

**ESQUEMAS DE FLUJO LIMITADO EN GRILLAS AUTOADAPTIVAS PARA
ECUACIONES HIPERBOLICAS UNIDIMENSIONALES**

por Gerardo M. Grandi,

CNEA, Ger. Seg. Radiológica y Nuclear,
Av. Libertador 8250, 1429 Buenos Aires, Argentina

RESUMEN

Se presenta una familia de esquemas de flujo limitado en grillas que se ajustan a la solución computada. El uso de este tipo de esquemas asegura una alta resolución de las ondas de choque y rarefacción debido a su escasa difusión numérica. El movimiento de la grilla está determinado de forma tal de minimizar su distorsión espacio-temporal. Se discuten estrategias de implementación del algoritmo ya conocidas y se propone una nueva estrategia basada en la acotación de la máxima variación permitida a la solución por celda y el porcentaje de puntos que se asignan a las zonas con gradientes abruptos. Finalmente se muestran experimentos numéricos para la ecuación de ondas lineal, Burgers y ecuaciones de la dinámica de gases para mostrar la capacidad de la grilla para capturar ondas de choque.

ABSTRACT

A family of Flux Limited finite-differences schemes in self adapting grids are presented. This kind of schemes resolve rarefaction and shock waves very sharply due to their low numerical viscosity. The criteria employed to adapt the grid minimizes the grid distortion both in space and time. Several known implementation strategies are discussed and a new one is proposed, based on a bound on the maximum cell variation of the solution and the percentage of points assigned to the fronts. Several solutions of the one dimensional 1-D linear advection equation, Burgers' equation, and gas dynamic are shown to illustrate the grid adaptation to capture shocks.

INTRODUCCION

En el presente trabajo se considera el problema de valores iniciales para un sistema de ecuaciones de conservación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0; \quad x \in \mathbb{R}; \quad t \geq 0 \quad (1-a)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (1-b)$$

Donde $u(x,t)$ es un vector de m incógnitas, y el flujo $f(u)$ es una función vectorial de m componentes. Si los autovalores de la matriz Jacobiana $A(u) = f_u$ son reales y el conjunto de los autovectores a derecha (R^1, R^2, \dots, R^m) es completo entonces (1) es hiperbólico. Los autovalores de la matriz Jacobiana (a^1, a^2, \dots, a^m) son las velocidades características del sistema de ecuaciones.

En lo que sigue se consideran esquemas en diferencias finitas conservativos, que involucran 5 puntos para la solución de (1) en grillas autoadaptivas. El recinto de integración se divide en N intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ $i=0, N-1$ como se muestra en la figura 1.

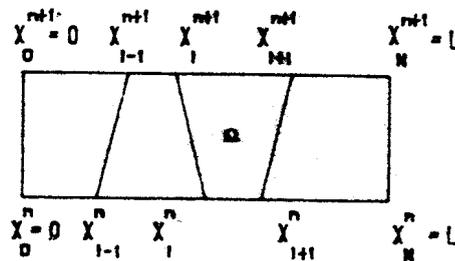


Figura 1: Vista esquemática de la grilla.

En cada uno de los intervalos la solución numérica v aproxima en promedio a la solución exacta $u(x,t)$:

$$v_{i+1/2}^n = \frac{1}{x_{i+1}^n - x_i^n} \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} u(x,t) dx \quad (2)$$

El dominio físico (x,t) es transformado en un dominio de integración (ζ, τ) , de acuerdo a:

$$\zeta = \zeta(x,t), \quad \tau = \tau(t) \quad (3)$$

Integrando (1) en el dominio Ω , se obtiene el símil discreto de (1) escrito en forma conservativa:

$$\Delta x_{i+1/2}^{n+1} v_{i+1/2}^{n+1} = \Delta x_{i+1/2}^n v_{i+1/2}^n - \Delta t^n [F_{i+1} - F_i] \quad (4)$$

donde $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ y F es el flujo numérico consistente con el flujo físico $f(u)$ que pasa a través de la línea que

conecta x^{n+1} y x^n . Se demuestra (ver [1] y las referencias allí citadas) que la solución numérica de (3) converge a la solución generalizada de (1) si:

a) la variación total con respecto a x de la solución por diferencias finitas está acotada respecto de t , Δx y Δt .

$$VT(u^n) = \sum |v_{i+1/2}^n - v_{i-1/2}^n| \leq k, \quad \forall t, \Delta t, \Delta x \quad (5-a)$$

b) El esquema en diferencias es consistente con la condición de entropía, que físicamente significa que la solución de (1) debe ser el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon \frac{\partial u}{\partial x}) \quad (5-b)$$

La manera de satisfacer las condiciones (5) es utilizar esquemas disipativos que incorporen, a través del error de truncación, derivadas de orden par de la variable u . Los esquemas corriente arriba (primer orden), introducen una difusión numérica tal que se satisface (5). La misma es excesiva y en consecuencia alisan las discontinuidades de la solución de (1). Los esquemas del tipo Lax-Wendroff (segundo orden), no satisfacen el criterio (5) dando lugar a soluciones sin sentido físico. En años recientes se han desarrollado esquemas en diferencias^[2,4,5] llamados de flujo limitado (FL), que satisfacen las condiciones (5) y son de segundo orden. Los mismos se caracterizan por preservar la monotonicidad de la solución al no crear nuevos extremos ni aumentar los existentes. En lo que sigue se obtiene la expresión del flujo numérico F para un esquema de flujo limitado en una grilla móvil. A continuación se establecen criterios para la adaptación de la grilla. Finalmente se muestran algunos experimentos numéricos.

ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS DE FLUJO LIMITADO

Por simplicidad se considera en primer lugar el problema escalar ($m=1$). En este caso la expresión de F es:

$$F_i = \hat{F}(v_{i-1/2}, v_{i+1/2}) - (x_t v)_i; \quad x_t = \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} \quad (6)$$

donde \hat{F} es el flujo numérico consistente para una grilla fija. De acuerdo a las aproximaciones adoptadas para F_i y v_i se obtienen esquemas de distinto orden.

La expresión de F para un esquema de primer orden con difusión adicional $Q(v)$ es:

$$F_i^{LOV} = \frac{1}{2} \left[(f(v_{i+1/2}) + f(v_{i-1/2})) - x_{ti} (v_{i+1/2} + v_{i-1/2}) - \frac{1}{\lambda_i} Q(\bar{v}_i) (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) \right] \quad (7-a)$$

donde:

$$\lambda_i = \Delta t^n / (x_{i+1/2}^n - x_{i-1/2}^n), \quad \bar{v}_i = \lambda_i \bar{a}_i \quad \text{y} \quad \bar{a}_i = a_i - x_{ti} \quad (7-b)$$

Para $Q(\nu)$ se utiliza la expresión⁽²⁾

$$Q(\nu) = \begin{cases} |\nu| & \text{si } |\nu| < 2\delta \\ \nu^2 / (4\delta) + \delta & \text{si } |\nu| \geq 2\delta \end{cases}$$

con $\delta \leq 0.5$. El valor de δ es un compromiso entre la resolución del esquema y la condición (5-b). Se adoptó $\delta=0.1$.

La expresión de F para un esquema Lax-Wendroff L-W es:

$$F_i^{HIGH} = \frac{1}{2} \left[(f(v_{i+1/2}) + f(v_{i-1/2})) - x_{t_i} (v_{i+1/2} + v_{i-1/2}) - \frac{1}{\lambda_i} (\bar{v}_i)^2 (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) \right] \quad (8)$$

Un esquema en diferencias finitas de flujo limitado puede obtenerse mediante el siguiente procedimiento:⁽⁴⁾

- i) Se calcula el flujo numérico de bajo orden F^{LOW} que satisface la condición de entropía (5-b).
- ii) Se calcula el flujo numérico de alto orden F^{HIGH} .
- iii) Se calcula el flujo antidifusivo $F^{AD} = F^{HIGH} - F^{LOW}$.
- iv) Se calcula el limitador ρ tal que se cumplan las condiciones suficientes⁽⁵⁾ para satisfacer (5-g).
- v) Se calcula el flujo limitado: $F^M = F^{LOW} + \rho F^{AD}$.

Mediante el procedimiento anterior se obtiene:

$$F^M = F^{LOW} + \left[\begin{array}{l} \rho(r_i^+) \bar{a}_i^+ \bar{a}_i^- (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) - \\ - \rho(r_i^-) \bar{a}_i^- \bar{a}_i^+ (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) \end{array} \right] \quad (9-a)$$

donde:

$$\bar{a}_i^+ = \frac{1}{2} \left[\bar{a}_i + (\lambda_i)^{-1} Q(\bar{v}_i) \right], \quad \bar{a}_i^- = \frac{1}{2} \left[\bar{a}_i - (\lambda_i)^{-1} Q(\bar{v}_i) \right],$$

$$\alpha_i^+ = \frac{1}{2} (1 - \lambda_i \bar{a}_i^+), \quad \alpha_i^- = \frac{1}{2} (1 + \lambda_i \bar{a}_i^-)$$

$$r_i^+ = \frac{\bar{a}_{i-1}^+ \alpha_{i-1}^+ (v_{i-1/2} - v_{i-3/2})}{\bar{a}_i^+ \alpha_i^+ (v_{i+1/2} - v_{i-1/2})}$$

y

$$r_i^- = \frac{\bar{a}_{i+1}^- \alpha_{i+1}^- (v_{i+3/2} - v_{i+1/2})}{\bar{a}_i^- \alpha_i^- (v_{i+1/2} - v_{i-1/2})} \quad (9-b)$$

Para el limitador $\rho(r)$ existen diversas opciones. En el presente trabajo se utilizó la expresión de Van Leer⁽⁵⁾:

$$\rho^{VL}(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|}$$

Si en 9 se hace $\rho=0$ se recupera el esquema de primer orden (7) y haciendo $\rho=1$ se recupera el esquema de L-W (8)

La extensión de este esquema para un sistema de n ecuaciones se realiza mediante el algoritmo de linealización de Roe¹⁰. El primer paso consiste en reemplazar el problema no lineal (1) por un problema "localmente" linealizado:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u_L, u_R) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1-c)$$

donde la matriz $A(u_L, u_R)$ depende de los estados a izquierda y derecha de cada punto de cálculo. Roe impone que la matriz $A(u_L, u_R)$ cumpla:

- i) $A(u_L, u_R) (u_R - u_L) = f(u_R) - f(u_L)$
- ii) Los autovalores de $A(u_L, u_R)$ sean reales y sus autovalores linealmente independientes.

Los invariantes de Riemman w del problema (1-c) están relacionados con las variables u a través de la relación:

$$du = \sum_{k=1}^m dw^k R^k \quad (11)$$

en consecuencia los invariantes de Riemman pueden ser vistos como las componentes del vector du en la base (R^k) . Expresando (11) en diferencias finitas se tiene:

$$v_{i+1/2} - v_{i-1/2} = \sum_{k=1}^m \beta_i^k R_i^k \quad (12)$$

donde los β_i^k son las componentes del salto $v_{i+1/2} - v_{i-1/2}$ en la base (R^k) . En virtud de la definición de $A(u_L, u_R)$ vale:

$$f(v_{i+1/2}) - f(v_{i-1/2}) = \sum_{k=1}^m \beta_i^k a_i^k R_i^k \quad (13)$$

A cada componente β_i^k del salto se le aplica el esquema (3-7-9) y se obtiene finalmente, la expresión para el flujo numérico F para un sistema de n componentes:

$$\begin{aligned} F_i = & \frac{1}{2} \left[(f(v_{i+1/2}) + f(v_{i-1/2})) - x_{li} (v_{i+1/2} + v_{i-1/2}) \right] - \\ & - \frac{1}{\Delta x_i} \sum_F q(v_i^+) \beta_i^k R_i^k + \\ & + \sum_F \left[p(r_i^+) a_i^{+k} a_i^{-k} - p(r_i^-) a_i^{-k} a_i^{+k} \right] \beta_i^k R_i^k \end{aligned} \quad (14)$$

y donde los a_i^k , α^k y r^k se definen como en (7-b) y (9-b).

ADAPTACION DE LA GRILLA

Existen varias técnicas^{13,7-12)} para distribuir los puntos de cálculo en el recinto de integración. Entre ellas merecen mencionarse las basadas en principios variacionales,¹⁷⁻²⁰⁾ principio de equidistribución de puntos,¹⁵⁻¹⁶⁾ y atracción de puntos. Hemos elegido¹⁷⁾ el camino de los métodos variacionales debido a que los mismos

parecen trabajar bien en dos o más dimensiones.^[8] Un algoritmo de generación de grillas adaptivas debe poder:

- A1) modificar el número de nodos de manera de mantener acotado el error de truncación.
- A2) llevar puntos a aquellas zonas hacia donde pueden moverse las discontinuidades.
- A3) Minimizar la distorsión de la grilla. Lo que implica en 1D que la relación de tamaño entre celdas vecinas debe estar acotada.
- A4) Reducir las "oscilaciones" temporales (esto es la trayectoria de los nodos no debe ser en zig-zag), teniendo en cuenta la evolución de la grilla.

ADAPTACION ESPACIAL

La grilla se obtiene minimizando el funcional^[7]

$$I_1 = \int_0^l \frac{\xi_x^2(x)}{w(x)} dx \quad (15)$$

$\xi_x(x)$ puede ser interpretada como la densidad de puntos de la grilla y $w(x)$ es la función de peso cuya definición se posterga por el momento. La ecuación de Euler-Lagrange (E-L) derivada de (15) es:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\xi_x(x)}{w(x)} \right] = 0 \quad (16)$$

que implica:
$$\frac{\xi_x(x)}{w(x)} = c = \text{constante} \quad (17)$$

Para problemas en 2 o más dimensiones la ecuación de E-L da lugar a una ecuación del tipo Poisson no lineal que debe ser resuelta iterativamente.^[9] Para problemas 1D la transformación del plano físico al computacional puede hacerse en forma explícita. En primer lugar se obtiene la constante c por normalización de (17) en el recinto de integración $[0, l]$:

$$\int_0^l \xi_x(x) dx = \xi(l) - \xi(0) = l = c \int_0^l w(x) dx = c \eta(l)$$

o sea:
$$c = \left[\int_0^l w(x) dx \right]^{-1} = (\eta(l))^{-1} \quad (18)$$

introduciendo (18) en (17) e integrando entre 0 y x se obtiene la transformación deseada:

$$\xi(x) = \left[\int_0^l w(x) dx \right]^{-1} \left[\int_0^x w(s) ds \right] \quad (19)$$

Los puntos $\{x_i\}$, $i=1, N-1$ se toman de manera tal que la variable ξ esté equiespaciada ($\Delta \xi = 1/N$) definiendose $x_0 = 0$ y $x_N = l$.

En consecuencia los x_i quedan definidos mediante:

$$\int_0^{x_i} w(s) ds = \frac{i}{N} \int_0^l w(s) ds \quad (20)$$

Para resolver (20) se utiliza un algoritmo explícito debido a Boor:⁽¹¹⁾

- i) En el conjunto de puntos (x_i^n) $i=0, N$ del nivel t^n se calcula $w(x_i^n)$ utilizando la solución v^n .
- ii) Se hace pasar una poligonal $Pw(x)$ por los puntos $(x_i^n, Pw(x_i^n))$.
- iii) Se integra $Pw(x)$ usando la regla de los trapecios, obteniéndose $Iw(x)$.
- iv) Se invierte la función $Iw(x)$ de forma tal de hallar los (x_i^{n+1}) , $i=1, N-1$ que satisfacen:

$$x_i^{n+1} = Iw\left(\frac{i}{N} \eta\right)^{-1}$$

Resolviendo N ecuaciones cuadráticas en x pues al haber utilizado una interpolación lineal a trozos $Iw(x)$ es una función parabólica a trozos.

Para obtener la grilla inicial se parte de una grilla uniforme y se itera hasta alcanzar un error prefijado.

DEFINICION DE LA FUNCION DE PESO $w(x)$

Diversas funciones de peso han sido reportadas en la literatura.⁽¹⁰⁻¹²⁾ Para este trabajo se ha elegido la función de peso propuesta por Dwyer:⁽¹²⁾

$$w(x) = \alpha + \beta |u_x| + \gamma |u_{xx}| \quad (21)$$

donde α , β , y γ son constantes de peso a determinar en función de la calidad de la solución deseada. La elección de esta función de peso:

- i) permite tratar simultaneamente zonas de gradientes fuertes y zonas donde la solución tiene extremos. En problemas con discontinuidades severas el uso de la derivada segunda puede introducir errores. En ese caso basta tomar $\gamma=0$.
- ii) permite relacionar facilmente las constantes de peso con cotas de variación de la solución.

Reemplazando (21) en (18) y (19) se obtiene:

$$\eta(t) = \alpha l + \beta \int_0^l |u_x| dx + \gamma \int_0^l |u_{xx}| dx \quad (22)$$

$$\xi(x) = \eta(t)^{-1} \left[\alpha l + \beta \int_0^x |u_x| dx + \gamma \int_0^x |u_{xx}| dx \right] \quad (23)$$

A fin de fijar los valores de las constantes de peso conviene definir los números:

$$R_1 = \eta(t)^{-1} \beta \int_0^l |u_x| dx, \quad R_2 = \eta(t)^{-1} \gamma \int_0^l |u_{xx}| dx \quad (24)$$

que pueden ser interpretados como el porcentaje de puntos asignados a la derivada primera y segunda respectivamente. A partir de estas definiciones es posible obtener dichas constantes siguiendo distintas estrategias. En lo que sigue se describen las mismas, por brevedad, para el caso simple en que $\gamma=0$.

ESTRATEGIA DE NUMERO DE PUNTOS FIJO

En este caso el número de puntos de la grilla (N) se fija. El valor de la constante α se fija arbitrariamente en $\alpha = 1/l$. A partir del valor de R_1 , que es un dato de entrada al programa, se obtiene $\beta = R_1 / [(1-R_1) \int |u_x| dx]$.

ESTRATEGIA DE NUMERO DE PUNTOS VARIABLE [13]

En este caso se fija una cota (ϵ) para la máxima variación permitida a la variable u, esto es:

$$|\Delta u| \cong |u_x| \Delta x \leq \epsilon \quad (25)$$

y se obtiene el número de puntos N para satisfacer (25). La ecuación (22) se reescribe:

$$\eta(t) = \alpha l + \beta \int_0^l |u_x| dx = N_0 \epsilon + N_1 \epsilon \quad (26)$$

donde N_0 es el número de puntos utilizados si u fuese "suave" y N_1 el número de puntos asignados a u_x . Utilizando las ecuaciones (22), (23) y (26) se puede acotar $|u_x| \Delta x$:

$$\begin{aligned} |u_x| \Delta x &= (\beta)^{-1} [\eta(t) / N - \alpha \Delta x] \leq \eta(t) / (N \beta) = \\ &= [(N_0 + N_1) / (N \beta)] \epsilon \end{aligned}$$

Para satisfacer (25) basta tomar $\beta=1$ y $N = N_0 + N_1 + 1$. El valor de N_1 se obtiene de (26): $N_1 = \text{INT}(\epsilon^{-1} \int |u_x| dx)$, y fijado el valor de N_0 se obtiene $\alpha = N_0 \epsilon / l$.

En la implementación computacional de este algoritmo N_0 y ϵ son datos de entrada. El valor de N_1 se actualiza ciclo a ciclo excepto si: $0.5 < N_1^{n+1} / N_1^n < 1.5$. Si el número de puntos debe ser modificado entonces una vez generada la grilla (x_i^{n+1}) se realiza el siguiente procedimiento:

- i) Se calcula la grilla $(x_i^n) = (x_i^{n+1})$, $i=0, N^{n+1}$.
- ii) Con (x_i^n) , (u_i^{n+1}) , $i=0, N^n$ y (x_i^n) , $i=0, N^{n+1}$ se calcula (u_i^n) , $i=0, N^{n+1}$ interpolando linealmente.

ESTRATEGIA DE NUMERO DE PUNTOS VARIABLE II

La estrategia anterior, mantiene N_0 constante lo que puede dar lugar a que la grilla tenga severas distorsiones debido al alto porcentaje de nodos que se asignan a los gradientes luego de varios refinamientos. Por esto, se propone una nueva estrategia donde son datos de entrada el valor de la cota (ϵ) y R_1 . El valor de α es fijado en forma arbitraria: $\alpha=1/l$. A partir de las ecuaciones (22-24) se puede acotar $|u_x| \Delta x$:

$$|u_x| \Delta x \leq \frac{1}{N R_1} \int |u_x| dx - \alpha \Delta x < \frac{1}{N R_1} \int |u_x| dx < \epsilon$$

de donde se obtiene $N = \text{INT} \left(\frac{1}{\epsilon R_1} \int |u_x| dx \right) + 1$. Una vez fijado N , se procede a determinar β como en el algoritmo de número de puntos fijo $\beta = R_1 / \left[(1-R_1) \int |u_x| dx \right]$.

ALISADO ESPACIAL DE LA FUNCION DE PESO

Para satisfacer los criterios A2 y A3 se introduce un alisado de la función de peso de la forma:

$$w(x_i) \sim \sum_j (\sigma)^{|k-j|} w(x_j) \quad 0 < \sigma < 1$$

En la implementación actual la suma se extiende sobre todos los nodos de la red. En futuras versiones se prevé considerar sólo los nodos vecinos a fin de reducir el tiempo de cálculo.

CRITERIO DE ADAPTACION TEMPORAL

Para satisfacer el criterio A4 se puede minimizar el funcional propuesto por Grandi y Ferreri:^[7]

$$I_2 = \int_0^l \frac{1}{w(x)} \left[\zeta_x^2(x) - \lambda_1 \left[\zeta_x(x) - \zeta_x^n(x) \right]^2 \right] dx$$

La minimización de este funcional en 1D da lugar a una ecuación de $E_{[7]}$ no lineal que debe ser resuelta iterativamente. A fin de mantener el carácter explícito de la generación de la grilla a que da lugar el algoritmo de Boor se propone el reemplazo del criterio anterior por un promedio entre la grilla $(x_i), i=0, N$ calculada por el algoritmo de Boor y la grilla $(x_i^n), i=0, N$ al tiempo t^n :

$$x_i^{n+1} = (1 - \omega) x_i^n + \omega x_i^0$$

donde $\omega = \omega_0 \exp(-\Delta t/\tau) + [1 - \exp(-\Delta t/\tau)]$, ω_0 es una constante (del orden de 0.3 a 0.5 en los experimentos numéricos realizados), Δt es el paso de tiempo utilizado y τ es un tiempo característico de la grilla. Si $\omega \rightarrow 0$ se utiliza la grilla vieja y si $\omega \rightarrow 1$ se usa la grilla sin alisado temporal. El valor de ω debe ser lo más próximo a 1.

para que las discontinuidades de la solución sean capturadas eficazmente. Los experimentos realizados muestran que el alisado temporal con $\omega \sim 0.3-0.5$ es indispensable para obtener la grilla de cálculo inicial.

DISCUSION DE RESULTADOS

Problema 1: Ondas viajeras en direcciones opuestas

El primer ejemplo considera dos ondas gaussianas (u_1, u_2) que viajan en direcciones opuestas con velocidades $\alpha_1=1$ y $\alpha_2=-1$ respectivamente. Las condiciones iniciales del problema fueron las siguientes:

$u_1(x, 0) = \exp(-(x - 30)^2 / 5)$; $u_2(x, 0) = \exp(-(x - 70)^2 / 5)$
para $0 \leq x \leq 100$.

En la función de peso $w(x)$ se consideró la influencia de la derivada primera y segunda debido a la forma de onda inicial. La estrategia utilizada para la adaptación fue de puntos variables 1. Los parámetros de adaptación utilizados fueron:

$$\begin{aligned} N_{\text{inicial}} &= 20 & N_0 &= 5 \\ \epsilon_1 &= 0.15 \text{ (cota de } |\Delta u| \text{)}, & \epsilon_2 &= 0.1 \text{ (cota de } |\Delta u_x| \text{)} \\ \sigma &= 2/3 & \omega_0 &= .5 & \tau &= 5 \cong \omega \end{aligned}$$

La integración se realizó con el esquema (14) con $\rho=1$. El número final de puntos fue $N = 47$. En la figura (2-a) se comparan los resultados numéricos y analíticos para $t=40$. Puede observarse que los resultados numéricos siguen satisfactoriamente los analíticos. Sólo se observan las conocidas oscilaciones del esquema de L-W en las colas de las ondas. Si se considera solamente la derivada primera entonces el máximo de la solución resulta atenuado debido a que la función de peso no lleva puntos a esta zona. En la figura (2-b) se muestra las trayectorias de los nodos de la grilla. Se observa que localmente la velocidad de la grilla coincide con las de las ondas. En la figura (2-c) se muestra el logaritmo de la densidad de puntos en la grilla final. La máxima densidad alcanzada en este tiempo es equivalente a una grilla uniforme con 200 nodos. En la figura (2-d) se grafica la relación $\Delta x_{i+1} / \Delta x_i$ a fin de observar el grado de distorsión de la grilla. Para el parámetro de alisado utilizado se observa dicha relación varía entre 0.8 y 1.4. Si el parámetro de alisado disminuye entonces la distorsión aumenta.

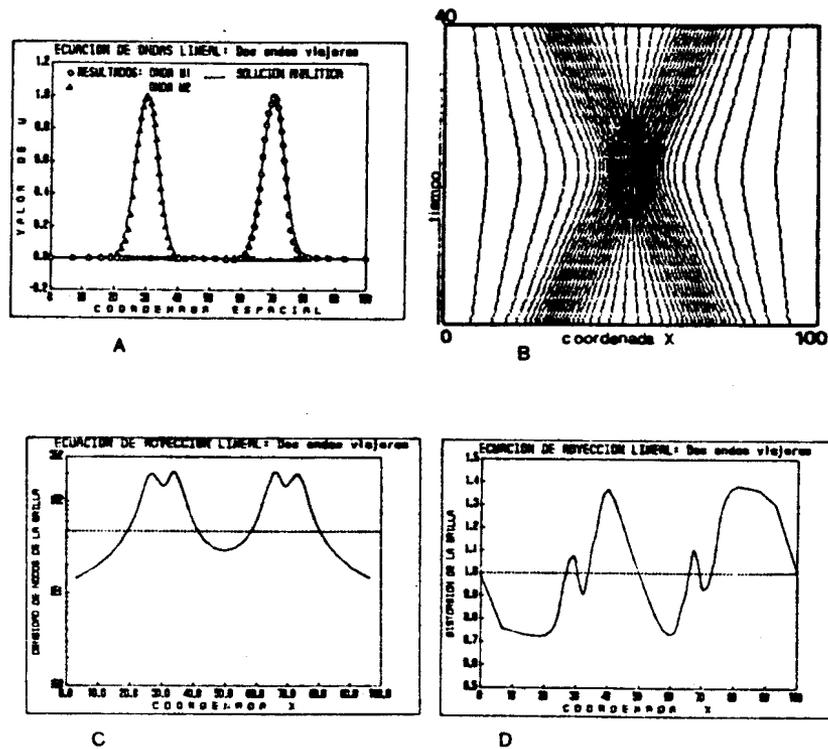


Figura 2: Ecuación de advección lineal. Ondas viajeras en direcciones opuestas.
a) resultados b) trayectoria de la grilla
c) densidad de puntos d) distorsión de la grilla.

Problema 2: Ecuación de Burgers inviscida

El segundo problema considera la ecuación de Burgers inviscida, $f(u) = 0.5 u^2$. La condición inicial considerada:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 0.5 \\ \text{sen } (2\pi(x-0.5)) + \text{sen } (\pi(x-0.5)) & \text{si } 0.5 \leq x \leq 1.5 \\ 0 & \text{si } 1.5 < x \leq 2. \end{cases}$$

es suave pero genera una onda de choque para $t \geq 0.5$. En la función de peso se consideró de la derivada primera. La estrategia de adaptación utilizada fue de puntos variable II.

Los parámetros utilizados fueron:

$$\begin{array}{llll}
 N_{\text{inicial}} = 20 & N_{\text{final}} = 30 & R_1 = 0.7 & c = 0.125 \\
 \sigma = 2/3 & \omega_0 = 0.5 & \tau = 0.05 &
 \end{array}$$

La integración numérica se realizó con el esquema (14) con el limitador de Van Leer. En la figura (3-a) se comparan los resultados para $t=1$ utilizando la grilla adaptada y una grilla uniforme de 200 nodos, siendo la misma satisfactoria. En la figura (3-b) se muestra la evolución temporal de la grilla. Para $t \sim 0.5$ la grilla se refina automáticamente. A partir de ese instante la velocidad local de la grilla coincide con la velocidad de la onda de choque. En las figuras (3-c) y (3-d) se muestra la densidad de puntos y la distorsión de la grilla respectivamente. La densidad de puntos máxima es 300. La distorsión varía entre 0.6 y 1.4.

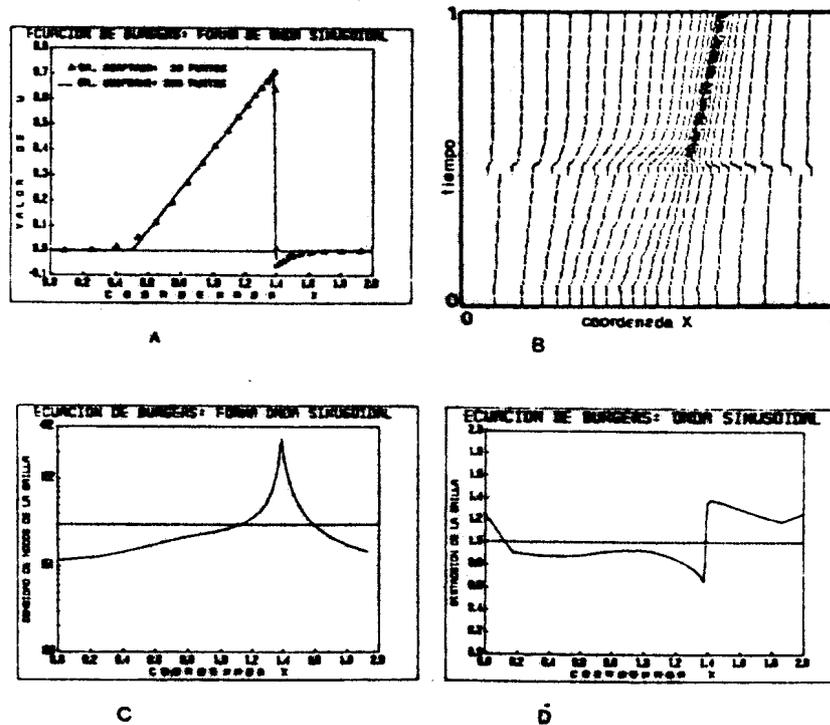


Figura 2: Ecuación de Burgers. a) solución obtenida b) trayectoria de la grilla c) densidad de puntos d) distorsión de la grilla.

Problema 3: Problema del tubo de choque.

El tercer problema involucra la dinámica de gases y fue extraído de Sod.⁽¹⁹⁾ El problema se inicia con un gas caliente a alta densidad ($\rho=1, p=1$) en la región $0 \leq x \leq 0.5$ separado por una membrana de un gas frío a baja densidad ($\rho=0.125, p=0.1$) en la región $0.5 < x \leq 1$. Al ser retirada la membrana una onda de choque viaja hacia la zona de baja densidad y una onda de rarefacción hacia la de alta densidad. Los dos fluidos están separados por una onda de contacto.

La función de peso utilizada consideró los gradientes de la densidad y la energía interna. La estrategia de números de puntos fijos fue utilizada con los siguientes parámetros:

$$N = 50 \quad R_1 = 0.4 \quad \sigma = 0.5 \quad \omega_0 = 0.3 \quad \tau = 0.001$$

En la figura (4-a) se muestra la energía interna para $t=0.1415$. Se puede observar un buen ajuste con la solución analítica. Solamente el comienzo y final de la onda de expansión están ligeramente alisados. La densidad de nodos en la onda de contacto es del orden de 300 ($\Delta x \cong 3 \cdot 10^{-3}$) y en la onda de choque del orden de 200 ($\Delta x \cong 5 \cdot 10^{-3}$). La onda de contacto está resuelta en 6 intervalos ($x_{TEOR} = 0.6312$, $x_{NUM} = 0.635 \pm 0.01$) y la onda de choque en 4 intervalos ($x_{TEOR} = 0.7479$, $x_{NUM} = 0.7487 \pm 0.009$). Los errores en la ubicación de los frentes están en acuerdo con los valores de densidad de puntos alcanzados. En la figura (4-b) se muestra las trayectorias de la grilla. Puede observarse como los nodos de la misma siguen localmente las velocidades de propagación de las tres ondas.

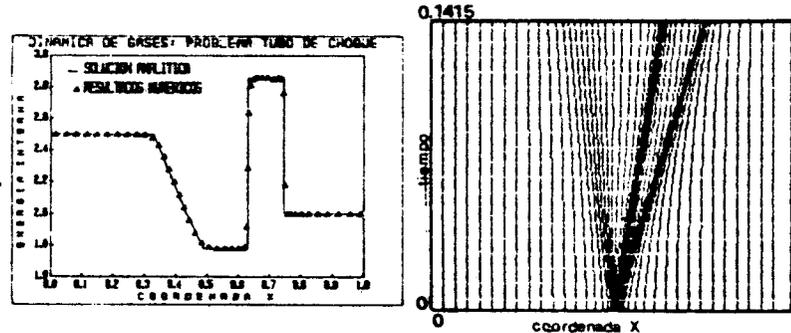


Figura 4: Problema de tubo de choque.
a) resultados obtenidos. b) trayectoria de la grilla.

CONCLUSIONES

La forma de cálculo propuesta combina eficazmente dos caminos, grillas adaptivas y esquemas de FL, para la resolución de (1) dentro del paradigma de captura de discontinuidades. El primer camino es utilizado a menudo con esquemas con difusión artificial. Si bien la resolución de las ondas de choque es adecuada, no ocurre lo mismo con las ondas de expansión. El uso de esquemas de FL, de segundo orden, reduce sensiblemente el alisado de las ondas de expansión como se había previsto en [7]. El uso de estos esquemas mejora sensiblemente la resolución de los frentes. El criterio de adaptación espacial con la estrategia de implementación propuesta, basada en la acotación de la variación de la solución y el porcentaje de puntos asignados a las discontinuidades, permite detectar la formación de discontinuidades (problema 2) o bien seguir varias discontinuidades simultáneamente (problema 3) en forma eficiente con un número relativamente bajo de puntos. El algoritmo de adaptación es general y no requiere conocer las velocidades de los frentes.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea agradecer al Ing. J.C. Ferreri por la lectura del manuscrito y los valiosos aportes que mejoraron su redacción final.

REFERENCIAS

- [1] HARTEN A., LAX P. and VAN LEER B., On Upstream differencing and Godunov-Type Schemes for Hiperbolic Conservation Laws, SIAM Review, Vol. 25, No. 1, pp.35-61, (1983).
- [2] HARTEN AMI, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws", J.Comput. Phys., 49, pp. 357-393 (1983).
- [3] HARTEN AMI and HYMAN J., "Self Adjusting grid Methods for One Dimensional Hyperbolic Conservation Laws", J. Comput. Phys., 50, pp. 235-269 (1983).
- [4] SWEBY P.K., "High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws", SIAM J. Numerical Anal., Vol. 21, No.25, pp. 995-1011 (1984).
- [5] VAN LEER BRAM, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. II Monotonicity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme". J.Comp. Phys., 14, pp.361-370, (1974).
- [6] ROE P.L., Approximate Riemman Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, J. Comput. Phys., 43, 357-372, (1981).

- [7] GRANDI G. and FERRERI J.C., Two-Dimensional Adaptive Grid Finite Difference method for Conservation Equations, Proc. of Sixth Int. Conf. on Numerical Methods in Laminar & Turbulent Flows, C. Taylor, et al (Eds.), Swansea, July 1989, Pineridge Press, 2, pp. 1942-1950, (1989).
- [8] BRACKBILL J.V., "A variational method for adaptive grid generation", LA-UR-83-2493 DE83017312, (1983).
- [9] BELL, J.B. and SCHUBIN, G.R., "An adaptive Grid Finite Difference Method for Conservation Laws." J.Comp. Phys., 52, pp. 569-591 (1983).
- [10] DORFI E. and DRURY L., "Simple Adaptive Grids for 1-D Conservation Laws", J.Comp. Phys., 69, pp. 175-195 (1987).
- [11] VERWER J., BLOM J. and SANZ-SERNA J., "An adaptive Moving Grid for One-Dimensional Systems of Partial Differential Equations", J. Comp. Phys., 82, pp. 454-486 (1989).
- [12] DWYER H.A., "Adaptive Numerical Methods for reacting flows", Physica 20D, pp.142-154 (1986).
- [13] SOD G., A Survey of Several Finite Difference Methods for System of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, J. Comput. Phys., 27, 1-31, (1978).

