

GENERACION DE SECUENCIAS DE TRIANGULACIONES
IRREGULARES Y ENCAJADAS

María-Cecilia Rívara

Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Universidad de Chile.
Santiago - Chile.

RESUMEN

En este trabajo se describe y justifica un método general para obtener secuencias encajadas de mallas triangulares. Este se basa en la aplicación de algoritmos de refinamiento capaces de producir y refinar triangulaciones irregulares y conformes. Se discute la aplicación de esta técnica en un software de elementos finitos que combina métodos de multimallas y adaptabilidad, y el uso de estos algoritmos en un generador de triangulaciones flexible y general. Se incluyen también algunos comentarios sobre la generalización de estas aplicaciones.

ABSTRACT

A general approach to generate nested series of general triangular grids is discussed and justified. This is based on essentially arbitrary (conforming) mesh refinement strategies. Applications of this technique to produce both dynamic multigrid, finite element software for partial differential equations, and a flexible grid generator are discussed. Some comments about the generalization of these applications are also included.

INTRODUCCION

En este artículo se discute la generación de secuencias encajadas de triangulaciones irregulares basada en el uso de algoritmos conformes de refinamiento de triangulaciones. Estos algoritmos a su vez se basan en las propiedades de la bisección de triángulos por el lado más largo [1], [2],[3],[4],[5].

En el análisis clásico de elementos finitos se utiliza una discretización fija de la región para aproximar el problema continuo. Esta discretización se construye normalmente usando un generador de mallas capaz de generar una discretización irregular con cualquier resolución deseada. Sin embargo, estos programas son generalmente incapaces de modificar una malla obtenida previamente, de modo que si el usuario decide efectuar un nuevo análisis de elementos finitos usando una malla más refinada, todo el proceso debe repetirse nuevamente.

Sin embargo, en los últimos años se han desarrollado y justificado técnicas nuevas cuyas características han inducido un cambio en la manera de abordar análisis de elementos finitos. Desde el punto de vista de la implementación de la versión h del método de elementos finitos, las más importantes de estas técnicas son la adaptabilidad de la malla [4],[6],[7] y los métodos de multimallas (métodos de orden óptimo) [8],[9] para resolver los sistemas lineales poco densos asociados a las discretizaciones consideradas. Ambas técnicas consideran el problema de manera dinámica, es decir se basan en el hecho que el problema de valores de borde puede aproximarse mediante una secuencia apropiada de problemas discretizados .

El análisis de elementos finitos adaptable puede visualizarse como un procedimiento de retroalimentación mediante el cual la discretización se ajusta en forma automática para satisfacer cierto criterio de optimalidad. Por otro lado, los métodos de multimallas son computacionalmente muy complejos y para ser utilizados en forma general en problemas prácticos necesitan de la generación automática de secuencias de discretizaciones irregulares y encajadas de la región. En este trabajo se discute una familia de algoritmos de refinamiento de triangulaciones que resuelve ambos problemas. En efecto, estos algoritmos permiten el refinamiento local de triangulaciones, y usados en forma iterativa producen secuencias de triangulaciones encajadas.

En los últimos años se han desarrollado varios generadores de mallas y algoritmos de refinamiento adecuados para producir software de elementos finitos de multimallas y adaptable [4],[6],[8]. Aun cuando los algoritmos que describiremos aquí se desarrollaron inicialmente con el objeto de llenar un vacío en el desarrollo de un software de este tipo, en realidad constituyen la base de una estrategia general de generación de mallas, cuyas características principales se resumen de la siguiente manera. Los algoritmos se basan en estrategias de refinamiento esencialmente locales y pueden usarse para modificar cualquier triangulación conforme. La aplicación iterativa de estos algoritmos

genera series encajadas de triangulaciones irregulares cuyas propiedades dependen de la triangulación inicial. Finalmente, el uso de estos algoritmos garantiza que todas las triangulaciones generadas son conformes (la intersección de dos triángulos adyacentes es un vértice común o un lado común), no degeneradas (los ángulos interiores de los triángulos están acotados inferiormente) y suaves (la transición entre triángulos pequeños y grandes no es abrupta).

Debido a su generalidad y flexibilidad los algoritmos pueden usarse al menos en cuatro contextos diferentes:

- (i) para desarrollar generadores flexibles de triangulaciones irregulares,
- (ii) para refinar localmente una triangulación conforme dada,
- (iii) para implementar software adaptable de elementos finitos, y
- (iv) para implementar métodos de elementos finitos y multimallas.

A continuación discutiremos los algoritmos y sus propiedades así como la aplicación de estas técnicas para producir software de elementos finitos adaptable y de multimallas para ecuaciones diferenciales parciales, y en un generador de triangulaciones flexible y general. Se incluirán también algunos comentarios relacionados con la estructura de datos usada para generar la secuencia de discretizaciones y para manejar el método de multimallas, y algunos comentarios sobre el trabajo de investigación en curso.

LOS ALGORITMOS

En esta sección se introducirá una familia de algoritmos de refinamiento de triangulaciones irregulares basados en la bisección de triángulos por el lado más largo. Los primeros algoritmos de la familia se introdujeron inicialmente en [2], [3] y los llamaremos algoritmos de refinamiento de 2 triángulos en contraste con los algoritmos de 4 triángulos que introdujimos más recientemente en [5].

Las propiedades principales de estos algoritmos se resumen de la siguiente manera. Para cualquier triangulación conforme τ y cualquier submalla de refinamiento $V \subset \tau$, estos algoritmos producen una nueva triangulación conforme τ^* con las siguientes características, útiles tanto para el método de elementos finitos como para los métodos de multimallas:

1. Todos los elementos de V están refinados en τ^* .
2. τ^* está encajada en τ de tal manera que cada triángulo refinado está contenido en un triángulo de τ .
3. La triangulación τ^* es no degenerada, es decir se garantiza que los ángulos interiores de todos los triángulos de τ^* son mayores que un número mayor que 0.
4. La transición entre triángulos grandes y pequeños no es abrupta y en este sentido, τ^* es suave.

Para discutir los algoritmos conformes de refinamiento, definiremos bisección simple y bisección generalizada de un triángulo, y en este contexto, los conceptos de triángulos y puntos $\frac{1}{2}$ -no conformes.

Definición 1. La bisección generalizada de un triángulo se define como la bisección del triángulo por el punto medio del lado más largo (ver Fig. 1(a)). Cuando la bisección se realiza por un lado cualquiera s la llamaremos bisección simple del triángulo por dicho lado (ver Fig. 1(b)).

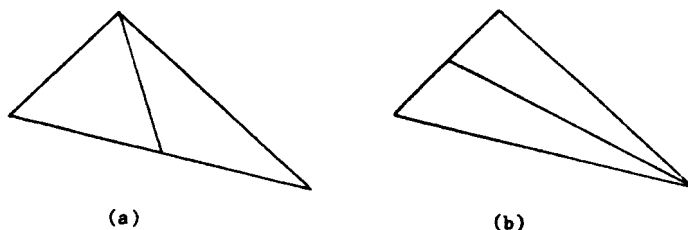


Figura 1

Definición 2. Un triángulo t es $\frac{1}{2}$ -no conforme si existe al menos un punto medio de uno de sus lados que no está unido con el vértice opuesto a dicho lado (ver Figura 2). Análogamente, el punto y el lado correspondientes se denominan punto y lado $\frac{1}{2}$ -no conformes.

Los algoritmos de refinamiento pueden describirse entonces en base a los siguientes procedimientos:

- (1) La bisección generalizada de un triángulo.
- (2) La bisección simple de un triángulo por un lado s .
- (3) El procedimiento de conformación que hace conforme un punto $\frac{1}{2}$ -no conforme P de un triángulo t . Esto se realiza de la siguiente manera (ver Fig. 3):
 - (a) Realice una bisección generalizada de t y obtenga Q (Figura 3(b)).
 - (b) Si $P \neq Q$, realice una bisección simple del triángulo t por el lado $\frac{1}{2}$ -no conforme (Figura 3(c)).

Observe que un punto $\frac{1}{2}$ -no conforme Q puede generarse a través del procedimiento (3).

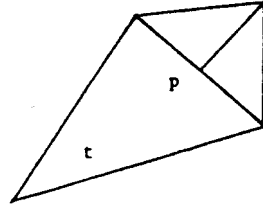


Figura 2

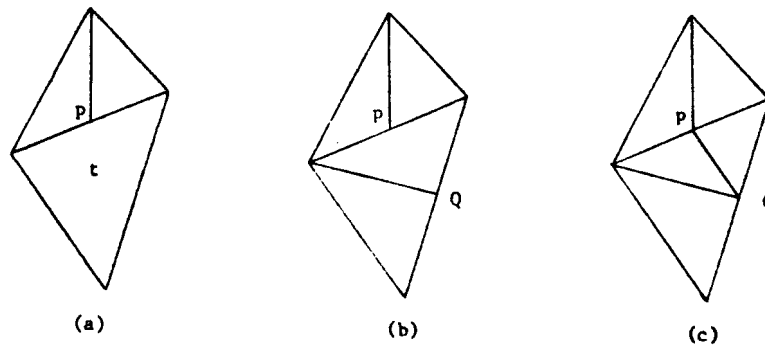


Figura 3

Así, para cualquier triangulación conforme y no degenerada τ y para cualquier submalla de refinamiento $V \subset \tau$, el algoritmo básico de 2 triángulos puede describirse esquemáticamente de la siguiente manera:

```
{ algoritmo de 2 triángulos }
Entrada { $\tau, V$ }
Para cada  $t \in V$  haga lo siguiente
  Realice la bisección generalizada de  $t$ 
  { sea  $P$  el punto medio generado }
  Mientras  $P$  sea  $\frac{1}{2}$ -no conforme de un triángulo  $t'$ 
    Haga conforme el punto  $P$  y obtenga  $Q$ 
     $P := Q$ 
Salida { $\tau'$ }
```

Análogamente el algoritmo básico de 4 triángulos puede describirse como sigue:

```
{ algoritmo de 4 triángulos }
Entrada { $\tau, V$ }
para cada  $t \in V$  haga lo siguiente
  Realice la bisección generalizada de  $t$ 
  { sea  $P$  el punto medio generado
  y  $t_1, t_2$  los triángulos obtenidos }
  Mientras  $P$  es punto  $\frac{1}{2}$ -no conforme de un triángulo  $t^*$ 
  proceda como sigue
    Haga conforme el punto  $P$  y obtenga  $Q$ 
     $P := Q$ 
  Para  $i = 1, 2$  proceda como sigue
    Realice una bisección simple de  $t_i$  por el lado común de  $t$  y  $t_i$ 
    { sea  $P$  el punto generado }
    Mientras  $P$  es un punto  $\frac{1}{2}$ -no conforme de un triángulo  $t^*$ 
    proceda como sigue
      Haga conforme el punto  $P$  y obtenga  $Q$ 
       $P := Q$ 
Salida { $\tau$ }
```

La diferencia principal entre los dos algoritmos descritos anteriormente reside en que en el primer algoritmo, cada triángulo de V se divide en 2 pedazos tal como se muestra en la Figura 4(a), mientras que en el segundo algoritmo cada triángulo se divide en 4 pedazos como en la Figura 4(b).

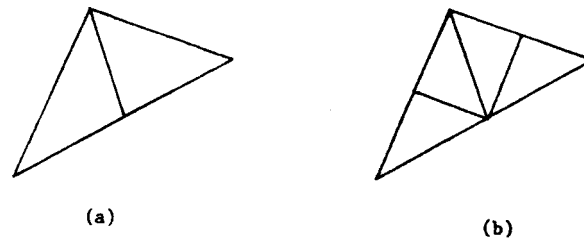


Figura 4

PROPIEDADES DE LOS ALGORITMOS

Para mostrar todas las ventajas potenciales de estos algoritmos, introduciremos la familia admisible de triangulaciones irregulares [1], [8], [9].

Definición 3. T^* se dirá una familia (α_0, δ) admisible de triangulaciones irregulares y conformes, si se cumplen las siguientes condiciones:

- (a) Para cualquier $\tau \in T^*$ y para cualquier par de triángulos adyacentes $t_1, t_2 \in \tau$ (con diámetro respectivo h_1, h_2):

$$\min(h_1, h_2) / \max(h_1, h_2) \geq \delta > 0$$

- (b) Si α_i es el ángulo interior mínimo de t , entonces

$$\min \alpha_i \geq \alpha_0 > 0,$$

para cualquier $\tau \in T^*$, y donde δ, α_0 son constantes.

La condición (a) corresponde a una condición de suavidad, mientras que la condición (b) es la condición de no degenerancia estandar exigida normalmente en el método de elementos finitos. Es importante señalar aquí que las constantes δ y α_0 en realidad caracterizan la familia de triangulaciones.

En este contexto, los resultados principales sobre los algoritmos conformes de refinamiento pueden resumirse en el siguiente Teorema.

Teorema. El uso arbitrario e iterativo del algoritmo de refinamiento de 2 triángulos y/o del algoritmo de refinamiento de 4 triángulos (a partir de cualquier triangulación inicial no degenerada y conforme τ_0) siempre produce triangulaciones encajadas que pertenecen a la misma familia (α_0, δ) admisible de triangulaciones irregulares T^* , donde las constantes α_0 y δ que definen la familia solo dependen de las características geométricas de la triangulación inicial τ_0 .

Este Teorema se basa en las propiedades de la bisección generalizada iterativa de un triángulo dado así como en las propiedades de la bisección simple de un triángulo, realizada inmediatamente después de una bisección generalizada, y en las propiedades del procedimiento de conformación. Una demostración de este Teorema puede encontrarse en [1].

Finalizaremos esta sección recalcando la importancia práctica del Teorema anterior. Por un lado nos asegura que todas las triangulaciones generadas mediante los algoritmos conformes de refinamiento satisfacen las propiedades deseables en el método de elementos finitos (permitiendo refinar cualquier triangulación dada), y por otro lado nos proporciona una herramienta poderosa para generar automáticamente especies de elementos finitos encajados y generales, un procedimiento esencial para la utilización práctica de los métodos de multimallas. Para ilustrar la calidad de estos algoritmos hemos incluido en la Figura 5 una secuencia de mallas encajadas generadas usando localmente el algoritmo de 2 triángulos [4].

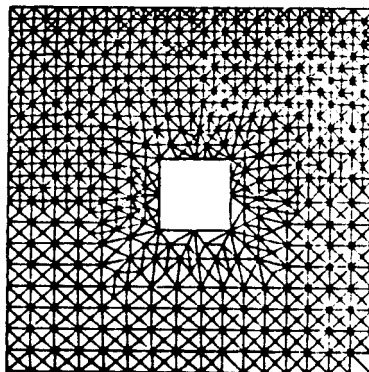
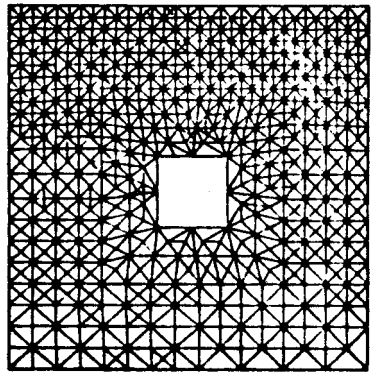
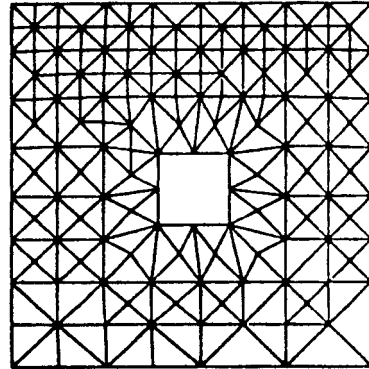
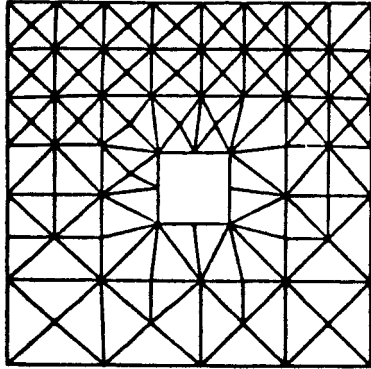


Figura 5

APLICACIONES DE LOS ALGORITMOS Y CONCLUSIONES

Estos algoritmos se han aplicado en forma experimental en dos contextos diferentes:

1. Para desarrollar el paquete EXPDES, un software que combina elementos finitos, adaptabilidad y métodos de multimallas para resolver ecuaciones diferenciales parciales.
2. Para desarrollar GENTRI, un generador de triangulaciones flexible y general, apropiado para el refinamiento local y selectivo de triangulaciones conformes.

Las dos aplicaciones anteriores y muy especialmente la primera, dependen en forma crítica de la estructura de datos que se utilice. Este problema se ha resuelto usando la estructura molecular que introdujimos en las referencias [4], [6], y basada en que cada triangulación conforme puede representarse como un conjunto de moléculas centradas en los vértices.

En la actualidad nuestro grupo de investigación trabaja en el análisis crítico de diferentes implementaciones de la estructura molecular para desarrollar un generador de triangulaciones, y en el desarrollo de un software aun más dinámico que el paquete EXPDES, capaz ahora de refinar y desrefinar los elementos en la secuencia de discretizaciones. Es claro que en este nuevo contexto se necesita una estructura de datos aún más flexible para manejar la secuencia dinámica de triangulaciones

Concluiremos este trabajo mostrando algunos ejemplos de aplicaciones de los paquetes EXPDES y GENTRI.

El paquete EXPDES constituye un software general, flexible, fácil de usar que entrega información confiable acerca de la calidad de los resultados numéricos calculados y capaz de realizar la mayoría de las tareas aburridas y de las decisiones difíciles involucradas en el uso del software clásico de elementos finitos [4], [6]. A partir de una triangulación gruesa inicial de la región, el paquete EXPDES genera automáticamente todas las triangulaciones restantes, que son siempre encajadas, conformes, no degeneradas y suaves. Los experimentos numéricos realizados con este programa han mostrado que las secuencias de soluciones de elementos finitos obtenidas en forma adaptable, son en general óptimas con respecto al número de grados de libertad involucrados.

Para ilustrar el comportamiento de este programa computacional consideremos el problema de Laplace con condiciones de borde tipo Dirichlet sobre una región en forma de L formada por la unión de tres cuadrados unitarios [4], [7], [8], [9]. La solución de este problema es la función $u = r^{\frac{1}{3}} \text{sen}(2\theta/3)$, que es singular en la esquina reentrante. En consecuencia, la tasa asintótica de convergencia para elementos lineales y triangulaciones cuasi-uniformes decrece a $\frac{1}{3}$. Sin embargo, se conoce que para una triangulación irregular adecuada,

es posible obtener la tasa máxima de convergencia $\frac{1}{2}$ para estos elementos. La convergencia de este problema se ilustra en la Figura 6, donde la pendiente de las curvas representa la tasa numérica de convergencia alcanzada. Aquí puede apreciarse claramente que la tasa numérica de convergencia para la secuencia cuasi-uniforme de discretizaciones está en completo acuerdo con la teoría, mientras que el procedimiento adaptable ha alcanzado la tasa máxima de convergencia para elementos lineales. En este sentido decimos que la secuencia adaptable de problemas de elementos finitos generados es óptima. Con el objeto de ilustrar la calidad de las triangulaciones generadas, se incluye en la Figura 7 la última triangulación obtenida en forma adaptable.

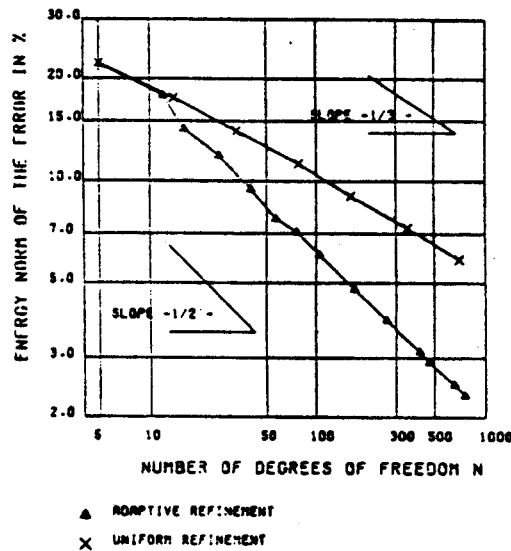


Figura 6

Con respecto al generador de triangulaciones GENTRI [5],[10], sus principales características son las siguientes: para cualquier triangulación conforme inicial de la región, produce una nueva triangulación refinada y conforme con cualquier resolución deseada mediante el uso iterativo de los algoritmos de 4 triángulos. La resolución de la malla final se determina eligiendo un conjunto de subregiones de refinamiento R_i y parámetros asociados h_i , y es

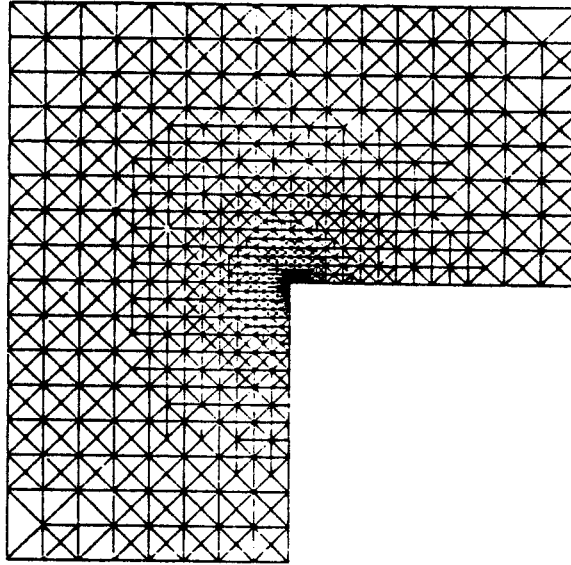


Figura 7

esencialmente independiente de la malla inicial. En forma más específica, el programa GENTRI construye una nueva triangulación refinada de manera que el diámetro de cada triángulo contenido en R_i es menor o igual que h_i , para cada i . Finalmente, debido a las propiedades del algoritmo de 4 triángulos, la triangulación irregular que se obtiene es no-degenerada y suave.

Para ilustrar el comportamiento de GENTRI [5],[10], hemos usado dicho programa para triangular una región rectangular y las regiones poligonales de las Figuras 9(a) y 10(a). Las Figuras 8(a) y 8(b) muestran dos triangulaciones diferentes obtenidas para una región rectangular inicialmente cubierta por una malla de 4 triángulos. La Figura 9(b) muestra una triangulación obtenida para la primera región poligonal a partir de la triangulación inicial de la Figura 9(a). Finalmente, la Figura 10(b) muestra una triangulación obtenida usando dos subregiones circulares de refinamiento centradas en 2 de las esquinas del borde de la región.

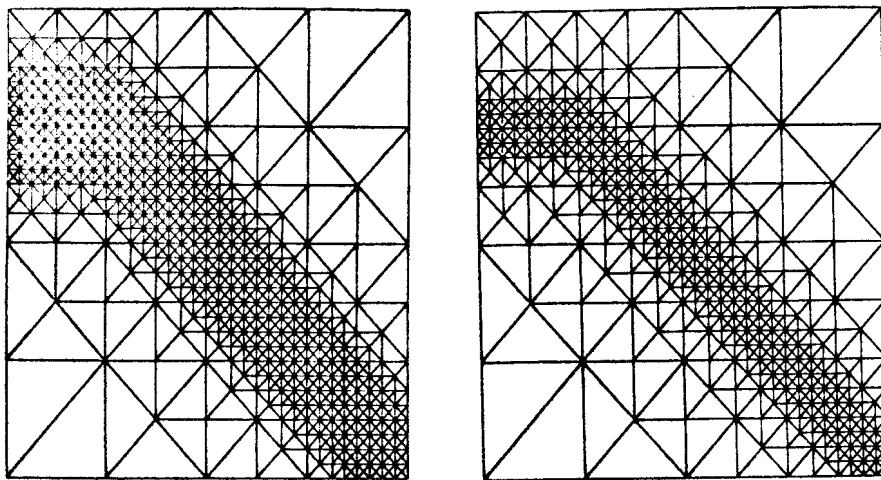


Figura 8

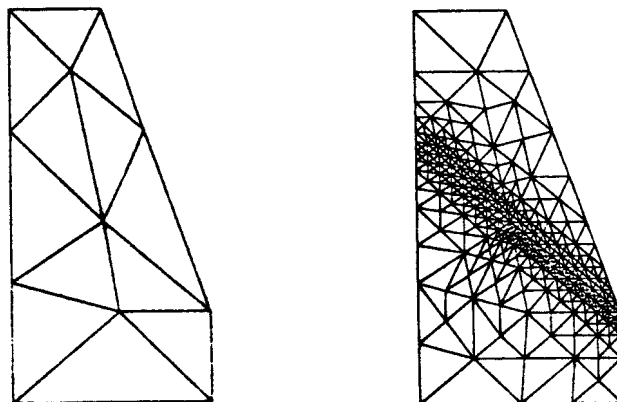


Figura 9

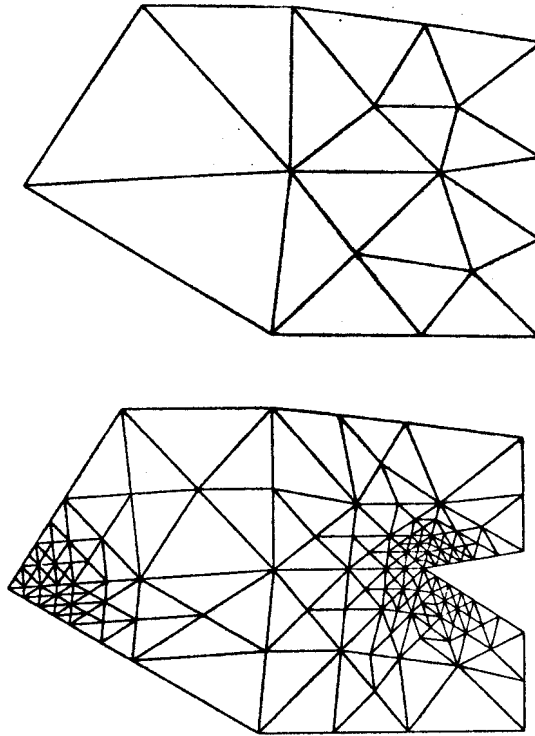


Figura 10

REFERENCIAS

1. Rivara, M. C., Numerical generation nested series of general triangular grids, in *Topics in Multivariate Approximation*, C. K. Chui, L. L. Schumaker and F. I. Utreras (eds.), Academic Press, New York, 1987.
2. Rivara, M. C., Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* **20** (1984), 745-756.
3. Rivara, M. C., Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices, *SIAM J. Numer. Anal.* **21** (1984), 604-613.
4. Rivara, M. C., Adaptive multigrid software for the finite element method. Ph.D. Dissertation, K. U. Leuven, Belgium, 1984.
5. Rivara, M. C., A grid generator based on 4-triangles conforming mesh refinement algorithms, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, to appear.

6. Rivara, M. C., Design and data structure of fully adaptive, multigrid, finite-element software. *ACM Trans. Math. Softw.* (1984), 242-264.
7. Rivara, M. C., Dynamic implementation of the h-version of the finite element method. in *The Mathematics of Finite Element Method and Applications V*, Ed. by J. R. Whiteman, Academic Press, 1985, 595-602.
8. Rivara, M. C., Adaptive finite element refinement and fully irregular and conforming triangulations. Chapter 20 in *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, I. Babuska, J. Gago, E. R. de Oliveira and O. C. Zienkiewicz, eds., John Wiley and Sons, 1986, 359-370.
9. Rivara, M. C., A dynamic multigrid algorithm suitable for partial differential equations with singular solutions. *Proceedings IFIP Working Conference 1984, Santiago, Chile. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, A. Balakrishnan and E. Polak, eds., 1986, 190-200.
10. HERMOSILLA, L., Formalización de una estructura de datos e implementación de un generador de triangulaciones para refinamiento local y selectivo, Memoria de Ingeniero Civil Matemático, Universidad de Chile, 1987.

Este trabajo ha sido financiado en parte por el proyecto FONDECYT-1292/86 y por el proyecto DIB E-2266/8733 de la Universidad de Chile. Los resultados numéricos se obtuvieron en el Computador IBM 3031 del CEC y en el computador TOWER XP del Departamento de Ciencias de la Computación, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.