FORMULAÇÃO TANGENTE PARA ANÁLISE VISCOPLÁSTICA POR ELEMENTOS FINITOS APLICADA A PLACAS À FLEXÃO

Roberto L. Pimentel
Luiz E. Vaz

Departamento de Engenharia Civil.
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - Brasil.

RESUMO

A finalidade deste trabalho é apresentar uma formulação tangente para a análise viscoplástica de placas à flexão por elementos finitos. O ponto de partida é a obtenção de uma relação entre os incrementos de tensão, deformação total e velocidade de deformação, obtida da condição de anulação do diferencial da superfície de escoamento. A velocidade de deformação é considerada como um parâmetro que controla a expansão ou contração desta superfície.

A integração no tempo da equação obtida é feita utilizando-se um algoritmo de velocidade constante aqui proposto.

ABSTRACT

The aim of this work is to present a tangent formulation for the viscoplastic analysis of bending plates by the finite element method. The starting point is to obtain a equation relating the increments of stress, total strain and rate of strain. This is achieved by making null the first order increment of the yield surface. The strain rate is considered as a parameter which controls the expansion and shrinkage of this surface.

The integration in time of the resulting equation is performed by means of an algorithm of constant velocity.

1. INTRODUÇÃO

A formulação viscoplástica aqui apresentada permite levar em conta o efeito da viscosidade de uma maneira intrínseca, aproveitando-se a formulação elastoplástica convencional. A superfície de escoamento é concebida levando-se em conta as características plástica e viscosa do material.

O modelo reológico adotado é composto por elementos elástico, plástico e viscoso. Consiste de uma fase elástica linear até atingir-se a superfície de escoamento; inicia-se então uma fase viscoplástica, onde o efeito de viscosidade, função da velocidade de deformação, induz uma expansão desta superfície para além do valor predito pela teoria da plasticidade. Esta concepção permite a obtenção de matrizes de rigidez e amortecimento consistentes com a formulação viscoplástica e o uso de um método tangente.

A equação constitutiva do material é obtida a partir destas considerações e implementada num modelo de elementos finitos para placas à flexão, sendo também consideradas as deformações por cisalhamento, de acordo com a teoria de Mindlin. A integração numérica ao longo da espessura é feita por camadas, de forma a captar mais precisamente o efeito de plastificação.

A integração da equação no tempo é feita utilizando um algoritmo de velocidade constante em cada incremento de tempo. No caso dinâmico, a formulação pode ser acoplada a algoritmos de integração direta convencionais como o de Newmark.

Para teste da formulação e análise dos resultados, uma viga e uma placa são utilizadas em exemplos.

2. FORMULAÇÃO VISCOPLÁSTICA

2.1. Teoria Viscoplástica

A teoria viscoplástica permite a inclusão da variável tempo no fenômeno de plastificação. Assim, após o início do escoamento do material, o fluxo plástico, e as conseqüentes tensões e deformações, são dependentes do tempo.

As experiências têm mostrado [1] que para quase todos os materiais tecnológicos e sob uma faixa variada de condições, um acréscimo na taxa de deformação produz um acréscimo na tensão de escoamento dinâmica, sem praticamente influência sobre a tensão de escoamento estática. Uma vez que a primeira não é certamente uma característica constante do material e sim uma conseqüência da equação constitutiva usada e das taxas de carregamento, a obtenção desta equação é um passo definitivo na análise do problema. Como restrições de um caso mais geral, não são consideradas a dependência do módulo elástico da taxa de deformação e a influência da temperatura.

O modelo reológico unidimensional adotado para representar o comportamento viscoplástico do material é o utilizado em [2] e está representa do na Fig. 1. Nele, o componente de fricção desenvolve uma tensão σ_p ,

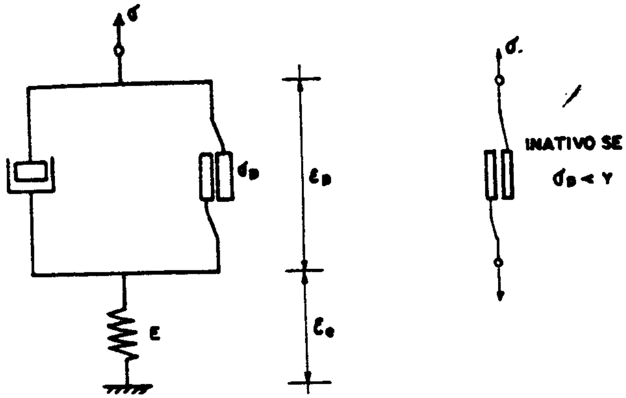

Figura 1. Modelo Reológico Adotado

havendo deslizamento ou fluxo plástico quando $\sigma_p > Y$, onde Y é a tensão de referência para início de escoamento. Havendo deslizamento, a presença do componente de amortecimento permite que o nível de tensões instantaneamente exceda o valor Y, determinado pela teoria plástica. Este comportamento pode ser visualizado nas curvas da Fig. 2. A resposta elástica fornecida pela mola é instantânea. Observar que antes do início do escoamento ou num descarregamento, fases elásticas, o amortecedor não atua.

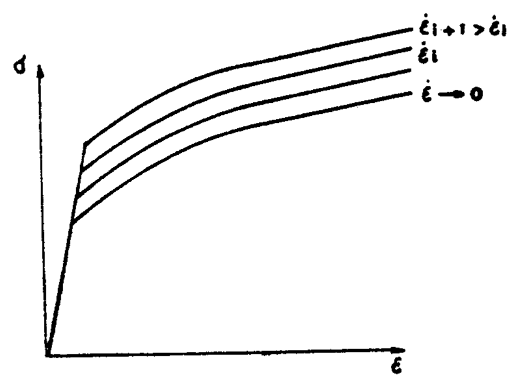

Figura 2. Curvas Tensão-Deformação Unidimensionais para Diferentes Taxas de Deformação

O escoamento é governado pela função

$$F(\underset{\sim}{\sigma}, Y) = f(\underset{\sim}{\sigma}) - Y = \bar{\sigma} - Y = 0 \qquad (1)$$

onde $\underset{\sim}{\sigma}$ é o estado de tensões, $\bar{\sigma}$ é a tensão uniaxial equivalente e Y, a tensão de escoamento uniaxial de referência, que pode ser função de um parâmetro de endurecimento k. O fluxo viscoplástico só ocorre para $F > 0$.

É necessário escolher uma lei que defina as deformações viscoplásticas. Uma forma explícita utilizada é a seguinte lei de fluxo, considerando plasticidade associada:

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma < \rho(F) > \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \gamma < \rho(F) > \underline{a} \qquad (2)$$

onde γ é um parâmetro que controla a taxa de fluxo plástico, $\rho(F)$ é uma função monotônica crescente positiva para $F > 0$, e a notação $< >$ indica

$$\begin{aligned} <\rho(F)> &= \rho(F), \quad F > 0 \\ <\rho(F)> &= 0, \quad F \leq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Uma versão utilizada para (F) [2] é a forma

$$\rho(F) = \phi\left(\frac{\bar{\sigma} - Y}{Y}\right) = \phi\left(\frac{\bar{\sigma}}{Y} - 1\right) \qquad (4)$$

que é adotada no trabalho por se adequar bem à proposta em estudo.

Voltando a observar a Fig. 2, considere-se a curva tensão-deformação obtida para $\dot{\varepsilon} \to 0$. Nela, cada incremento de tensões é aplicado após as deformações plásticas causadas pelo incremento anterior terem ocorrido completamente. As demais curvas podem ser interpretadas como seqüências de estados de equilíbrio, após o fluxo plástico ocorrer, para taxas de deformação finitas. A tensão σ excede o valor estático $\sigma_{ys}(\dot{\varepsilon} \to 0)$.

Para relacionar o estado de tensões σ às taxas de deformação, usa-se as leis constitutivas introduzidas por Malvern e adaptadas por Liu e Owen [3]. Para o caso unidimensional,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_p \qquad (5)$$

onde, usando-se (2) e (4):

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma < \phi\left(\frac{\sigma}{\sigma_{ys}} - 1\right) > \qquad (6)$$

Da equação (6):

$$\sigma = \sigma_{ys}\left[1 + \phi^{-1}\left(\frac{\dot{\varepsilon}_p}{\gamma}\right)\right] \qquad (7)$$

com $\sigma_{ys} = \sigma_{ys}(\varepsilon_p)$, no caso de um modelo plástico com endurecimento no qual a deformação plástica é tomada como parâmetro. A Eq. (7) descreve uma série de curvas tensão-deformação cinemáticas, paralelas à curva estática $\sigma_{ys}(\dot{\varepsilon} \to 0)$. A função inversa ϕ^{-1} pode ser obtida por ajustamento experimental, quando esta relação na região plástica é plotada para taxas de deformação constante. Desta forma, a eq. (7) pode ser reescrita como

$$\sigma_{yd} = \sigma_{ys}\,(\varepsilon_p)\,[1 + \Phi(\dot{\varepsilon})] \tag{8}$$

com σ_{yd} sendo função da deformação plástica e da taxa de deformação corrente. A função $\Phi(\dot{\varepsilon})$ é definida na seção 2.3.

2.2. Equação Constitutiva

De acordo com a eq. (8), a eq. (1), que rege o escoamento, pode ser reescrita como:

$$F(\underset{\sim}{\sigma}\,,\,\sigma_{yd}\,(\bar{\varepsilon}_p,\,\bar{\dot{\varepsilon}})) = f(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_{yd}\,(\bar{\varepsilon}_p,\bar{\dot{\varepsilon}}) = 0 \tag{9}$$

A condição de permanência na superfície viscoplástica é dada por:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}\right)^T d\underset{\sim}{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yd}} \frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_p}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}_p}\right)^T d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_p \; +$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{yd}} \frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial \bar{\dot{\varepsilon}}} \left(\frac{\partial \bar{\dot{\varepsilon}}}{\partial \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}}\right)^T d\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = 0 \tag{10}$$

Considerando o incremento de deformações plásticas normal à superfície de escoamento:

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}_p = d\lambda\, \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = d\lambda \underset{\sim}{a} \tag{11}$$

Por sua vez, o incremento total de tensões é relacionado ao incremento de deformação elástica por:

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}\, d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_e = \underset{\sim}{D}(d\underset{\sim}{\varepsilon} - d\,\underset{\sim}{\varepsilon}_p) \tag{12}$$

onde $\underset{\sim}{D}$ - matriz constitutiva elástica.

Substituindo (12) e (11) em (10), encontra-se:

$$d\lambda = \frac{1}{H}(\underset{\sim}{a}^T\underset{\sim}{D}d\,\underset{\sim}{\varepsilon}) + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{yd}} \frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial \bar{\dot{\varepsilon}}} \left(\frac{\partial \bar{\dot{\varepsilon}}}{\partial \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}}\right)^T d\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) \tag{13}$$

com

$$H = \underset{\sim}{a}^T\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{a} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yd}} \frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_p}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}_p}\right)^T \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}^T\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{a} + H' \tag{14}$$

Demonstra-se [4] que, para o modelo plástico a ser adotado, H' é simplesmente a derivada da curva tensão-deformação plástica de referência unidimensional. Esta curva encontra-se detalhada na seção 2.3.

Substituindo (13) e (11) em (12), obtém-se finalmente:

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \left(\underset{\sim}{D} - \frac{\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{a}\,\underset{\sim}{a}^T\,\underset{\sim}{D}}{\underset{\sim}{a}^T\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{a} + H'}\right) d\,\underset{\sim}{\varepsilon} + \left(\left(-\frac{\partial F}{\partial \sigma_{yd}}\right) \frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial \bar{\dot{\varepsilon}}} \frac{\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{a}(\partial \bar{\dot{\varepsilon}}/\partial \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}})^T}{\underset{\sim}{a}^T\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{a} + H'}\right) d\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{15}$$

com

$$D_{ep} = D - \frac{D\, a\, a^T D}{a^T D\, a + H'} \qquad (16)$$

$$C_{ep} = \left(- \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yd}}\right) \frac{\partial \sigma_{yd}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}} \; \frac{D\, a (\partial \dot{\bar{\varepsilon}} / \partial \dot{\varepsilon})^T}{a^T D\, a + H'} \qquad (17)$$

Observando a eq. (15) e a Figura (3), verifica-se que o incremento de tensões, após o escoamento, é composto por duas parcelas: a elastoplástica, devido a plastificação, e a parcela elástica, devido à expansão ou retração da superfície de escoamento, sob efeito da velocidade de deformação. Podemos escrever:

$$d\sigma = d\sigma\ (d\,\varepsilon_{ep}) + d\sigma\,(d\,\dot{\varepsilon}) = d\,\sigma_{ep} + d\sigma\,(d\,\dot{\varepsilon}) \qquad (18)$$

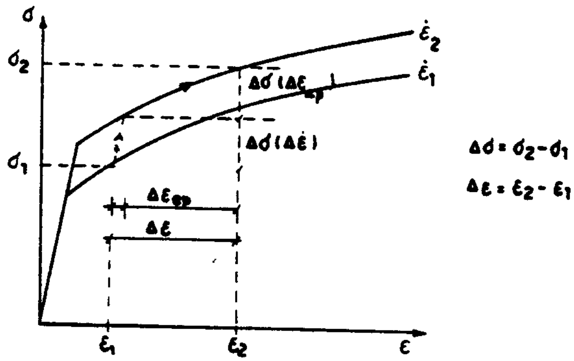

Figura 3. Visualização dos Incrementos de Tensão Devido à Plastificação e Viscosidade

É possível, como opção, utilizar apenas a parcela elastoplástica como incremento de tensões. Basta tomar a eq.(12) e subtrair a ambos os termos a parcela elástica devido ao efeito da velocidade de deformação:

$$d\,\sigma_{ep} = d\sigma - d\,\sigma(d\,\dot{\varepsilon}) = D((d\,\varepsilon - D^{-1} d\sigma\,(d\,\dot{\varepsilon})) - d\,\varepsilon_p) \qquad (19)$$

$$d\,\sigma_{ep} = D\,(d\,\varepsilon_{ep} - d\,\varepsilon_p) \qquad (20)$$

com

$$d\,\varepsilon_{ep} = d\varepsilon - D^{-1}\, d\sigma\,(d\,\dot{\varepsilon}) \qquad (21)$$

Na eq.(13) também deve-se suprimir o efeito da viscosidade:

$$d\lambda' = d\lambda - d\lambda\,(d\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{a^T D\, a + H'}\,(a^T D(d\varepsilon - d\varepsilon\,(d\dot{\varepsilon})) = \tag{22}$$

$$= \frac{1}{a^T D\, a + H'}\,(a^T D\, d\,\varepsilon_{ep})$$

As equações (20) e (22) são equivalentes às eqs. (12) e (13), respectivamente, e serão utilizadas no algoritmo de cálculo das forças internas resistentes, no Título 4.

2.3. Modelos Plástico e Viscoplástico Adotados

O critério de escoamento adotado é o de Von Mises, podendo conter ou não um endurecimento isotrópico. A função de escoamento pode ser escrita como:

$$F(\sigma\,,\ \sigma_{yd}(\bar{\varepsilon}_p,\ \dot{\bar{\varepsilon}})) = \sqrt{3J_2} - \sigma_{yd}(\bar{\varepsilon}_p,\ \dot{\bar{\varepsilon}}) = 0 \tag{23}$$

onde J_2 é o 2º invariante do tensor das tensões deviatóricas.

A característica de endurecimento da superfície de escoamento é a adotada no trabalho de Liu e Owen [3]. A relação uniaxial é a seguinte:

$$\frac{\sigma_{ys}}{\sigma_{in}} - 1 = \frac{(E_R - E_{PR})\,\bar{\varepsilon}_p}{\left(1 + \left(\frac{(E_R - E_{PR})}{\xi}\bar{\varepsilon}_p\right)^n\right)^{1/n}} + E_{PR}\,\bar{\varepsilon}_p \tag{24}$$

onde σ_{in} é a tensão inicial de escoamento, e os demais valores podem ser identificados na Figura 4.

O valor de H' é obtido da eq. (24):

$$H' = \frac{d\sigma_{yd}}{d\bar{\varepsilon}_p} = \sigma_{in}\left[\frac{E_R - E_{PR}}{\left(1 + \left(\frac{(E_R - E_{PR})\,\bar{\varepsilon}_p}{\xi}\right)^n\right)^{(n+1)/n}} + E_{PR}\right](1 + \Phi(\dot{\bar{\varepsilon}})) \tag{25}$$

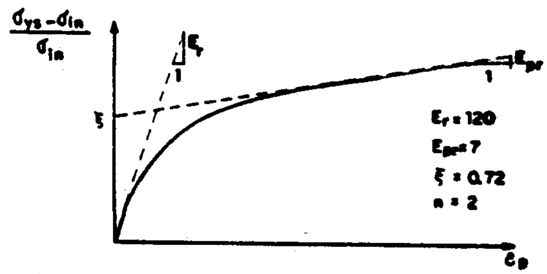

Figura 4. Curva Uniaxial de Referência para o Modelo com Endurecimento

No modelo perfeitamente plástico:

$$\sigma_{ys}(\bar{\varepsilon}_p) = \sigma_{in}$$
$$H' = 0 \qquad (26)$$

O modelo viscoplástico baseia-se nos ensaios de Albertini e Montagnani e encontra-se com mais detalhes na Ref. [3]. A função de sensibilidade $\Phi\ (\bar{\dot{\varepsilon}})$ é dada por:

$$\Phi\ (\bar{\dot{\varepsilon}}) = \frac{\sigma_{yd}}{\sigma_{ys}} - 1 = \lambda \log_{10}\ (\frac{\bar{\dot{\varepsilon}}}{\dot{\varepsilon}_s}) \qquad (27)$$

com o parâmetro de proporcionalidade $\lambda = 0.03$ e a taxa de deformação estática (abaixo da qual a sensibilidade à velocidade de deformação não é evidente) dada por $\dot{\varepsilon}_s$. Os valores atribuídos a estes parâmetros são objeto de discussões posteriores.

3. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

O modelo de elementos finitos utilizado para placas à flexão baseia-se na teoria de Mindlin. Cada elemento serendipity quadrático possui 3 graus de liberdade por nó, discretizados independentemente, sendo um deslocamento transversal e duas rotações. O uso deste elemento permite uma grande flexibilidade na utilização para contornos irregulares ou curvos e produz bons resultados em placas espessas. Sua utilização em placas delgadas merece cuidados, como recomenda a literatura [2], [5]. No presente trabalho, considera-se apenas a utilização da integração numérica reduzida uniforme como forma de combater o excesso de enrijecimento observado nas placas delgadas.

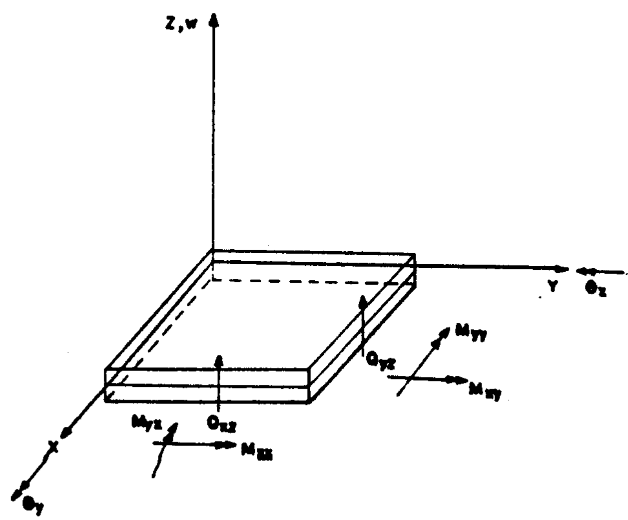

Figura 5. Convenção de Sinais Adotada

Para um certo nó i, a matriz que relaciona curvaturas a deslocamentos é dada por:

$$\mathbf{B}_i(5 \times 3) = \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \\ N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \tag{28}$$

As matrizes globais de rigidez e amortecimento são obtidas considerando-se por hipótese que deslocamento e velocidade são interpolados com as mesmas funções de interpolação. Usando o princípio dos trabalhos virtuais incremental, obtém-se:

$$\int_V \delta\, \mathbf{\varepsilon}^T\, d\mathbf{\sigma}\, dV = \delta\, \mathbf{U}^T\, d\mathbf{F} \tag{29}$$

com

$$d\,\mathbf{\sigma} = \mathbf{D}_{ep}\, d\,\mathbf{\varepsilon} + \mathbf{C}_{ep}\, d\,\dot{\mathbf{\varepsilon}}$$

e

$$\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{B}'\, \mathbf{U} \tag{31}$$

$$\dot{\mathbf{\varepsilon}} = \mathbf{B}'\, \dot{\mathbf{U}} \tag{32}$$

A eq. (29) fica:

$$\delta\, \mathbf{U}^T \int_V \mathbf{B}'^T\, \mathbf{D}_{ep}\, \mathbf{B}' dV\, d\mathbf{U} + \delta\, \mathbf{U}^T \int_V \mathbf{B}'^T\, \mathbf{C}_{ep}\, \mathbf{B}' dV\, d\dot{\mathbf{U}} = \delta \mathbf{U}^T\, d\mathbf{F} \tag{33}$$

e, finalmente, como $\delta\mathbf{U}^T$ é qualquer:

$$\int_V \mathbf{B}'^T\, \mathbf{D}_{ep}\, \mathbf{B}' dV\, d\mathbf{U} + \int_V \mathbf{B}'^T\, \mathbf{C}_{ep}\, \mathbf{B}'\, d\dot{\mathbf{U}} = d\mathbf{F} \tag{34}$$

As integrais de volume da eq. (34) são desdobradas em integrais de área e integrais ao longo da espessura, resultando em:

$$\int_A \mathbf{B}^T\, \mathbf{D}^*_{ep}\, \mathbf{B}\, dA\, d\mathbf{U} + \int_A \mathbf{B}^T\, \mathbf{C}^*_{ep}\, \mathbf{B}\, dA\, d\dot{\mathbf{U}} = d\mathbf{F} \tag{35}$$

onde

$$\mathbf{K}_T = \int_A \mathbf{B}^T\, \mathbf{D}^*_{ep}\, \mathbf{B}\, dA \tag{36}$$

$$\underset{\sim}{C}_T = \int_A \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{C}^*_{ep} \underset{\sim}{B} \, dA \qquad (37)$$

e as matrizes $\underset{\sim}{D}^*_{ep}$ e $\underset{\sim}{C}^*_{ep}$, que relacionam, respectivamente, incrementos de esforços a incrementos de deformações generalizadas (curvaturas) e incrementos de taxa de deformação generalizadas, são obtidas integrando-se ao longo da espessura as matrizes $\underset{\sim}{D}_{ep}$ e $\underset{\sim}{C}_{ep}$. Estas integrais são aproximadas por um somatório de camadas, nas quais é discretizada a espessura.

4. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO GLOBAL

A viscoplasticidade é um fenômeno transiente e por conseguinte o objetivo de um processo de resolução numérica é determinar os deslocamentos, deformações e tensões durante o intervalo de tempo de interesse. Para um certo instante t, o equilíbrio de forças é obtido usando o método de Newton-Raphson em sua forma convencional, cuja equação incremental é obtida da condição de que o vetor de tensões permaneça na superfície de escoamento para incrementos de deformação e velocidade de deformação. Isto permite a obtenção de matrizes de rigidez e amortecimento consistentes com a formulação viscoplástica e o uso de um método tangente. O tempo é discretizado em intervalos e, em qualquer intervalo Δt, a equação global de equilíbrio é dada por:

$$\underset{\sim}{K}_T^{(i-1)} \, d\underset{\sim}{U}^{(i-1)} + \underset{\sim}{C}_T^{(i-1)} \, d\dot{\underset{\sim}{U}}^{(i-1)} = \underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{F}^{(i-1)}, \text{ em } t + \Delta t \qquad (38)$$

onde

$\underset{\sim}{R}$ - Vetor de carregamento nodal equivalente

$\underset{\sim}{F}^{(i-1)}$ - Vetor das forças internas resistentes da iteração anterior dado, genericamente, por

$$\underset{\sim}{F} = \int_V \underset{\sim}{B}'^T \underset{\sim}{\sigma} \, dV = \int_A \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\sigma}^* \, dA \qquad (39)$$

O algoritmo para determinação de tais forças internas é o adotado na Ref. [3], com uma pequena alteração na determinação do ponto de furo da superfície de escoamento e na definição da velocidade de deformação equivalente. Encontra-se esquematizado na Figura 6.

A integração da eq. (38) é feita mediante o uso de um algoritmo de velocidade constante em cada intervalo. Sejam:

$$d\underset{\sim}{U}^{(i-1)} \cong \Delta\underset{\sim}{U}^{(i-1)} = \underset{\sim}{U}^{(i)} - \underset{\sim}{U}^{(i-1)} \qquad (40)$$

$$d\dot{\underset{\sim}{U}}^{(i-1)} \cong \Delta\dot{\underset{\sim}{U}}^{(i-1)} = \dot{\underset{\sim}{U}}^{(i)} - \dot{\underset{\sim}{U}}^{(i-1)} = \frac{1}{\Delta t}(\underset{\sim}{U}^{(i)} - \underset{\sim}{U}_o) - \frac{1}{\Delta t}(\underset{\sim}{U}^{(i-1)} - \underset{\sim}{U}_o) \qquad (41)$$

$$\Delta\dot{\underset{\sim}{U}}^{(i-1)} = \frac{1}{\Delta t}(\underset{\sim}{U}^{(i)} - \underset{\sim}{U}_o) - \dot{\underset{\sim}{U}}_o^{(i-1)} \qquad (42)$$

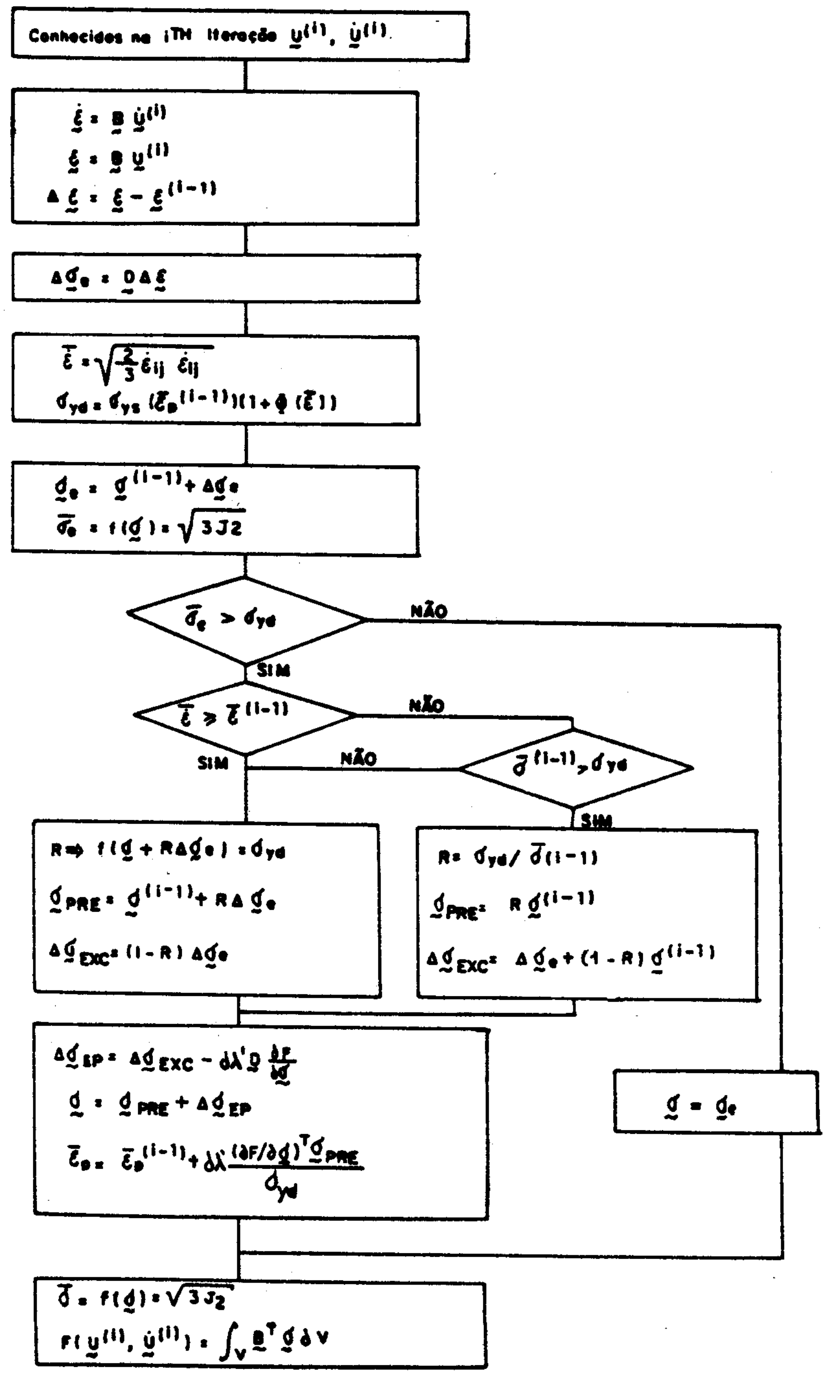

Fig. 6. Algoritmo para Câlculo das Forças Internas Resistentes

com $\underset{\sim}{U}_o$ - deslocamento conhecido ao início do intervalo.

Levando as eqs. (40) e (42) à eq. (38), obtém-se:

$$(\underset{\sim}{K}_T^{(i-1)} + \frac{1}{\Delta t}\,\underset{\sim}{C}_T^{(i-1)})\,\underset{\sim}{U}^{(i)} = \underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{F}^{(i-1)} + \underset{\sim}{K}_T^{(i-1)}\,\underset{\sim}{U}^{(i-1)} + \underset{\sim}{C}_T^{(i-1)}(\frac{1}{\Delta t}\,\underset{\sim}{U}_o + \dot{\underset{\sim}{U}}_o^{(i-1)}) \tag{43}$$

Após atingido o equilíbrio ($\underset{\sim}{U}^{(i-1)} \cong \underset{\sim}{U}^{(i)}$), passa-se a outro intervalo de tempo.

No problema dinâmico, deve-se anexar à eq. (38) a parcela referente às forças de inércia, obtendo as matrizes $\underset{\sim}{K}_T$ e $\underset{\sim}{C}_T$ através das Eqs. (36)e (37).

5. EXEMPLOS

Dois exemplos são apresentados para ilustrar a aplicabilidade da formulação aqui apresentada. No primeiro pretende-se comprovar o funcionamento da formulação, analisando-se uma viga cujo material segue o modelo plástico com endurecimento. No 2º exemplo, analisa-se uma placa de material perfeitamente plástico, onde mostra-se que a formulação pode degenerar no problema plástico.

5.1. Análise Viscoplástica de uma Viga Biapoiada com Carga Concentrada Aplicada no Meio do Vão

A viga biapoiada, cujas características e discretização em elementos finitos encontram-se na Fig. 7, é submetida a uma carga concentrada súbita indicada na mesma figura. Tal carga ultrapassa o limite elástico do material,provocando plastificação. Para acompanhar o fluxo plástico no tempo, são plotadas na Fig. 8, na seção transversal central da viga, as deformações plásticas equivalentes em alguns instantes de tempo, usando diferentes valores do parâmetro $\dot{\varepsilon}_s$.

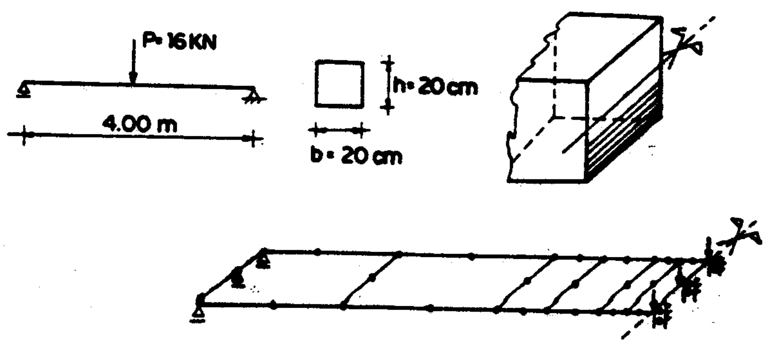

Figura 7. Características e Discretização da Viga

Pode-se observar, nas curvas traçadas, que tal parâmetro controla a velocidade com que ocorre a plastificação. Com o tempo, a velocidade de deformação decresce até que por fim as deformações plásticas atingem o valor final, quando o processo estabiliza.

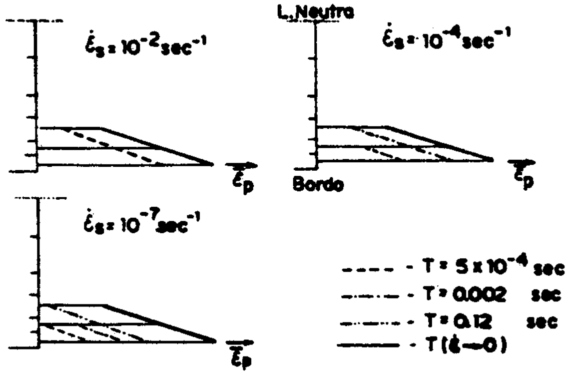

Figura 8. Deformações Plásticas Equivalentes na Seção Transversal Central da Viga

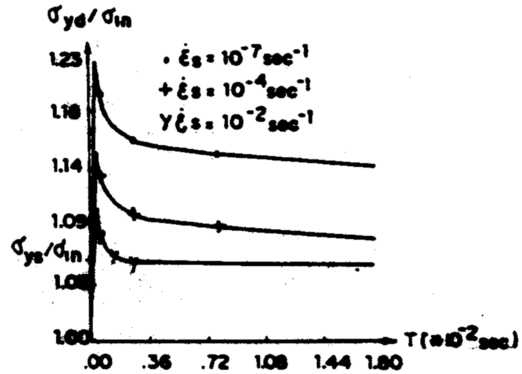

Figura 9. Curvas de Tensão Equivalente x Tempo

Na Fig. 9, para esta seção, no bordo inferior, são plotadas curvas tensão equivalente x tempo para os mesmos valores de $\dot{\varepsilon}_s$, permitindo observar a contração da superfície de escoamento com o tempo, até atingir seu valor final estático.

5.2. Análise Elastoplástica de uma Placa Biapoiada com Carga Concentrada Aplicada no Centro

Uma placa biapoiada (Fig. 10) com espessura de 10cm é submetida a um carregamento proporcional até atingir a ruptura. Tal carga é aplicada lentamente, usando-se intervalos de tempo grandes em cada estágio de carregamento, de forma a que os efeitos de viscosidade não se verifiquem. A análise viscoplástica se degenera numa análise elastoplástica.

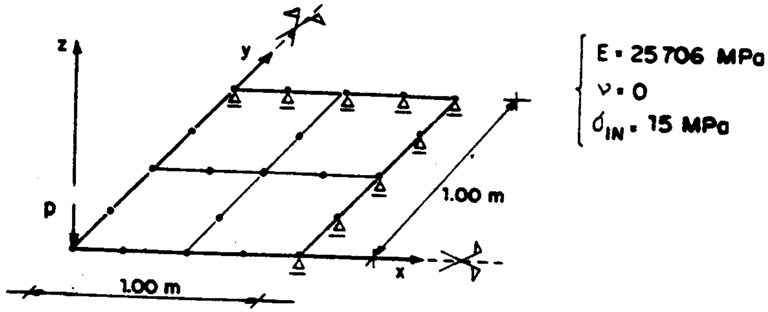

Figura 10. Estrutura e Discretização em Elementos Finitos

Na Fig. 11, comparam-se os resultados obtidos com os da teoria das charneiras plásticas [6], havendo boa concordância entre os mesmos, ressalvadas as hipóteses estabelecidas em [6] e a imprecisão no cálculo dos esforços na proximidade da carga. Assim, a formulação viscoplástica proposta pode ser bem utilizada no estudo do processo de plastificação, quando não se pretende acompanhar o fenômeno no tempo.

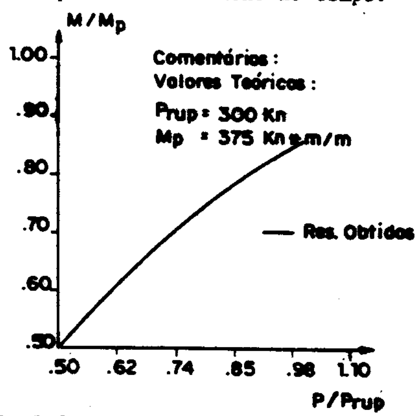

Figura 11. Curva de Esforço x Carregamento Aplicado Próximo ao Centro da Placa

6. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados confirmam a aplicabilidade da formulação proposta. Duas importantes conclusões podem ser obtidas:

1) A formulação, em conjunto com o algoritmo de integração no tempo, apresenta convergência independente do intervalo de tempo utilizado na integração. Isto confere à formulação um grande potencial do ponto de vista de praticidade, uma vez que erros na avaliação dos intervalos de tempo escolhidos não impedem o funcionamento do programa. Para intervalos de tempo suficientemente grandes, não se acompanha o fluxo plástico no tempo, obtendo-se diretamente o resultado plástico.

2) O correto acompanhamento do fluxo plástico no tempo está diretamente relacionado aos parâmetros utilizados na eq. (27), que define a influência da viscosidade no processo de plastificação. De acordo com os

resultados experimentais citados na ref. [3], tais parâmetros têm por valor:

$$\dot{\varepsilon}_s = 10^{-2}\ \sec^{-1} \qquad (44)$$

$$\lambda = 0.03, \text{ para deformações } \varepsilon \text{ na faixa de } 2\text{-}3\%$$

A utilização destes valores em outras faixas de deformação pode levar a resultados incorretos, particularmente no início do processo de plastificação, onde as deformações são baixas e a influência destes parâmetros é marcante, como se observa na fig. 9. Estes valores devem então ser calibrados para as várias faixas de deformação de forma a que o fluxo plástico seja corretamente acompanhado no tempo. Isto pode ser feito por ajustamento entre as curvas obtidas com esta formulação com as curvas de resposta usando as formulações viscoplásticas já existentes.

É possível, no caso de cargas de impacto, utilizar também a formulação apresentada, guiando-se pelo trabalho de Liu e Owen [3].

7. REFERÊNCIAS

[1] Cristescu, N., "Dynamic Plasticity". North Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1967.

[2] Owen, D.R.J.; Hinton, E., "Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice", Pineridge Press, Swansea, 1980.

[3] Liu, G.Q.; Owen, D.R.J., "Ultimate Load Behavior of Reinforced concrete plates and Shells under Dynamic Transient Loading", Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 22, 1986, pp. 189-208.

[4] Pimentel, R.L., "Análise Viscoplástica por Elementos Finitos de Placas à Flexão Sujeitas a Cargas de Impacto", Dissertação de Mestrado, Deptº de Eng. Civil - PUC/RJ, a ser publicada.

[5] Hughes, T.R.J.; Cohen, M.; Haroun, N., "Reduced and Selective Integration Technique in the Finite Element Analysis of Plates", Nucl. Eng. Design, Vol. 46, 1978, pp. 203-222.

[6] Langendonck, T.V., "Teoria Elementar das Charneiras Plásticas", Vol. 1, ABCP, 1970.