SOBRE LA SOLUCION NUMERICA DE UN PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO DE UNA DIFUSION BIDIMENSIONAL

Roberto L.V. González
Mabel A. Medina
PROMAR (CONICET-UNR)
Instituto de Matemática "Beppo Levi".
Universidad Nacional de Rosario.
Rosario - Argentina

RESUMEN

La solución de problemas estacionarios de control óptimo de difusiones se reduce a resolver ecuaciones elípticas no lineales.

En este trabajo se soluciona un caso bidimensional por medio de una aplicación especial del método de los elementos finitos, mostrando los resultados obtenidos de la función costo óptimo, de las políticas en realimentación y de las trayectorias del sistema.

ABSTRACT

The optimal control of difussion processes depends on the solution of non-linear partial differential equations of elliptic type.

In this paper we apply a new method (using finite elements) to the solution of a bidimensional problem. We show the results obtained for the optimal cost function, the optimal feedback policies and the trayectories of the system.

INTRODUCCION

En [1] hemos presentado una metodología para calcular la función de costo óptimo y las políticas óptimas en realimentación de problemas de control determinísticos donde intervienen controles continuos, impulsionales y tiempos de detención. En [2] se ha extendido esta técnica al caso estocástico del control de difusiones continuas. En este trabajo presentamos una aplicación a un problema donde el estado del sistema es bidimensional y en el que puede gobernarse simultáneamente el término de difusión y el drift.

El problema es solucionado numéricamente introduciendo aproximaciones del espacio funcional $W^{1,\infty}(\Omega)$ por medio de elementos finitos lineales y esquemas especiales de discretización para las derivadas parciales de orden 1 y 2 que permiten verificar un principio de máximo discreto (PMD). En virtud de esta propiedad, el problema discretizado tiene solución única y puede ser calculado con un algoritmo iterativo de tipo relajación.

Mostraremos los resultados obtenidos para la función de costo óptimo, la estructura de las políticas (subóptimas) en realimentación y (por simulación) la evolución del sistema bajo estas políticas.

DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Se considera un proceso sometido a la acción de perturbaciones aleatorias, cuyas características probabilísticas estan dadas por la filtración completa

$$(\Omega,\ P, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t)) \tag{1}$$

Las variables de estado del sistema satisfacen la siguiente ecuación diferencias estocástica:

$$dy(t)=f(y(t),u(t))\ dt + s(u(t))\ dw(t) \tag{2}$$

$$y(0)=x \tag{3}$$

siendo

$w(t)$ un proceso de Wiener (bidimensional)

$\mathcal{F}(t)$ medible

$u(t)$ es el control (progresivamente medible) aplicado ($u\in R^3$ en el problema considerado).

Se desea optimizar el funcional:

$$J(x,u(.))=E\{\int_0^T (y(s),u(s))\ e^{-as}\ ds + e^{-aT}\ F(y(T))\} \tag{4}$$

donde T es el tiempo de salida del dominio Q de las trayectorias del sistema.

Definiendo la función de costo óptimo

$$v(x)=\inf\{J(x,u(.))/u(t)\in U,\ u(t) \text{ es } \mathcal{F}(t) \text{ medible}\} \qquad (5)$$

puede demostrarse que la solución del problema de optimización se reduce a hallar la función v. Esta función es la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada (ver [3], [4]):

$$\min\ \{L(u)\ v + l(y,u)/\ u\in U\} = 0 \text{ en } Q \qquad (6)$$

con condiciones de frontera:

$$v = F \quad \text{en} \quad \partial Q \qquad (7)$$

donde el operador L tiene la forma

$$L(u)w = 1/2\ s^2(u).\ D^2w + Dw.\ f(x,u) - a\ w \qquad (8)$$

siendo D^2 el laplaciano y D el gradiente respectivamente de la función w.

La función v puede ser caracterizada asimismo como solución del siguiente problema auxiliar de optimización (ver [5], [1], [6]):

Problema auxiliar: Determinar el elemento máximo del conjunto W.

Siendo

$$W = \{w\in W^{1,\infty}(Q)/\ L\ w + l \geq 0 \text{ en } \mathcal{D}'(Q)\ \forall\ u\in U,\ w(x) \leq F(x)\ \forall\ x\in\ Q\} \qquad (9)$$

y considerando en W el orden parcial natural

$$w\leq\tilde{w} \iff w(x)\leq\tilde{w}(x) \qquad \forall\ x\in Q \qquad (10)$$

Resolvemos aquí este problema por discretización , haciendo uso del método de los elementos finitos. La presentación preliminar del método aplicado está contenida en [2].

DISCRETIZACION DEL PROBLEMA DE CALCULO DE LA FUNCION DE COSTO OPTIMO

Elementos de la discretización:

I) Discretización del dominio Q.

En general el conjunto Q es aproximado por una unión de triángulos Q^h , que en nuestro caso coincide con Q, ya que utilizamos un Q poligonal.

II) Discretización de W.

La discretización de W se realiza por medio de elementos finitos lineales, definiendo

$$W^h=\{w^h:Q^h \longrightarrow R/\text{se verifica el conjunto de hipótesis A}\} \qquad (11)$$

A

a1) En cada triángulo T_i de Q^h, $w^h \in P^1$ (función afín).

a2) $w^h \in C(Q^h)$.

a3) $w^h(x_j) \leqslant F(x_j) \quad \forall\, x_j \in \partial Q$ (x_j, nodo de la triangulación).

a4) $L^h w^h + 1 \geqslant 0 \quad \forall\, x_j \notin \partial Q$ (x_j nodo de la triangulación).

L^h es una discretización del operador que satisface un principio de máximo discreto. L^h se calcula de la siguiente forma:

$$L^h w^h = s^2/2.\ \frac{\sum_j (-w^h(x_i^h)+w^h(a_j^h))\,l_j^h/2p_j^h}{\sum_j 1/6(l_j^h p_j^h)} +$$

$$+\frac{(w^h(b_i^h)-w^h(x_i^h))\,||f(x_i^h,u)||}{||x_i^h-b_i^h||} - a\, w^h(x_i^h) \qquad (12)$$

siendo a_j^h, b_j^h, l_j^h, p_j^h, los parámetros mostrados en la figura 1.

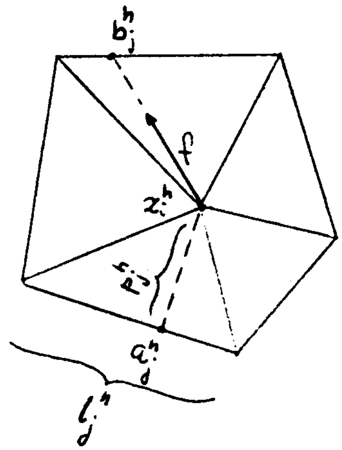


Figura 1

El primer término de la derecha de (12) constituye una discretización del laplaciano y el segundo una discretización del gradiente.

Transformando la restricción (a4) (haciendo uso de (11)) se obtiene:

$$w^h(x_i^h) \leqslant \min_{u\in U}\Big(f(x_i^h,u)+\sum_j w^h(a_j^h)\, l_j^h s^2/(4p_j^h g) \; +$$

$$+\; w^h(b_i^h)\,\|f(x_i^h,u)\|/\|x_i^h-b_i^h\|\Big).$$

$$\cdot\Big(a+\|f(x_i^h,u)\|/\|x_i^h-b_i^h\|+\sum_j l_j^h s^2/4gp_j^h\Big)^{-1} \qquad (13)$$

siendo

$$g=\sum_j 1/6\; l_j^h p_j^h \qquad (14)$$

Si llamamos $M_i^h(w^h)$ al término de la derecha de (13), las restricciones que definen W^h quedan escritas en forma compacta:

$$w^h(x_i^h) \leqslant M_i^h(w^h) \qquad \forall\ x \notin \partial Q^h \tag{15}$$

$$w^h(x_i^h) \leqslant F(x_i^h) \qquad \forall\ x \in \partial Q^h \tag{16}$$

El operador M tiene las siguientes propiedades:

* **Monotonía:**

$$w^h \leqslant \tilde{w}^h \quad \Longrightarrow \quad M_i^h(w^h) \leqslant M_i^h(\tilde{w}^h) \tag{17}$$

* **Caracter local:**

El valor $M_i^h(w^h)$ depende sólo de los valores $w^h(x_j^h)$ para x_j^h "vecinos" de x_i^h.

* **Contracción:**

Es decir, existe c<1 tal que

$$|M_i^h(w^h) - M_i^h(\tilde{w}^h)| \leqslant c \max_i |w^h(x_i^h) - \tilde{w}^h(x_i^h)| \tag{18}$$

III) Discretización del problema auxiliar.

Definimos el problema discreto:

Hallar el elemento máximo del conjunto W^h.

Observación: En W^h se considera el orden parcial natural: $w^h \leqslant \tilde{w}^h \Longleftrightarrow w^h(x_i^h) \leqslant \tilde{w}^h(x_i^h)\ \forall\ x_i^h$ nodo de Q^h.

En virtud de las propiedades del operador M^h, puede probarse el siguiente:

Teorema 1:

Existe única solución v^h del problema auxiliar discreto, caracterizado por:

$$v^h(x_i^h) = F(x_i^h) \qquad \forall\ x_i^h \in \partial Q \tag{19}$$

$$v^h(x_i^h) = M_i^h(v^h) \;\forall\; x_i^h \notin \partial Q^h \qquad (20)$$

Para computar v^h se hace uso del siguiente algoritmo:

Alg 1:

Paso 0: Generar un valor inicial v_0.

Paso 1: n=1

Paso 2: Calcular $v_n = M^h(v_{n-1})$

Paso 3: Si $v_n \equiv v_{n-1}$, parar; sino, hacer n=n+1 e ir al paso 2.

El operador M^h está definido por:

$$[M^h(w^h)]_i = M_i^h(w^h) \quad \text{si} \quad x_i^h \notin \partial Q^h$$

$$[M^h(w^h)]_i = F(x_i^h) \quad \text{si} \quad x_i^h \in \partial Q \qquad (21)$$

En virtud de (18) se deduce inmediatamente:

Teorema 2:

Alg 1 finaliza en un número finito de pasos brindando el elemento v^h o genera una sucesión v_n convergente hacia v^h en la norma:

$$||v^h - v_n|| = \max\{|v^h(x_i^h) - v_n(x_i^h)| \,/\, i=1,i_{max}\} \qquad (22)$$

siendo i_{max} la cantidad total de nodos.

Observación:

Si se elige $v_0 \in W^h$, la sucesión $v_n \in W^h$ y además

$v_0 \leq v_{n-1} \leq v_n < v^h$

Observación

Alg 1 tiene la forma de un algoritmo iterativo de relajación, de tipo Jacobi, admitiendo en consecuencia la aplicación de técnicas de paralelización. Sin embargo, aplicado a un ordenador común, tiene una velocidad de convergencia más lenta que el siguiente algoritmo, modificación de tipo "Gauss-Seidel" de Alg 1.

Alg 2

Paso 0: Generar un valor inicial v_0

Paso 1: $n=1$, $w^h = v_n$

Paso 2: $i=1$

Paso 3: $w_i^h = [M^h(w_i^h)]_i$

Paso 4: si $i=i_{max}$, hacer $n=n+1$, $v_n = w^h$ e ir al paso 5.

Paso 5: si $v_n = v_{n-1}$, parar; sino, ir al paso 2.

Observación:

El teorema 2 es asimismo válido si se reemplaza en su enunciado Alg 1 por Alg 2.

Observación:

Tanto Alg 1 como Alg 2 pueden emplear el caracter local del operador M para resolver problemas de grandes dimensiones, teniendo en la memoria central del ordenador sólo la información local necesaria para calcular $M_i^h(w^h)$.

CONVERGENCIA

En [2] se demuestra la convergencia de $v_h \longrightarrow v$ en la topología de C^0, cuando $h \longrightarrow 0$.

EJEMPLO DE APLICACION

$Q = [-1,1] \times [-1,1]$

Ecuación dinámica del sistema:

$$dx_1 = (u_1 - x_1)\, dt + 1/(1+10\, u_3)\, dw$$

$$dx_2 = (u_2 - x_2)\, dt + 1/(1+10\, u_3)\, dw$$

Costo instantáneo:

$$l = -1000 + 100\, x_1^2 + 100\, x_2^2 + (1{,}1 - x_1^2)^{-3} + (1{,}1 - x_2^2)^{-3} + $$

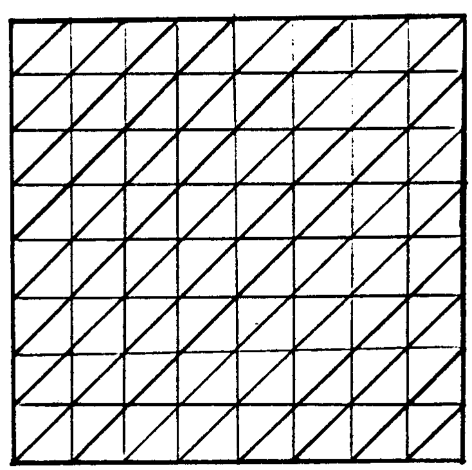
$$+ (u_1^2 + u_2^2)/100 + 100(u_3 + (3\, u_3)^2)$$

Costo final:

$F = 10$

$a = 10$

Gráfico de discretización de Q:



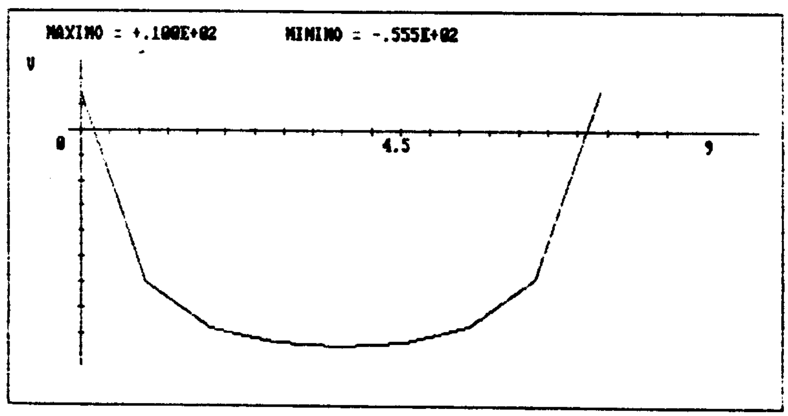
Valores admisibles de u : $[-1,1] \times [-1,1] \times [0,1]$

Discretización de u_1 : (-1,0,1)

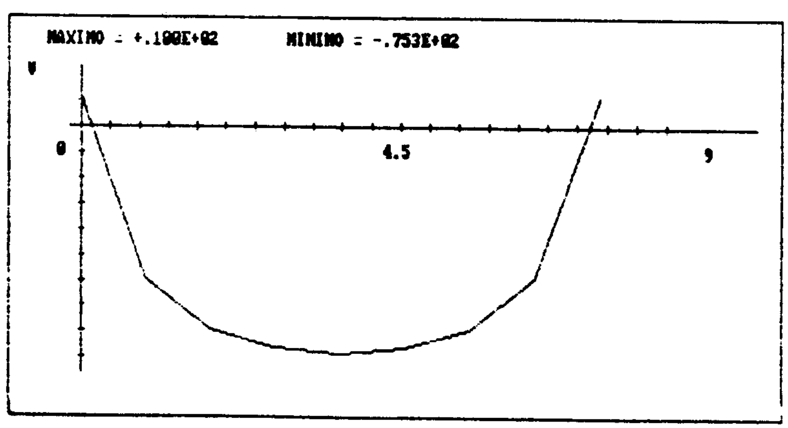
Discretización de u_2 : (-1,0,1)

Discretización de u_3 : (0.0,0.25,0.5,0.75,1.0)

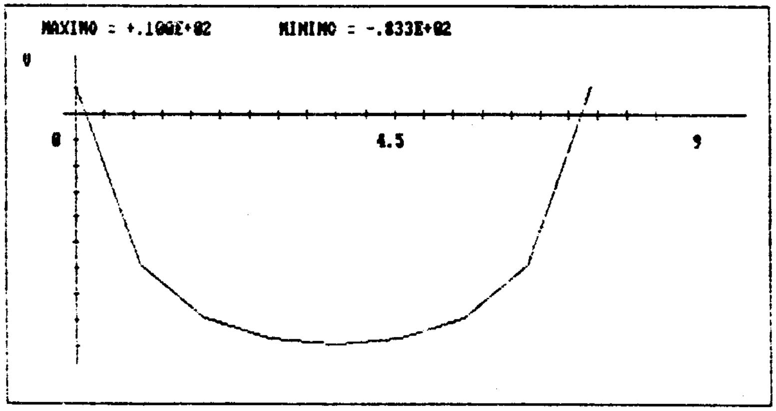
GRAFICOS DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA V



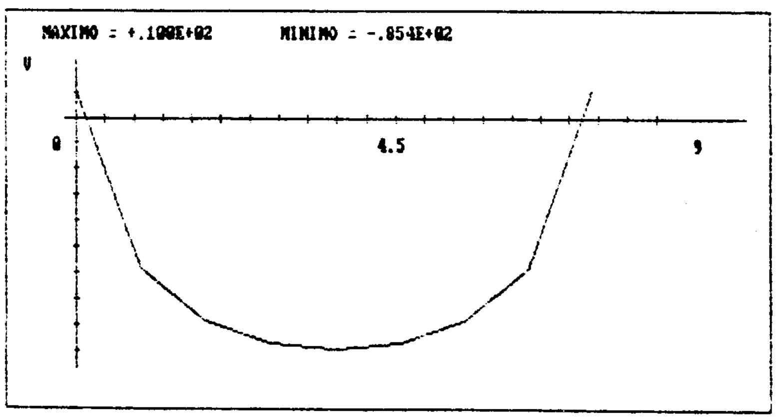
Valores de V en x1=0.75



Valores de V en x1=0.50



Valores de V en xl=0.25



Valores de V en xl=0.00

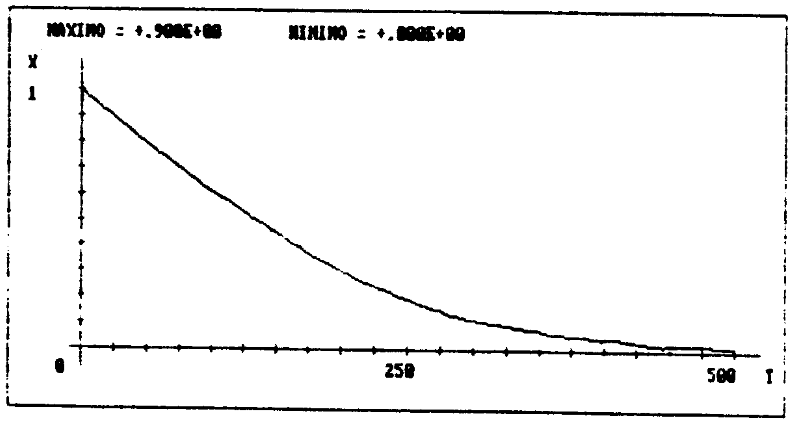
SIMULACION DE LAS TRAYECTORIAS SUBOPTIMAS

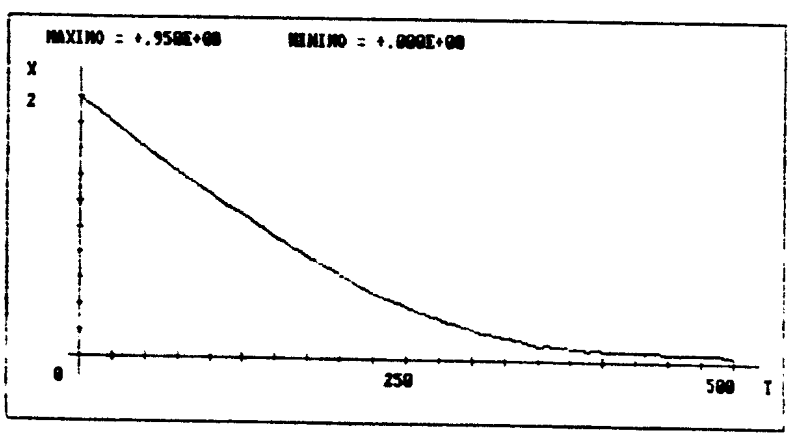
Las trayectorias se obtuvieron integrando en forma aproximada la ecuación diferencial estocástica (2) haciendo uso de un generador de números aleatorios.

La fórmula utilizada fue:

$$x((n+1)h)=x(nh)+f(x(nh),\tilde{u}(x(nh))h+s(\tilde{u})\ h^{1/2}\ g_a(n)$$

donde $g_a(n)$ posee dos componentes y cada una de ellas es una lista de números aleatorios.





REFERENCIAS

[1] González, R.and Rofman, E. "On deterministic control problems: an approximation procedure for the optimal cost. Part I and Part II. SIAM J. CONTROL AND OPTIMIZATION. Vol 23, N. 2, 1985 pp. 242-266 and pp. 267-285.

[2] González, R. and Rofman, E. "Stochastic control problems. An algorithm for the value function and the optimal policy. Aceptado para su presentación en 13th IFIP Conference on System Modeling and Optimization. Tokio, Japan. Aug. 31 - Sept. 4, 1987.

[3] Fleming, W.H. and Rishel, R. "Optimal Deterministic and Stochastic Control", Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[4] Bensoussan A. and Lions, J.L., "Applications des inécuations variationnelles en contrôle stochastique, Dunod, Paris, 1978.

[5] González, R., "Sur l'existence d'une solution maximale de l'équation de Hamilton-Jacobi, CRAS Paris, 282 (1976), pp 1287-1290.

[6] Lions, P.L. and Menaldi, J.L, "Optimal control of stochastic integrals and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. II. SIAM J. CONTROL AND OPTIMIZATION Vol. 20, N. 1, January 1982.