável é aquele em que $\beta_h$ independe de $h$.</u>

## 6. <u>ALGUNS CASOS EM ESTUDO COM ÊNFASE A MEIOS INCOMPRESSÍVEIS</u>

Terminamos dando algumas aplicações da teoria apresentada que estão sendo considerados em nossas pesquisas atuais. Nesse quadro, a simulação do comportamento de meios in-

---

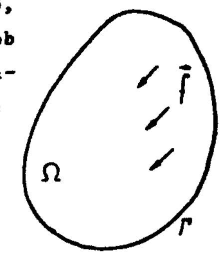
(*) Ver B.DUPIRE, tese dout.PUC/RJ, [6] para estimativas finas de $C$ e $C'$, constantes independentes de <u>h</u> se <u>$a$</u> é coerciva.

compressíveis ocupa um lugar de destaque.

### 6.1 - NOVOS ELEMENTOS PARA AS EQUAÇÕES DE STOKES

Como problema modelo básico para o estudo de meios incompressíveis (equações de Navier Stokes, elasticidade linear e não linear incompressível, etc.) vem-se procurando desenvolver novos elementos finitos mistos de tipo velocidade (deslocamento) - pressão para essas equações.

Sendo $\Omega$ a região de $\mathbb{R}^n$ de fronteira $\Gamma$, $n=2$ ou $3$, ocupada por um fluido de alta viscosidade $\nu$, sob a ação de um campo de forças $\vec{f}$, deseja-se encontrar $\vec{u}$ velocidade do fluido e $p$ a pressão nele reinante, tais que:




$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} & \text{em } \Omega \\ div\ \vec{u} = 0 & \Omega \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

Esse problema admite a formulação variacional simples:

$$(P_3) \begin{cases} \text{Encontrar } \vec{u} \in V = \{\vec{v} / \vec{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n \text{ com } div\ \vec{v} = 0\} \text{ t.q.} \\ \nu \int_\Omega \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V \end{cases}$$

No entanto, é muito difícil construir $V_h \subset V$ com elementos finitos, razão pela qual usa-se a formulação mista (mais natural neste caso):

$$(Q_1) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in X \text{ e } p \in M \text{ tais que} \\ \nu \int_\Omega \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}\vec{v} - \int_\Omega p\ div\ \vec{v} = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in X \\ \int_\Omega q\ div\ \vec{u} = 0 \quad \forall q \in M \end{cases}$$

onde $X = [H_0^1(\Omega)]^n$ e $M = L_0^2(\Omega) = \{q \,/\, q \in L^2(\Omega), \int_\Omega q = 0\}$

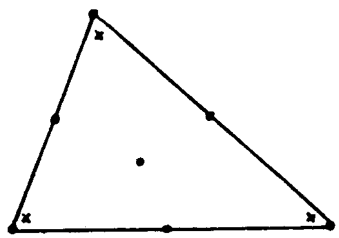
O problema $(Q_h)$, para ser bem colocado, tem que satisfazer a condição LBB-discreta, que neste caso é:

$$\exists \beta_h > 0 \text{ tal que } \forall q_h \in M_h \quad \sup_{\substack{\vec{v}_h \in X_h \\ \vec{v}_h \neq 0}} \frac{\int_\Omega q_h \, div \, v_h}{\| v_h \|_X} \geq \beta_h \, \| q_h \|_M$$

<u>Obs:</u> $a(\vec{u},\vec{v}) = \nu \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$ é coerciva e logo a condição (vii) é trivialmente satisfeita $(\alpha = \nu)$ .

<u>Exemplos de elementos desenvolvidos e em teste atualmente</u>

*(2D)*

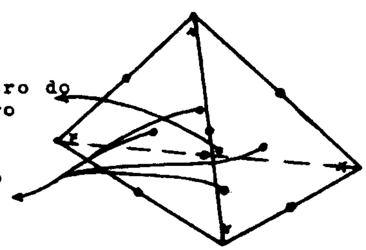


- • Nó velocidade: quadrática contínua em soma direta com a bolha cúbica do triângulo
- × Nó pressão: linear descontínua

CROUZEIX & RAVIART [5]

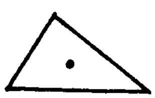
Recentemente B. DUPIRE introduziu a bolha quadrática do elemento para satisfazer exatamente a condição $div \ \vec{u}=0$ (ver [6].

*(3D)*




- • Nó velocidade: quadrática pseudo-contínua em soma direta com a bolha quártica do tetraedro.
- × Nó pressão: linear descontínua.

V.R. [28]



Representa valor de $\vec{v}_h$ nesse nó


Representa $\frac{9}{5\ell} \int_0^\ell \vec{v}_h \, ds - \frac{4}{5} \, \vec{v}_h(\ell/2)$

Em ambos os casos $\beta_h = 0(1)$ e $\| \vec{u}-\vec{u}_h \|_X + \| p-p_h \|_M = 0(h^2)$

## 6.2 - EQUAÇÕES DA CONVECÇÃO-DIFUSÃO

Embora não se trate necessariamente de problema relativo a meios incompressíveis, essas equações são consideradas como etapa básica para a resolução numérica das equações de Navier-Stokes.

Sendo $k$ o coeficiente de difusão de certo meio transportado com velocidade $\vec{b}$ dada onde,

$$|\vec{b}| >> k$$

e sujeito à "força" $f$ trata-se de encontrar a"distribuição" $u$ que tal

$$\begin{cases} -k\Delta u + \vec{b}\cdot\vec{\nabla}u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

Colocada na forma variacional essa equação dá o problema:

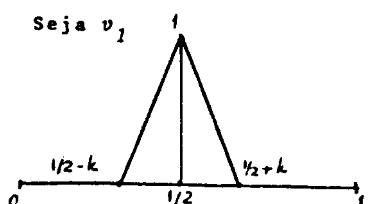
$$(P_4) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in H_0^1(\Omega) \\ \qquad \text{tal que} \\ k \int_\Omega \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v + \int_\Omega (\vec{b}\cdot\vec{\nabla}u)\, v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

$a(u,v) = k\int_\Omega \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v + \int_\Omega (\vec{b}\cdot\vec{\nabla}u)v$ não é coerciva em geral.

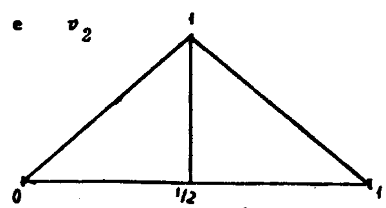
Exemplo em dimensão um: $b = x$ e $\Omega = (0,1)$

$$a(v,v) = k \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \int_0^1 x \frac{dv}{dx} v = k \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 v^2$$

Seja $v_1$




e $v_2$




temos $a(v_1,v_1) = 2 - \frac{k}{3} > 0$ e $a(v_2,v_2) = 4k - \frac{1}{3} < 0$

se $k < 1/12$.

É preciso encontrar aproximações que satisfaçam a fraca coercividade, donde os métodos corrente acima ("upwind finite element method"):

Estamos usando esquemas correntes acima diversos, notadamente:

1º) Esquemas de HEINRICH clássicos (ver por ex. [13 ])

Em dimensão 1: Perturbações exponenciais das funções de base dos elementos finitos lineares por pedaços como ilustrado abaixo:


2º) Esquema de TABATA(1983). (Ver p.ex. anais do VII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, H. FIGUEROA, M. TABATA & V.R.,[7] )

Ambos estão sendo adaptados e usados conjuntamente com um elemento de quatro nós dito quasilinear assimétrico (V.R.[27]) em 2D, desenvolvido para o tratamento de meios incompressíveis, visando sua aplicação na resolução das equações de Navier-Stokes (ver a seguir).

## 6.3 - EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSÍVEIS

Trata-se de encontrar um campo de velocidade $\vec{u}$ e a pressão $p$ de um fluido de viscosidade $\nu$ tais que para um dado campo de forças $\vec{f}$:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} & \text{em } \Omega\subset\mathbb{R}^n \quad n = 2 \text{ ou } 3 \\ div\ \vec{u} = 0 & \text{em } \Omega \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

Problema variacional misto:

$$(\tilde{Q}_1)\quad \begin{cases} \text{Encontrar } \vec{u}\in[H_0^1(\Omega)]^n \text{ e } p\in L_0^2(\Omega) \text{ tais que} \\ \nu\int_\Omega \vec{\nabla}\vec{u}\bullet\vec{\nabla}\vec{v} + \int_\Omega (\vec{u}\bullet\vec{\nabla})\vec{u}\bullet\vec{v} - \int_\Omega p \,div\, \vec{v} = \int_\Omega \vec{f}\bullet\vec{v} \quad \forall\vec{v}\in[H_0^1(\Omega)]^n \\ \int_\Omega q \,div\, \vec{u} = 0 \qquad \forall q\in L_0^2(\Omega). \end{cases}$$

Algoritmo de linearização em uso (M.CROUZEIX [10]) : Dado $\vec{u}^o$, encontrar $\vec{u}^m$ e $p^m$ aproximações de $\vec{u}$ e $p$, $m=1,2,\ldots,$ t.q

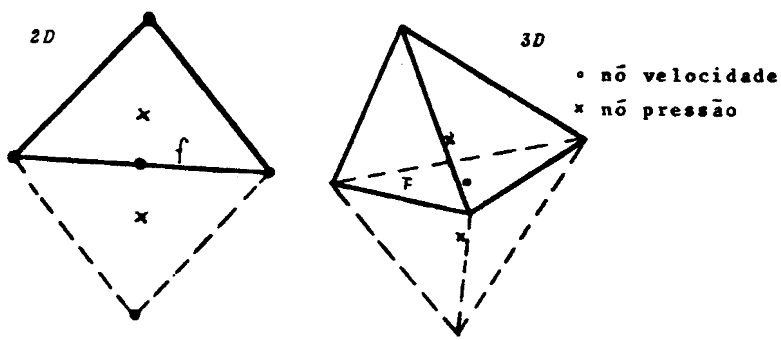
$$(Q_m)\quad \begin{cases} \nu\int_\Omega \vec{\nabla}u^m\bullet\vec{\nabla}v + \int_\Omega (\vec{u}^{m-1}\bullet\vec{\nabla})\vec{u}^m\bullet\vec{v} - \int_\Omega p^m \,div\, \vec{v} = \int_\Omega f\bullet\vec{v} \quad \forall\vec{v}\in[H_0^1(\Omega)]^n \\ \int_\Omega q \,div\, \vec{u}^m = 0 \qquad \forall q\in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

A resolução de $(Q_m)$ envolve duas dificuldades básicas:

1ª) As da equação da convecção-difusão se $Re = \nu^{-1} >> 1$.

2ª) As do problema de Stokes: trabalhar com métodos de elementos finitos mistos velocidade-pressão confiáveis (cond. LBB), convergentes e econômicos.

Estamos combinando as técnicas corrente acima de HEINRICH e TABATA a métodos de elementos finitos em 2D e 3D do tipo quasilineares assimétricos(*) para a velocidade e pressão constante, por triângulo ou tetraedro (V.R. 1981 [26])

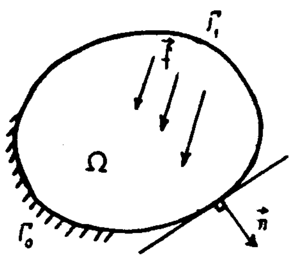



(*)Função linear sobre os lados (ou faces) dos elementos exceto o lado $f$ (face $F$) onde tem uma componente quadrática (cúbica).

A condição LBB-discreta é satisfeita para malhas criteriosamente construídas [ 26 ]. Partindo de um "solver" de Stokes construimos "solvers" de Navier-Stokes. Em 2D já está funcionando bem para números de Reynolds (*Re*) moderados.

## 6.4 - PROBLEMAS DE VISCOELASTICIDADE INCOMPRESSÍVEL COM COEFICIENTES DEPENDENTES DO TEMPO

Uma das aplicações industriais relativas a meios incompressíveis que está sendo considerada atualmente diz respeito a certos polímeros de comportamento viscoelástico. O problema em estudo é descrito por um modelo de Kelvin-Voigt como se segue:




Seja $\Omega$ corpo viscoelástico fixo em parte $\Gamma_0$ de seu bordo. Sendo $\vec{f}$ a carga à qual está submetido tem-se, para pequenos deslocamentos:

$\rho \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t^2} - \vec{div}\, \sigma + \vec{\nabla} p = \vec{f}$ em $\Omega$ (eq.do equilíbrio)

$\sigma = \dfrac{2}{3} E\, \varepsilon(\vec{u}) + \nu \dfrac{\partial \varepsilon(\vec{u})}{\partial t}$ (lei constitutiva)

$div\, \vec{u} = 0$ (incompressibilidade)

$\vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x),\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x,0) = \vec{u}_1(x)$ (cond. iniciais)

$\vec{u} = \vec{0}$ sobre $\Gamma_0$

$\sigma \cdot \vec{n} - p\, \vec{n} = 0$ sobre $\Gamma_1$

onde:

$\vec{u}$ : deslocamento

$p$ : pressão

$\sigma$ : tensor desviador de tensões

$\varepsilon\,(\vec{u})$: tensor de deformações , $\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \dfrac{1}{2}\left( \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

$E$ : módulo de elasticidade
$\nu$ : viscosidade cinemática } dependem do tempo

$\rho$ : densidade

Aproximação no tempo

Dado $\Delta t>0$ e $\vec{u}^0(x)$ calculamos $\vec{u}^m$, $\sigma^m$, $p^m$ aproximações de $\vec{u}$, $\sigma$ e $p$ no instante $m\Delta t$ por

$$\rho\ \frac{\vec{u}^m - 2\vec{u}^{m-1} + \vec{u}^{m-2}}{\Delta t^2} - div\ \sigma^m + \vec{\nabla} p^m = \vec{f}_m$$

$$\sigma^m = \frac{2}{3}\ E_m \varepsilon(u^m) + \nu_m\ \frac{\varepsilon(\vec{u}^m) - \varepsilon(\vec{u}^{m-1})}{\Delta t}$$

$$div\ \vec{u}^m = 0$$

$$\vec{u}^m = \vec{0}$$

$$\sigma^m \cdot \vec{n} - p^m\ \vec{n} = \vec{0}$$

onde $E_m = E(m\Delta t)$ , $\nu_m = \nu(m\Delta t)$ e $\vec{f}_m(x) = \vec{f}(x, m\Delta t)$

Formulação variacional:

Por simplicidade chamamos $\sigma^m$, $\vec{u}^m$ e $p^m$ de $\sigma$, $\vec{u}$ e $p$:

Encontrar $\vec{u}\in X$ , $\sigma\in S$ e $p\in M$ tais que

$$\frac{\rho}{\Delta t^2} \int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{v} + \int_\Omega \sigma\cdot\varepsilon(\vec{v}) - \int_\Omega p\ div\ \vec{v} = \int_\Omega (\vec{f}+\vec{f}')\cdot\vec{v} \qquad \forall\vec{v}\in X$$

$$\mu \int_\Omega \sigma\cdot\tau - \int_\Omega \varepsilon(\vec{u})\cdot\tau = \int_\Omega G.\tau \qquad \forall\tau\in S$$

$$\int_\Omega q\ div\ \vec{u} = 0 \qquad \forall q\in M \quad , \quad \text{onde:}$$

$= \{\vec{v}/\ \vec{v}\in[H^1(\Omega)]^3,\ \vec{v}=\vec{0}$ sobre $\Gamma_0\}$, $M=L^2(\Omega)$

$= [L^2(\Omega)]^{3\times 3}$, $\mu^{-1} = (\frac{2}{3}\ E_m + \frac{\nu_m}{\Delta t})$; $\vec{f}_1 = \rho\ \frac{2\vec{u}^{m-1} - \vec{u}^{m-2}}{\Delta t^2}$ ; $G = \frac{-\nu_m}{\Delta t}\ \varepsilon(\vec{u}^{m-1})$.

É interessante conservar as três variáveis por causa da dependência temporal de $E$ e $\nu$, (ver anais de VII CNMAC , V.R. & G.M.E.Q. ACQUADRO [ 1 ]) evitando-se a inversão de mais de uma matriz ao longo do tempo. Neste caso é preciso encontrar métodos de elementos finitos mistos com 3 variáveis que satisfaçam:

Sendo $X_h\subset X$ , $S_h\subset S$ e $M_h\subset M$ os espaços de aproximação de cada variável, associados à dada malha de $\Omega$ devemos ter:

$$\exists\ \beta_h' > 0 \text{ tal que } \forall \vec{v}_h \in X_h \quad \sup_{\tau_h \in S_h} \frac{\int_\Omega \tau_h \cdot \varepsilon(\vec{v}_h)}{\|\tau_h\|_S} \geq \beta_h' \ \|\vec{v}_h\|_X$$

$$\exists \beta_h'' > 0 \text{ tal que } \forall q_h \in M_h \quad \sup_{\vec{v}_h \in X_h} \frac{\int q_h \ div\ \vec{v}_h}{\|\vec{v}_h\|_X} \geq \beta_h'' \ \|q_h\|_M$$

As duas condições LBB-discretas acima são contraditórias se se deseja trabalhar com conjuntos $S_h$ e $M_h$ do mesmo tipo, o que é a escolha fisicamente natural e numericamente ótima.

Essa dificuldade foi resolvida em 2D, tomando-se para $X_h$ o espaço correspondente ao triângulo quasilinear assimétrico de quatro nós.

Obs: 1ª) Detalhes sobre os espaços $S_h$ ( $M_h$ ) associados a tal $X_h$ encontram-se em artigo em preparação [24].

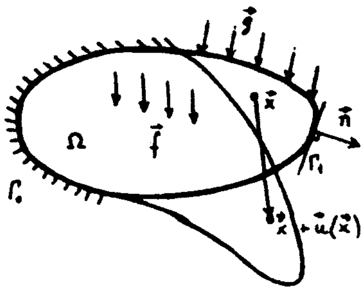
2ª) Programas utilizando essa metodologia foram desenvolvidos para o estudo do comportamento de certos polímeros para a Pirelli Cia. Ind. Bras.

3ª) $\beta_h'$ e $\beta_h''$ independem de $h$ donde a convergência

$\vec{u}_h \longrightarrow \vec{u}$, $p_h \longrightarrow p$ e $\sigma_h \longrightarrow \sigma$ em $X \times S \times M$ .

## 6.5 - PROBLEMAS DE ELASTICIDADE NÃO LINEAR INCOMPRESSÍVEL

Uma simulação numérica particularmente delicada que vem sendo considerada em nossas pesquisas se refere aos meios hiperelásticos com características de incompressibilidade. O problema pode ser descrito da maneira seguinte.




Dado um sólido hiperelástico $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ fixado numa parte $\Gamma_0$ de sua fronteira, submetido a forças volumétricas $\vec{f}$ e superficiais $\vec{g}$ deseja-se calcular o campo de grandes deslocamentos $\vec{u}$ resultante. Este é um mínimo local da energia potencial elástica $W$, isto é:

$$W(\vec{u}) = \underset{\substack{det(I+\vec{\nabla}\vec{v}) = 1 \\ \vec{v}\in X}}{Min} W(\vec{v})$$

$det\ (I+\vec{\nabla}\vec{v}) = 1$, onde $I$ é o tensor unitário, é a

Condição de incompressibilidade não linear para problemas com grandes deformações: $|\vec{\nabla}\vec{u}| >> 0$.

Materiais de Mooney - Rivlin, por exemplo, se enquadram nesse caso, para os quais:

$$W(\vec{v}) = \frac{E_1}{2}\int_\Omega (|I+\vec{\nabla}\vec{v}|^2-3) + \frac{E_2}{2}\int_\Omega (|adj(I+\vec{\nabla}\vec{v})|^2-3) - \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v} - \int_{\Gamma_1}\vec{g}\cdot\vec{v}$$

$E_1, E_2$; constantes de Mooney ($E_2=0$ no caso de deformações planas).
$adj\ A$ = transporta da matriz de menores de $A$.

Caso típico: Borracha, elastômeros.

Equações do equilíbrio (caso plano)

$$-E_1\ \Delta\vec{u} + di\vec{v}\ p\ adj^T(I+\vec{\nabla}\vec{u}) = \vec{f} \quad \text{em } \Omega$$

$$det\ (I + \vec{\nabla}\vec{u}) = 1 \quad \text{em } \Omega$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{sobre } \Gamma_0$$

$$E_1(\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} + \vec{n}) - p\ adj^T(I+\vec{\nabla}\vec{u})\ \vec{n} = \vec{g} \quad \text{sobre } \Gamma_1$$


$p$: pressão hidrostática e $\frac{\partial\vec{u}}{\partial n} = \vec{\nabla}\vec{u}\cdot\vec{n}$

Formulação variacional

$$(\tilde{Q}_2)\left\{\begin{array}{l} \text{Encontrar } \vec{u}\in X=\{\vec{v}/\vec{v}\in[H^1(\Omega)]^2,\ \vec{v}=\vec{0} \text{ sobre } \Gamma_0\} \\ \text{e} \qquad p\in M = L^\infty(\Omega) = \{q\ /\ \sup_{x\in\Omega}|q(x)|<\infty\} \text{ t.q.} \\ E_1\int_\Omega \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}\vec{v} - \int_\Omega p\ adj(I+\vec{\nabla}\vec{u})\cdot\vec{v} = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v} - E_1\int_\Omega div\ \vec{v} \quad \forall\vec{v}\in X \\ \int_\Omega q\ det(I+\vec{\nabla}\vec{u}) = \int_\Omega q \qquad \forall q\in M \end{array}\right.$$

Um bom método de elementos finitos de resolução de $(\tilde{Q}_2)$ deve satisfazer as condições seguintes:

Seja $X_h \subset X$ e $M_h \subset M$ .

1ª) A condição LBB-discreta não linear (P.LE TALLEC, 1980[16])

$$\exists \beta(\vec{u}) > 0 \text{ t.q. } \quad \forall q_h \in M_h \quad \sup_{\substack{\vec{v}_h \in X_h \\ \vec{v}_h \neq \vec{0}}} \frac{\int_\Omega q_h \, adj^T(I+\vec{\nabla}\vec{u}) \cdot \vec{\nabla}\vec{v}_h}{\| q_h \|_M \; \| \vec{v}_h \|_X} \geq \beta(\vec{u})$$

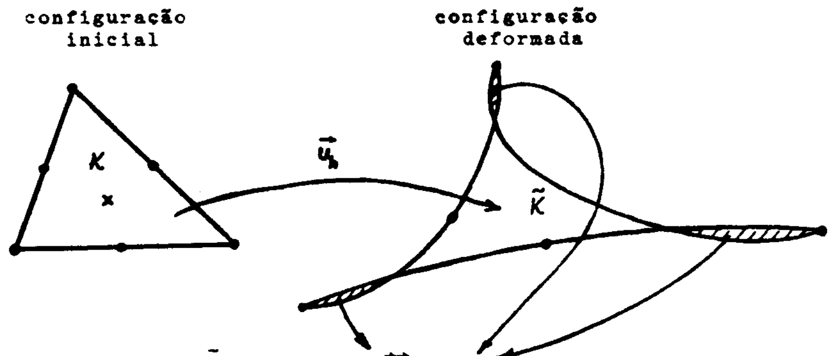
onde $\vec{u}$ é associada à uma solução do problema de minimização original.

Essa condição implica nas mesmas restrições sobre $X_h$ e $M_h$ que no caso linear (eq. Stokes por exemplo) , só que é mais difícil determinar $\beta_h$. Isto implica que $dim\ X_h > dim M_h$, $\forall h$.

2ª) $dim\ X_h$ não deve ser muito maior do que $dim\ M_h$, do contrário os elementos podem "virar ao avesso" em estado deformado.

Ex: $X_h$ : quadrático por triângulo

$M_h$ : Constante por triângulo

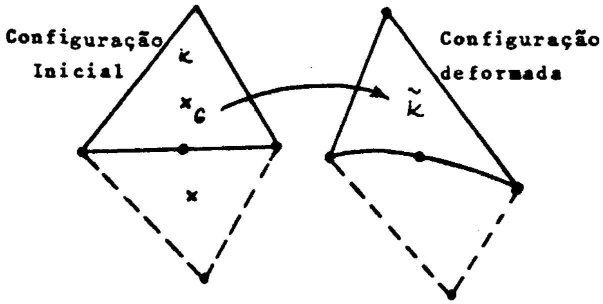



$Area(K) = Area(\tilde{K})$, mas $det(I+\vec{\nabla}\vec{u}_h) < 0$.

Esse par de espaços satisfaz a condição LBB, mas $dim\ X_h \doteq 4\ dim\ M_h$ e a condição de incompressibilidade só se satisfaz no sentido

$area(\tilde{K}) = \int_K det(I+\vec{\nabla}u_h) = \int_K 1 = area(K)$, mas localmente é possível que $det(I+\vec{\nabla}\vec{u}_h) < 0$!

Os elementos quasilineares assimétricos [26] representam uma alternativa equilibrada para superar ambas as dificuldades:




$det(I+\nabla u_h)=1$ em $G$ baricentro de $K \Rightarrow$ $area(\tilde{K})= area(K)$,

e a "virada ao avesso" é mais difícil de ocorrer.

- Um código 2D foi desenvolvido para peças axisimétricas usando um algoritmo de Lagrangeano Aumentado (GLOWINSKI& LE TALLEC [10] e [ 12]).

- Um código 3D puro encontra-se em estado avançado, usando o mesmo tipo de algoritmo e os elementos assimétricos de 5 nós tetraédricos (ver eq. Navier-Stokes).

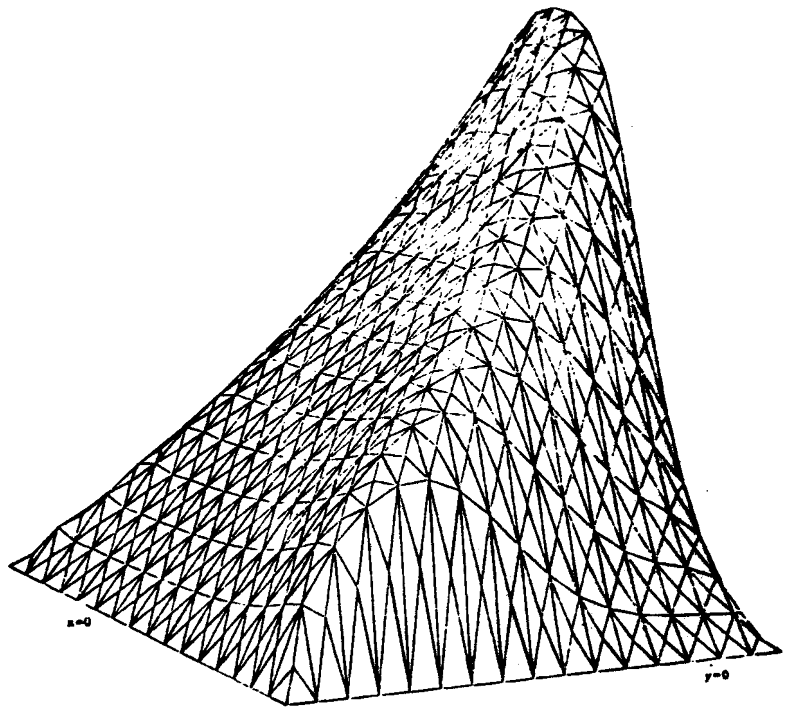
Obs: 1ª) Novos elementos assimétricos mais econômicos foram desenvolvidos recentemente para o caso 3D.

2ª) Testes para problemas modelo de solução analítica conhecida confirmam a eficiência dos métodos e dos códigos.

3ª) Recentemente o código 2D foi testado com sucesso em casos práticos encontrados na indústria de amortecedores.

## 7 - ILUSTRAÇÕES DE ALGUNS RESULTADOS OBTIDOS

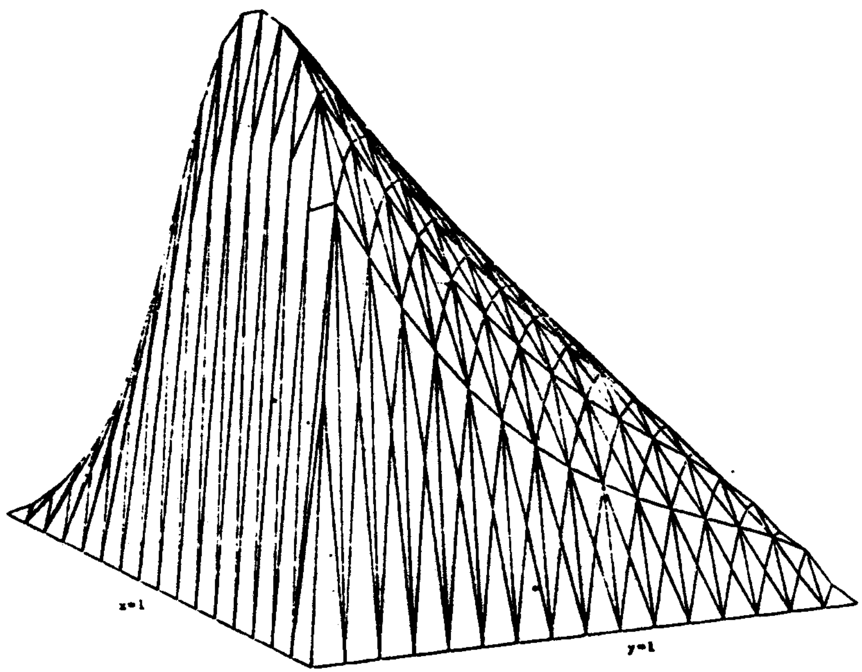
Para finalizar apresentamos ilustrações de soluções obtidas com a metodologia descrita para alguns problemas-modelo correspondentes aos paragráfos 6.2 e 6.5.




Vista da solução da equação da convecção-difusão.

$k = 10^{-3}$ e $\vec{b} = (y, 1/2 - x)$ .

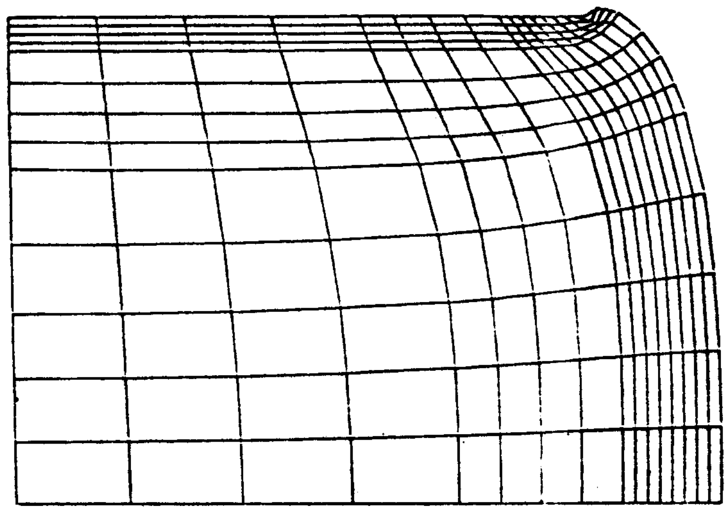
- Esquema de TABATA
- Elemento triangular assimetrico de 4 nós.




Vista da camada limite da solução
da equação da convecção-difusão com:

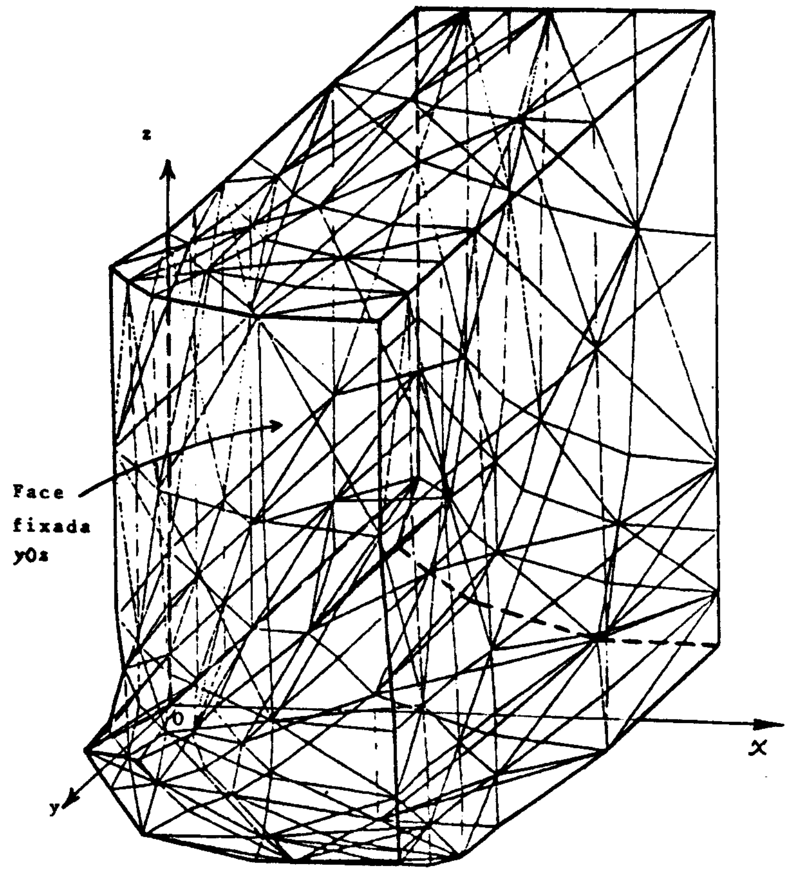
$k = 10^{-3}$ e $\vec{b} = (y, 1/2-x)$.

- Esquema da TABATA
- Elemento triangular assimétrico de 4 nós.



Vista de 1/4 da seção meridiana de um cilindro de borracha deformado por uma copressão axial de 30%.

- Elemento triangular assimétrico de 4 nós [25]
- Algoritmo de Lagrangeano aumentado [11] .




Vista de 1/8 de um cubo de borracha em estado deformado por uma compressão de 40% na direção x.

- Elemento tetraédrico assimétrico de [4] nós 26
- Algoritmo de Lagrangeano aumentado [16]

## REFERÊNCIAS

[1] G.M.E.ACQUADRO & V.RUAS, Resolução numérica de um problema de viscoelasticidade via elemento finitos mistos com penalização, Anais do VII Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, Campinas, 1984.

[2] R.A. ADAMS, Sobolev Spaces, Academic Press, N.Y. , 1975

[3] I. BABUŠKA, Error Bounds for finite element methods Numer. Math, 16, pp. 322-333, 1971.

[4] P.G. CIARLET, The finite element method for elliptic problems, North Holland, Amsterdam, 1978.

[5] M. CROUZEIX & P.A. RAVIART, Conforming and nonconforming finite element methods for solving stationary Stokes equations, RAIRO, R-3, pp. 33-76, 1973.

[6] B. DUPIRE, Problemas Variacionais, sua Aproximação e Formulações Mistas, Tese de doutoramento em Informática, PUC/RJ, èm impressao.

[7] H. FIGUEROA, V. RUAS, M. TABATA, Novo método de elementos finitos corrente acima para equações da convecção difusão em escoamentos incompressíveis, Anais do VII Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, Campinas, 1984.

[8] P.GERMAIN, Cours de Mécanique des Mileux Continus , Masson, Paris, 1973.

[9] V.GIRAULT &P.A. RAVIART, Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Lecture Notes , Springer Verlag, Heidelberg, 1979.

[10] R. GLOWINSKI & M.FORTIN, Méthodes de Lagrangien Augmenté, Dunod, Paris, 1982.

[11] R.GLOWINSKI & P.LE TALLEC, Numerical solution of problems in incompressible finite elasticity by augmented lagrangian methods, SIAM J. Appl. Math., Vol. 42, Nº 2, pp. 400-429, 1982.

[12] R.GLOWINSKI, P.LE TALLEC& V. RUAS, Approximate solution of nonlinear problems in incompressible finite elasticity, in Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Ed. W. Wunderlich, E.Stein, K. J. Bathe, Springer Verlag, Berlin, 1981.

[13] J.C. HEINRICH, P.S. HUYAKORN, O.C. ZIENKIEWICZ & A.R. MITCHELL, An unpwind finite element scheme for 2D convective transport equations, Int. J. Numer. Meths. Eng. v. 11, p. 131-143, 1977.

[14] T.IKEDA, Maximum Principle in Finite Element Models for convection-Diffusion Phenomena, Kinokuniya, Tokyo, 1983.

[15] P.LE TALLEC & V. RUAS, On the convergence of the bilinear velocity- constant pressure finite element method in viscous flow problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Engin., em impressão.

[16] P. LE TALLEC, Les problèmes d' équilibre d'un corps hyperélastique incompressible en grandesdeformations, Thése doctorat d'Etat, Univ. Paris VI, 1981.

[17] J.L. LIONS & E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes, Dunod, Paris, 1968.

[18] M. MOONEY, Jour Appl. Phys. 11, p. 583-, 1940

[19] J.NEČAS, Sur une méthode pour résoudre des équations aux dérivées partielles du type elliptique voisine de la variationnlle, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 16,4, pp. 305-326, 1962.

[20] J.T. ODEN & REDDY, J.N., Introduction of the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wilwy, N.Y. 1976.

[21] R.S. RIVLIN, Large Elastic Deformations of isotropic materials, Phil. Trans. R. Soc., A, 241, p. 379, 1948.

[22] P.A. RAVIART & J.M. THOMAS, Une Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, Masson, Paris 1983.

[23] V. RUAS, Indrodução aos Problemas Variacionais, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1979

[24] ———, Consistent stress-displacement finite element simulation of incompressible viscoelastic behavior,a sair.

[25] ——, A class of asymmetric simplicial finite element methods for solving finite incompressible elasticity problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Engin., 27-3, pp. 319-343, 1981.

[26] ———, Méthodes d'élements finis en élasticité incompresible non linéaire et diverses contributions à l'approximation des problems aux limites, Thése de Doctorat d'Etat, Université Paris VI, 1982.

[27] ———, Méthodes d'éléments finis quasilinéaires en déplacements pour l'étude de milieux incompressible , RAIRO-Analyse Numérique, 17-2, p. 161-194, 1983.

[28] ———, Finite element solution of 3D viscous flow problems using non standard degrees of freedom, Japan Jour. Appl. Maths.,em impressão

[29] M. TABATA, $L^{\infty}$- analysis of the finite element method, Lecture Note in Num. Appl. Anal. Kinokuniya, 1 , pp. 25-62, 1979

[30] R. TEMAM, Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[31] J.M. THOMAS, Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes, Thése de Doctorat d'Etat, Univ. Paris VI, 1977.

[32] F. THOMASSET, Implementation of Finite Element Methods for Navier- Stokes Equations, Springer-Verlag, N.Y. 1981.