UN MÉTODO DE PETROV-GALERKIN PARA LAS ECUACIONES DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

Padra Claudio
Pierini Jorge
División Mecanica Computacional
Centro Atomico Bariloche

RESUMEN

Los métodos de Petrov-Galerkin han sido utilizados para evitar las inexactitudes y oscilaciones que se producen con los métodos de Galerkin cuando lo aplicamos a problemas de convección-difusión. En este trabajo, proponemos seleccionar un espacio aproximante apropiado para un dado espacio test. Así, obtenemos un estimador a posteriori del error asociado a dicha elección. Más aún, mostramos que se puede recuperar la quasi-optimabilidad de la solución usando estos espacios.

Basandonos en el concepto de simetrización introducido por Barret - Morton [1984] , encontramos una cota general del error. Mostramos que para el problema de convección-difusión en una dimensión la formulación el método de Petrov-Galerkin obtenido es equivalente, en forma numérica, al de volumenes de control basado en elementos finitos introducida por S. Patankar [1980].

ABSTRACT

Galerkin methods applied to diffusion - convection problems produce inaccuracies and oscillations. Petrov-Galerkin methods have been introduced by several authors to eliminate these problems.In this work we propose to select an appropiate trial space for a given test space based on a posteriori error analysis of the finite element approximation. Thus, we obtain a posteriori error estimate associated with it. Moreover, we show that the quasi - optimability may be recovered by using these spaces.

Based on the symetrization concept introduced by Barret-Morton [1984], we found a general error bound. We show that for the diffusion -convection problem in one dimension the Petrov-Galerkin formulation gives the same algebraic system of equations that the formulation known as the control volume based on finite element method (CVFEM) introduced by S. Patankar [1980].

1 - INTRODUCCION

Dada una ecuación diferencial, una solución obtenida por el método de elementos finitos U se llama :

- óptima en la norma $\| \cdot \|$ si se verifica :

$$\| u - U \| = \inf_{V \in S^h} \| u - V \|$$

- quasi-óptima en la norma $\| \cdot \|$ si existe una constante C , independiente de los coeficientes de dicha ecuación y de la malla, tal que :

$$\| u - U \| \leq C \inf_{V \in S^h} \| u - V \|$$

donde S^h es el espacio de funciones base y u es la solución exacta. Numericamente, la perdida de la quasi-optimabilidad se expresa en la forma de oscilaciones espúreas en U. Muchos autores han propuesto distintas formulaciones para eliminarlas. Algunas de ellas dadas por medio de métodos de Petrov-Galerkin, donde la dificultad es seleccionar adecuadamente los espacios de funciones base y de funciones peso.

Barret y Morton [2,3] propone elegir un espacio de funciones peso para un dado espacio de funciones base. En el presente trabajo, proponemos elegir un espacio de funciones base apropiado para un dado espacio de funciones peso, basandonos en un análisis a posteriori del error de la aproximacion dada por el método de elementos finitos, obteniendo un estimador del error asociado con él. Este es un U-estimador en el sentido de Babuska y Rheinboldt [1].

El trabajo tiene el siguiente lineamiento : en las secciones 2,3 presentamos el problema continuo y el esquema de su discretización ; en la sección 4 seleccionamos el espacio base y consideramos la construcción de un estimador del error para el caso unidimensional. En la sección 5 damos una acotación general del error con la cual se recupera la quasi - óptimabilidad y en la seccion 6 mostramos la equivalencia numérica con la formulación en volumenes de control introducida por S. Patankar [5] . Finalmente, en la última parte del trabajo , aplicamos las mismas ideas al caso bidimensional exhibiendo un estimador del error con resultados numéricos.

2 - EL PROBLEMA CONTINUO

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$. Sea Γ su frontera. Consideremos el siguiente problema de convección - difusión :

$$\begin{aligned} &A\,u(x) = f(x) \quad , \quad \forall\, x \in \Omega \\ &u|_{\Gamma_1} = g \quad ; \quad u|_{\Gamma_2} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde

$$A\,u = -\,\mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}(u)) + \vec{b}\ \mathrm{grad}(u) \tag{2.2}$$

el coeficiente de difusión $k(x)$ es positivo, el campo convectivo de velocidades $\vec{b}$ es incompresible ($\mathrm{div}\,\vec{b} = 0$) y la frontera

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es tal que : $\Gamma_1 = \{\, x \in \Gamma : \vec{b}\,\vec{n} \geq 0 \,\}$

es no vacia y n es la normal exterior

Sea $H^1(\Omega)$ el espacio de Sobolev de funciones en $L^2(\Omega)$ con primeras derivadas en $L^2(\Omega)$; suponiendo que $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ definimos :

$$H^1_E = \{\, v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = g \,\} \tag{2.3}$$

$$H^1_{E_0} = \{\, v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0 \,\} \tag{2.4}$$

Entonces la solución débil del problema (2.1) es una función u en $H^1(\Omega)$ que satisface :

$$B(u,v) = (f,v) \qquad \forall\, v \in H^1_0(\Omega) \tag{2.5}$$

donde

$$B(u,v) = \int_\Omega (k\ \mathrm{grad}(u) - \vec{b}\,u)\ \mathrm{grad}(v)\,dx + \int_{\Gamma_1} u\,v\,\vec{b}\,\vec{n}\,d\alpha \tag{2.6}$$

3 - ESQUEMA DE APROXIMACIÓN

Sea $\mathcal{Z}_h$ una triangulación de Ω. Asumiremos que Γ y g son tales que nuetro espacio base $S^h \subsetneq H^1(\Omega)$ y nuestro espacio test $T^h \subsetneq H^1(\Omega)$ son generados por las bases $\{\phi_i\}$ y $\{\psi_i\}$, respectivamente. Podemos escribir :

$$S^h_\varepsilon = S^h \cap H^1_\varepsilon \quad ; \quad S^h_{\varepsilon_0} = S^h \cap H^1_{\varepsilon_0} \quad ; \quad T^h_{\varepsilon_0} = T^h \cap H^1_{\varepsilon_0} \tag{3.1}$$

Entonces una aproximación de (2.1) es :

Encontrar $U \in S^h_\varepsilon$ tal que :

$$B(U, \psi_i) = (f, \psi_i) \qquad \forall \; \psi_i \in T^h_{\varepsilon_0} \tag{3.2}$$

El problema ahora es : dado T^h elegir funciones de forma apropiadas para simularel proceso de convección-difusión .

4 - EL PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

Ahora consideremos el problema unidimensional :

$$-a\,u'' + b\,u' = f \qquad \text{en } (0,1) \tag{4.1a}$$

$$u(0) = u_0 \quad ; \quad u(1) = u_1 \tag{4.1b}$$

entonces : $B(u, v) = (a u' - b u, v')$ (4.2)

Sea τ_h : $0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = 1$ con $h_i = x_i - x_{i-1}$ para $1 \leq i \leq n$ y sea $T^h = \langle\{\psi_i\}\rangle$ donde las ψ_i son las funciones base standard continuas y lineales a trozos , que satisfacen : $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}$

Supongamos S^h conocido y sea $u_h \in S$ dada por el método de elementos finitos , es decir :

$$B(u_h, v) = F(v) \qquad \forall\ v \in T_0^h \tag{4.3}$$

entonces si u es la solución de (2.1) resulta

$$B(u - u_h, v) = 0 \qquad \forall\ v \in T_0^h \tag{4.4}$$

Sea $v \in C^0(\Omega)$ y la interpolante usual de v , $I_h v$ en T dada por :

$$I_h v = \sum_{i=0}^{n} v(x_i)\ \psi_i \tag{4.5}$$

Ahora , por (4.4) e integrando por partes tenemos :

$$B(u - u_h, v) = B(u - u_h, v - I_h v) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [(-a(u - u_h)')' + b(u - u_h)'](v - I_h v)\ dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f + (a\ u_h')' - b\ u_h'](v - I_h v)\ dx \tag{4.6}$$

Consideremos la proyección $\Pi : L^2(\Omega) \longrightarrow M$ donde $M = \{\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i \ / \ c_i \in \mathbb{R}\}$ y χ_i es la función característica en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces :

$$B(u - u_h, v) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f + ((a - \Pi a)\ u_h')' - (b - \Pi b)\ u_h'](v - I_h v)\ dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a_i\ u_h'' - b_i\ u_h'](v - I_h v)\ dx \tag{4.7}$$

donde $a_i = \Pi a$, $b_i = \Pi b$ en $[x_{i-1}, x_i]$. Ahora, elegimos las funciones base tales que $a_i u_h'' - b_i u_h' = 0$ en $[x_{i-1}, x_i]$ y obtenemos :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (1-\mathrm{EXP}(\beta_i (x-x_{i-1})/h_i))/(1-\mathrm{EXP}(\beta_i)) & \text{if } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (\mathrm{EXP}(\beta_{i+1}(x-x_i)/h) - \mathrm{EXP}(\beta_{i+1}))/(1-\mathrm{EXP}(\beta_{i+1})) & \text{if } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \quad \text{if } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{4.8}$$

donde $\beta_i = (b_i / a_i)\, h_i$, entonces

$$B(u - u_h, v) \leq \sum_{i=1}^{m} \| f + ((a-\pi a) u_h')' - (b-\pi b) u_h' \|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \| v - I_h v \|_{L^2(x_{i-1},x_i)}$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{m} \left(\| f \|_{L^2(x_{i-1},x_i)} + \| ((a-\pi a) u_h')' \|_{L^2(x_{i-1},x_i)} + \| (b-\pi b) u_h' \|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \right) h_i \| v' \|_{L^2(x_{i-1},x_i)}$$

$$\leq C \left(\sum_{i=1}^{m} e_i^2 \right)^{1/2} | v |_{H_0^1(\Omega)} \tag{4.9}$$

donde :

$$e_i^2 = \left(\| f \|_{L^2(x_{i-1},x_i)} + \| ((a-\pi a) u_h')' \|_{L^2(x_{i-1},x_i)} + \| (b-\pi b) u_h' \|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \right) h_i \tag{4.10}$$

entonces, por densidad y la condición inf-sup obtenemos :

$$\| u - u_h \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{i=1}^{m} e_i^2 \right)^{1/2} \tag{4.11}$$

Además, de (4.10) y (4.11) se observa que para $f = 0$ y a , b constantes por elemento entonces $u \equiv u_h$

5 - ACOTACIÓN GENERAL DEL ERROR

Dada una forma bilineal $B_o(\cdot,\cdot)$, simétrica continua y coercitiva en $H_{\varepsilon_o}^1 \times H_{\varepsilon_o}^1$, entonces en virtud del teorema de representación de Riesz existe un operador $R: H_{\varepsilon_o}^1 \to H$ tal que

$$B(v, w) = B_o(Rv, w) \tag{5.1}$$

Supongamos que elegimos un espacio de funciones base tal que $R(S_0^h) = T_0^h$. Ahora, podemos enunciar :

Teorema 5.1 : Supongamos que $B(\cdot , \cdot)$ es continua y coercitiva en $H_{B_0}^1 \times H_{B_0}^1$ y coercitiva en $S_0^h \times T_0^h$, es decir, existen constantes positivas C_1 , C_2 (con C_2 dependiendo de S_0^h y T_0^h) tales que :

$$| B(u , v)| \leq C_1 \| u \|_{B_0} \| v \|_{B_0} \qquad \forall \ u,v \in H_{B_0}^1 \qquad (5.2)$$

$$\inf_{V\in S_0^h} \sup_{W\in T_0^h} \frac{| B(V , W)|}{\| V \|_{B_0} \| W \|_{B_0}} \geq C_2 \qquad (5.3)$$

donde $\| u \|_{B_0} = B_0(u , u)^{1/2}$, entonces existe una única solución U de (3.2) y además, el error entre U y la solución u de (1.1) satisface :

$$\| u - U \|_{B_0} \leq (1 + C_1 /C_2) \inf_{V\in S_0^h} \| u - V \|_{B_0} \qquad (5.4)$$

Demostración: Sea R^* el operador adjunto de R , entonces

$$B(u , v) = B_0 (u , R^* v) \qquad (5.5)$$

y el resultado se sigue del teorema 2.2 de [3]

Observación : Consideremos el problema unidimensional (4.1) con coeficientes a , b constantes y condiciones de Dirichlet homogeneas $u_0 = u_1 = 0$
Elegimos la siguiente forma bilineal simetrica y coercitiva :

$$B_0 (u , v) = \int_0^1 a \ u' \ v' \ dx \qquad (5.6)$$

resolviendo (5.1) obtenemos :

$$R (u)(x) = u(x)-(b/a) \int_0^x u(s) \ ds + (b/a) \ \hat{u} \ x \qquad (5.7)$$

donde : $\hat{u} = \int_0^1 u(s) \ ds$

es fácil verificar que :

$$\text{span}\ \{ R\phi_i \} = \text{span}\ \{ \psi_i \} = T_0^h$$

donde ϕ_i , ψ_i ,son las dadas previamente. Entonces, las hypotésis del teorema 5.1. se satisfacen. Además, la solución es óptima en $\| \cdot \|_{B_a}$. Para demostrarlo, consideremos el siguiente problema auxiliar :

Hallar $U^* \in S_0^h$ tal que :

$$B(U^*, W) = B(u , W) \qquad W \in S_0^h \tag{5.8}$$

es decir U^*es la proyección de u en S_0^h en la norma $\| \cdot \|_{B_a}$ con lo cual :

$$\| u - U^* \|_{B_a} = \inf_{V \in S_0^h} \| u - V \|_{B_a}$$

Por otro lado,

$$B (U - U^*, U - U^*) = B (u - U , U - U^* - R^*(W)) \qquad \forall \quad W \in T_0^h$$

tomando : $R^*(W) = U - U^*$ (pues $R^* : T_0^h \dashrightarrow S_0^h$ es un isomorfismo) tenemos que $U \equiv U^*$

6 - UNA EQUIVALENCIA NUMÉRICA

Como :

$$\int_0^1 \psi_i\ \psi_j'\ dx = -\left[\psi_j'(r_i) - \psi_j'(l_i) \right]$$

donde $l_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $r = (x_i + x_{i+1})/2$

entonces, si $V \in S_0^h$

$$\int_0^1 (a\ V' - b\ V)\ \psi_i'\ dx = \int_0^1 a\ (RV)'\ \psi_i'\ dx =$$

$$= -a\ [\ (RV)'(r_i) - (RV)'(l_i)] = J(r_i) - J(l_i)$$

donde $J(x) = b\ V(x) - a\ V'(x)$

Además, como $\int_{l_i}^{r_i} f\,dx = \int_0^1 f\,\psi_i\,dx$ si f es constante por elemento, obtenemos que la formulación :

Hallar $V \in S_i^h$ tal que :

$$J(r_i) - J(l_i) = \int_{l_i}^{r_i} f\,dx \qquad (6.1)$$

da el mismo sistema algebraico de ecuaciones que la siguiente :

Hallar $V \in S_i^h$ tal que :

$$B(V, W) = (f, W) \qquad W \in T_o^h \qquad (6.2)$$

La formulación (6.1) es conocida como el método de volumenes de control basado en elementos finitos (CVFEM) y fue introducido por S. Patankar en 1980 [5]. El teorema (5.1) muestra la convergencia para el caso unidimensional. Para la solución del problema bidimensional el método emplea elementos triangulares y funciónes de forma [5] que no estan en $H^1(\Omega)$ y que quedan fuera de nuestro marco teórico.

7 - EL PROBLEMA BIDIMENSIONAL

En el caso de una dimensión vimos que las funciones de forma óptimas se obtenian a partir de la resolución de la ecuación diferencial homogénea en un elemento dado $[x_{i-1}, x_i]$ poniendo como condiciones de borde 1 y 0 ó 0 y 1 respectivamente. Esto es fácil de hacer porque el espacio de soluciones de dicha ecuación homogénea tiene dimensión dos.

Una de las dificultades que aparece cuando queremos trasladar estas ideas a dos dimensiones es que el espacio de soluciones de la ecuación homogénea tiene dimensión infinita. Entonces, podemos proponer funciones de forma de diferentes maneras. Proponemos la siguiente:

$$\varphi_i = A_i\, e^{(b_x x + b_y y)} + B_i (b_x y - b_y x) + C_i \qquad (7.1)$$

Utilizando estas funciones de forma obtenemos que la base del espacio de funciones aproximantes está formada por funciones discontinuas. Con lo cual S^h no está contenido en $H^1(\Omega)$. El espacio de funciones peso que empleamos T^h es el usual, cuyos elementos son funciones continuas en todo el dominio y lineales en cada elemento.

Con estos espacios se implementó un programa que resuelve la siguiente formulación no-conforme del problema (2.1) :

$$\begin{aligned} &\text{Hallar } U \in S_K^h \text{ tal que :} \\ &B(U, \psi) = (f, \psi) \qquad \forall \quad \psi \in T^h \end{aligned} \tag{7.2}$$

donde :

$$B(U, \psi) = \sum_e \int_e [k \nabla U \nabla \psi - \vec{b}\, U \nabla \psi]\, dx + \int_{\Gamma} U \psi \vec{b}\vec{n}\, d\alpha \tag{7.3}$$

Con el analisis análogo al realizado en una dimensión a partir de $B(u - U, v)$ utilizando las desigualdades [4] :

$$\| v - I_h v \|_{L^2(T)} \leq C \; |T|^{1/2} \; |v|_{H_0^1(T)} \tag{7.4a}$$

$$\| v - I_h v \|_{L^2(E)} \leq C \; |E|^{1/2} \; |v|_{H_0^1(T)} \tag{7.4b}$$

se obtiene :

$$B(u - U, v) \leq C \left(\sum_e \eta_e^2 \right)^{1/2} |v|_{H_0^1(\Omega)} \tag{7.4}$$

donde

$$\eta_e^2 = |e| \int_e f^2\, dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} |E_i| \int_{E_i} \left[k \frac{\partial U}{\partial n} \right]^2 d\alpha + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} |E_i| \int_{E_i} |\vec{b}\vec{n}| [U]^2\, d\alpha \tag{7.5}$$

Utilizamos como estimador del error a la expresión dada en (7.5). En la figura 1 mostramos el recinto del problema test y una de las redes probadas. En este caso la red está formada por 240 nodos. Los datos del problema son : difusión constante de $K = 0.001$, velocidad constante $b = (1,0)$ y fuente $f = 1$. En la figura 2 y 3 indicamos, curvas de nivel de la solución y el error estimado de la misma. Como se puede observar los resultados son comparables con los obtenidos por otros autores y como es de esperar el error es bajo en toda la red salvo en las capas limites. Lo mismo ocurre para los dos tipos de redes indicadas en la figura 4. Cabe destacar que la estimación del error se vuelve más pequeño cuanto más densificada es la red.

REFERENCIAS :

[1] Babuska I. & Rheinboldt W.C. A posteriori analysis of finite element solutions for one-dimensional problems SIAM J.Numer.Anal 18, 565-589 (1981)

[2] Barret J.W. & Morton K.W. Optimal finite element solutions to diffusion-convection problems in one dimension. Int. J. Num. Meth. Eng. 15, 1457-1474 (1980)

[3] Barret J.W. & Morton K.W. Approximate symmetrization and Petrov-Galerkin Methods for diffusion-convection problems Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 45, 97-122 (1984)

[4] Ciarlet P.G. The finite element method for elliptic problems. North Holland, Amsterdam (1978)

[5] Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow Mc Graw-hill, New York (1980)