

ALGORITMOS PARA EL CALCULO DE SECCIONES POLIGONALES DE
HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO BAJO SOLICITACIONES DE
FLEXION COMPUESTA RECTA

Ing. Carlos Eduardo Haro

Departamento de Estructuras. Facultad de Ciencias Exactas
Fisicas y Naturales. Universidad Nacional de Cordoba.
Cordoba. Republica Argentina.

RESUMEN

Se deducen expresiones para los esfuerzos internos en estado ultimo de rotura, en una seccion poligonal de hormigon armado pretensado, obtenidas por integracion analitica del diagrama de tensiones, cuando estan solicitadas por flexocompresion o flexotraccion recta.

Ademas se presenta un algoritmo iterativo para el dimensionado de secciones mediante un computador personal, acorde a lo establecido por la Norma CIRSOC 201 (DIN 1045). El procedimiento, expuesto en detalle, garantiza la convergencia de la iteracion.

Similares algoritmos son propuestos para estimar el grado de seguridad de secciones de hormigon armado pretensado frente a solicitaciones de servicio.

ABSTRACT

Expressions for the internal forces in the ultimate state of rupture in a polygonal reinforced concrete section are deduced by analytical integration of the stresses diagram when they are solicited by direct axial load and a bending moment.

Besides an iterative algorithm for the dimensioning of sections using a personal computer is presented, following the regulations of the norm CIRSOC 201 (DIN 1045). The procedure exposed in detail guarantees the convergence of the iteration.

Similar algorithms are proposed for estimating the degree of security of prestressed concrete sections under service solicitations.

I - HIPOTESIS DE CALCULO FUNDAMENTALES

Son usuales, para solicitaciones normales, segun el Reglamento CIRSOC 201, las siguientes hipotesis de calculo:

a) Conservacion de las secciones planas.

b) Ecuacion constitutiva del hormigon.

Se trabaja con la distribucion de tensiones parabola-rectangulo para el hormigon comprimido y se desprecia totalmente su colaboracion a traccion, no muy confiable y en todo caso de escasa importancia.

Las ecuaciones tension-deformacion son:

$$\sigma_b = 0 \quad \text{si } \varepsilon_b > 0 \quad (1)$$

$$\sigma_b = \beta_R \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{0.002} \right)^2 \right] \quad \text{si } |\varepsilon_b| \leq 0.002 \quad (2)$$

$$\sigma_b = -\beta_R \quad \text{si } \varepsilon_b < -0.002 \quad (3)$$

c) Ecuacion constitutiva para el acero.

Se adopta una relacion constitutiva elasto-plastica para el acero, segun la Fig N° 1, regida por las ecuaciones:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad \text{si } |\varepsilon_s| \leq \beta_s / E_s \quad (4)$$

$$\sigma_s = \frac{|\varepsilon_s|}{\varepsilon_s} \beta_s \quad \text{si } |\varepsilon_s| > \beta_s / E_s \quad (5)$$

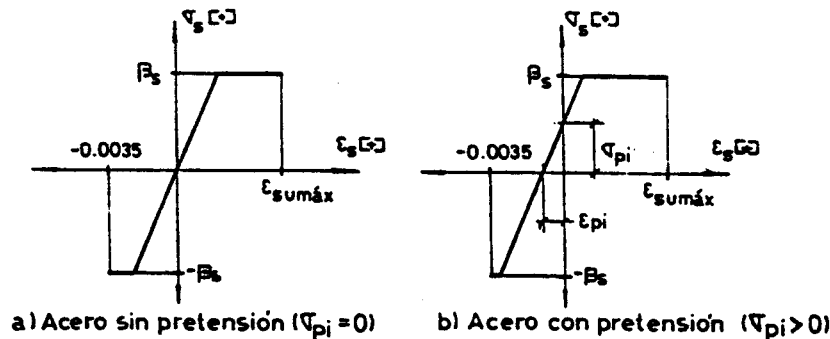


Fig. N° 1: Graficas tension-deformacion para el acero

d) Estados Limites.

El estado limite se caracteriza por el valor de la deformacion en ciertas fibras caracteristicas de la seccion. Se asume que una seccion esta en estado limite, o ultimo posible, cuando satisface, al menos, alguna de las siguientes condiciones:

* El acero inferior sufre un alargamiento especifico de 0.005 respecto al plano de deformacion nula del hormigon. Este es el estado limite ultimo de deformacion plastica excesiva.

* La fibra superior del hormigon alcanza una deformacion $\epsilon'_b = -0.0035$,

o
* en una fibra intermedia, situada a una profundidad $X=3/7 d$, el acortamiento especifico llega a $\epsilon'_b = -0.002$.

El pivoteo de los planos de deformaciones, respecto a los tres puntos citados, define al conjunto de estados ultimos, tal como se muestra en la Fig. N° 2.

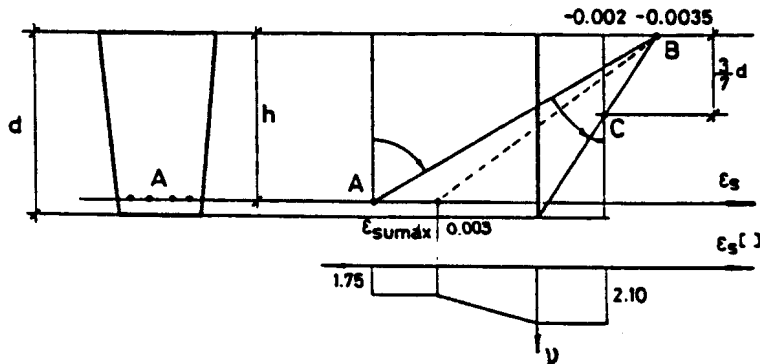


Fig. N° 2: Planos ultimos de deformacion.
Coeficiente de seguridad ν .

d) Adherencia perfecta acero-hormigon.

II - INTEGRACION DE LOS ESFUERZOS INTERNOS DEL HORMIGON

Respecto a un eje paralelo a la fibra neutra, la magnitud de los esfuerzos resistentes del hormigon solo depende de la profundidad de la fibra neutra, de la forma de la seccion y de la tension de rotura del hormigon β_R .

A continuacion se proponen expresiones que surgen de la integracion analitica de la distribucion de tensiones del hormigon, que resultaran exactas para secciones de contorno poligonal.

En la Fig. N° 3 se indica la nomenclatura a usar:

- h : altura util de la seccion.
- y_{sup} : ordenada del punto mas comprimido de la seccion de hormigon
- X : profundidad del eje neutro.
- y_{on} : ordenada del eje neutro.
- y_f : distancia del eje neutro a la fibra con un acortamiento $\epsilon'_b = -0.002$, donde se considera que el hormigon entra enfluencia
- N_b^u : Esfuerzo ultimo normal resistente interno del hormigon.
- z^* : Distancia de N_b^u al origen del sistema de referencias.
- M_b^u : Momento ultimo resistente interno del hormigon.

El sistema de referencias debe cumplir solo dos condiciones: .

* El eje vertical y debe coincidir con el eje de simetria de la

seccion. Esta condicion, no imprescindible, se aconseja para reducir el volumen de computos en el calculo.

* Si existe un unico nivel de armaduras no debe estar ubicado en el origen del sistema de referencias, porque, caso contrario, se estaria anulando el momento interno resistente de las armaduras.

Para obtener los esfuerzos N_b^u y M_b^u primeramente son calculados respecto al eje neutro, y luego trasladados al origen del sistema de referencias en un valor de y_{en} .

Se define, entonces, un nuevo eje auxiliar de referencias que llamaremos ω , cuyo origen se ubica sobre el eje neutro. Las ordenadas ω_i se calculan $\omega_i = y_i - y_{en}$, con la condicion $\omega_i \geq 0$.

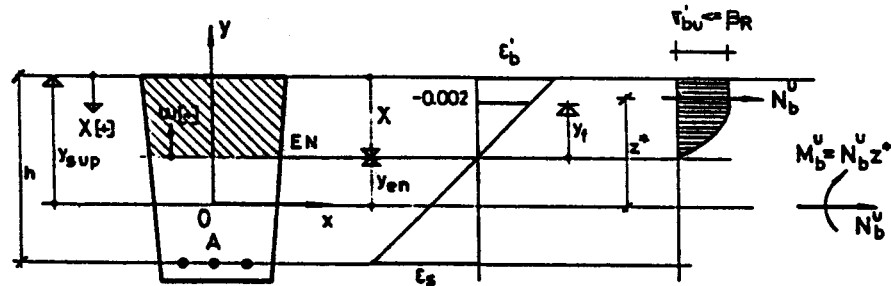


Diagrama de Tensiones Resultantes deformaciones en el hormigon

Fig. N° 3: Esfuerzos internos resistentes del hormigon.

La seccion superior al eje neutro se descompone en trapecios, tantos como lados rectos existan en el cuadrante positivo $x-\omega$. Con este cambio de variable solo existen cuatro combinaciones entre un trapecio y el diagrama parabola-rectangulo, ver Fig. N° 4.

Analiticamente en la integracion se realiza además otro cambio de variable, en base a la hipotesis de conservacion de las secciones planas, y se opera con la siguiente ley de variacion de las tensiones de compresion del hormigon:

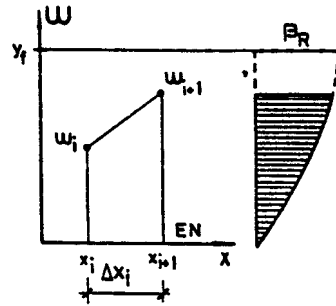
$$\frac{\sigma_b'}{\beta_R} = \left[\frac{\omega}{y_f} \right]^2 - 2 \frac{\omega}{y_f} \quad \text{si } \omega \leq y_f \quad (6)$$

$$\frac{\sigma_b'}{\beta_R} = -1 \quad \text{si } \omega > y_f \quad (7)$$

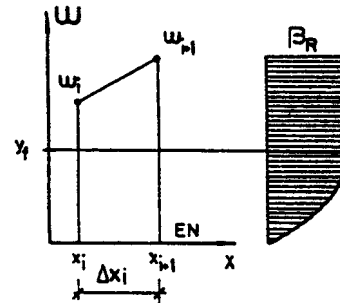
Es ahora facil deducir que, para un trapecio arbitrario i , las magnitudes resistentes $N_{b_{vri}}^u$ y $M_{b_{vri}}^u$ se calculan con:

$$N_{bv_i}^u = \int_0^{\Delta x_i} dx \int_0^{\omega_i + \frac{\Delta \omega_i}{\Delta x_i} x} \sigma'_b(\omega) d\omega, \quad y \quad (8)$$

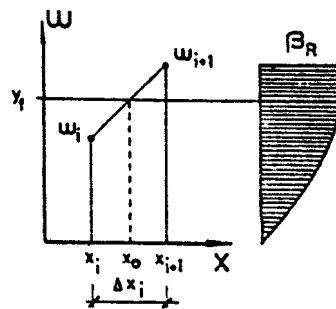
$$M_{bv_i}^u = - \int_0^{\Delta x_i} dx \int_0^{\omega_i + \frac{\Delta \omega_i}{\Delta x_i} x} \sigma'_b(\omega) \omega d\omega \quad (9)$$



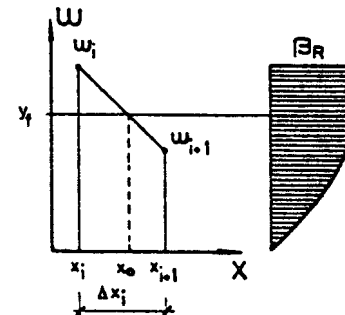
a) $y_f > \omega_{\max}$



b) $y_f < \omega_{\max}$



c) $\omega_i < y_f < \omega_{i+1}$



d) $\omega_i > y_f > \omega_{i+1}$

Fig.N°4: Campos de validez de las expresiones analíticas

Realizando estos cálculos se obtienen las siguientes expresiones :

► Caso 1: $y_f \geq \omega_{\max}$

$$N_{bv_i}^u = \beta_R \frac{\Delta x_i}{12 y_f^2} \left[\left(\omega_{i+1}^2 + \omega_i^2 \right) \left(\omega_{i+1} + \omega_i \right) - 4 y_f \left(\omega_{i+1}^2 + \omega_{i+1} \omega_i + \omega_i^2 \right) \right] \quad (10)$$

$$M_{bv_i}^u = -\beta_R \frac{\Delta x_i}{y_f^2} \left[\frac{1}{20} \left(\omega_{i+1}^4 + \omega_{i+1}^3 \omega_i + \omega_{i+1}^2 \omega_i^2 + \omega_{i+1} \omega_i^3 + \omega_i^4 \right) - \frac{y_f}{6} \left(\omega_{i+1}^2 + \omega_i^2 \right) \left(\omega_{i+1} + \omega_i \right) \right] \quad (11)$$

► Caso 2: $y_f \leq \omega_{\min}$:

$$N_{bv_i}^u = -\beta_R \Delta x_i \left[\frac{1}{2} \left(\omega_{i+1} + \omega_i \right) - \frac{y_f}{3} \right] \quad (12)$$

$$M_{bv_i}^u = \beta_R \frac{\Delta x_i}{12} \left[2 \Delta \omega_i \left(2 \omega_i + \omega_{i+1} \right) + 6 \omega_i^2 - y_f^2 \right] \quad (13)$$

► Caso 3: $\omega_{i+1} > y_f > \omega_i$:

$$N_{bv_i}^u = -\beta_R \left[\frac{1}{6} \left(x_{i+1} - x_o \right) \left(3 \omega_{i+1} + y_f \right) + \frac{(x_o - x_i)}{12 y_f^2} \left[\left(y_f^2 + \omega_i^2 \right) \left(y_f + \omega_i \right) - 4 y_f \left(y_f^2 + y_f \omega_i + \omega_i^2 \right) \right] \right] \quad (14)$$

$$M_{bv_i}^u = \beta_R \left[\frac{1}{12} \left(x_{i+1} - x_o \right) \left(2 \left(\omega_{i+1} - y_f \right) \left(2 y_f + \omega_{i+1} \right) + 5 y_f^2 \right) + \frac{(x_o - x_i)}{y_f^2} \times \left[\frac{1}{20} \left(y_f^4 + y_f^3 \omega_i + y_f^2 \omega_i^2 + y_f \omega_i^3 + \omega_i^4 \right) - \frac{y_f}{6} \left(y_f^2 + \omega_i^2 \right) \left(y_f + \omega_i \right) \right] \right] \quad (15)$$

$$\text{donde } x_{i+1} - x_o = \frac{\Delta x_i}{\Delta \omega_i} \left(\omega_{i+1} - y_f \right) \quad (16)$$

$$\text{y } x_o - x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta \omega_i} \left(y_f - \omega_i \right) \quad (17)$$

► Caso 4: $\omega_{i+1} < y_f < \omega_i$:

Se obtiene de las anteriores expresiones (14) y (15) permutando los valores de ω_i y ω_{i+1} y realizando el cambio de signo $\Delta \omega_i = -\Delta \omega_i$.

Para una determinada profundidad X del eje neutro, N_p poligonales de contorno, cada una con N_v vertices, se calculan los esfuerzos totales N_{bv}^u y M_{bv}^u sumando la contribucion de cada tramo de la poligonal:

$$N_{bv}^u = \sum_{i=0}^{N_p-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} N_{bv_j}^u \quad (18)$$

$$y \quad M_{bv}^u = \sum_{i=0}^{N_p-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} M_{bv_j}^u \quad (19)$$

Posteriormente se trasladan al origen del sistema de referencias :

$$N_b^u = N_{bv}^u \quad (20)$$

$$M_b^u = M_{bv}^u - N_{bv}^u y_{en} \quad (21)$$

III - ESFUERZOS INTERNOS ARMADURAS PUNTUALES

Los esfuerzos internos ultimos, respecto al origen del sistema de referencias, se obtienen de :

$$N_a^u = \sum_{i=1}^{N_a} A_{a_i} \sigma_{a_i} \quad (22)$$

$$M_a^u = - \sum_{i=1}^{N_a} A_{a_i} y_i \sigma_{a_i} \quad (23)$$

donde: N_a : numero de niveles de armaduras puntuales
 A_{a_i} : area del nivel i de armaduras.
 σ_{a_i} : tension correspondiente al nivel i de armaduras

El valor de σ_{a_i} se obtiene a partir de las ecuaciones constitutivas (4) y (5) utilizadas para el acero, en termino de su valor de deformacion ϵ_{a_i} . A su vez ϵ_{a_i} depende de la profundidad del eje neutro, del valor de deformacion excesiva del acero $\epsilon_{a_{umax}}$, y de la posicion de la fibra considerada. Se calcula con las expresiones:

$$\text{Si } X \leq \frac{0.0035 h}{\epsilon_{a_{umax}} + 0.0035} \quad \epsilon_i = \epsilon_{a_{umax}} \frac{y_i - y_{sup} + X}{X - h} \quad (24)$$

$$\text{si } X > \frac{0.0035 h}{\epsilon_{a_{umax}} + 0.0035} \text{ pero } X \leq d \quad \epsilon_i = -0.0035 \frac{y_i - y_{sup} + X}{X} \quad (25)$$

$$\text{si } X > d \quad \epsilon_i = -0.014 \frac{X - y_{sup} + y_i}{7 X - 3 d} \quad (26)$$

Si se desean para armadura total unitaria del sistema de armaduras variables, se reemplaza en (22) y en (23) A_{a_i} por $k_{a_i} = A_{a_i} / A_a$, siendo A_a el area total del sistema de armaduras variables.

IV - ESFUERZOS INTERNOS ARMADURAS DISTRIBUIDAS

Un tramo de armaduras linealmente distribuidas se caracteriza por :

(x_i, y_i) : coordenadas del punto mas traccionado del tramo
 (x_{i+1}, y_{i+1}) : coordenadas del punto mas comprimido del tramo
 A_{e_i} : armadura del tramo i en estudio.

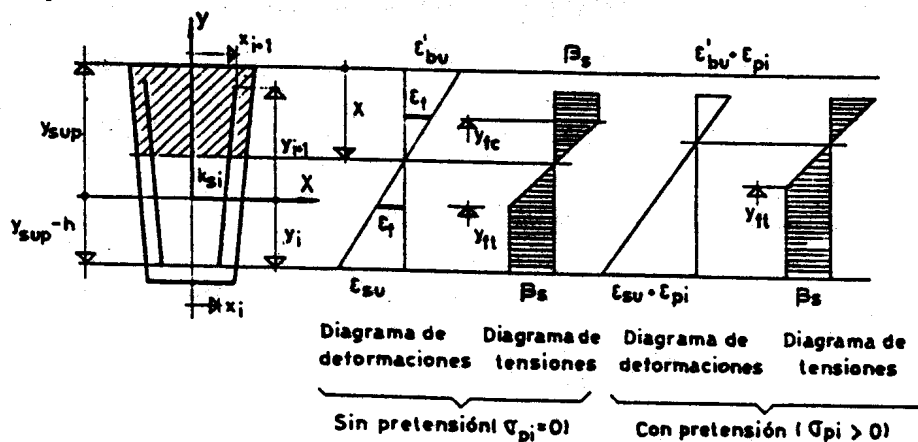


Fig. N° 5: Armaduras linealmente distribuidas.

En primer lugar se determinan las coordenadas y_{fc} e y_{ft} de las fibras en fluencia por compresion y por traccion respectivamente. La funcion $y = y(x)$ es la siguiente:

$$\text{si } X \leq \frac{0.0035 h}{\epsilon_{sumax} + 0.0035} \quad y = y_{sup} - X - \frac{\epsilon}{\epsilon_{sumax}} (h - X) \quad (27)$$

$$\text{si } X > \frac{0.0035 h}{\epsilon_{sumax} + 0.0035} \text{ pero } X \leq d$$

$$y = y_{sup} - X \left[\frac{\epsilon}{0.0035} + 1 \right] \quad (28)$$

$$\text{si } X \geq d \quad y = y_{sup} - \frac{3}{7} d - \left[\frac{\epsilon}{0.002} + 1 \right] \left[X - \frac{3}{7} d \right] \quad (29)$$

para determinar y_{fc} se utilizan las expresiones (27), (28) y (29) con el valor $\epsilon = (-\beta_s - \sigma_{pi}) / E_s$ e y_{ft} con $\epsilon = (\beta_s - \sigma_{pi}) / E_s$.

Para el analisis de un tramo en particular, se divide a este en segmentos donde el acero esta en fluencia y en donde el acero aun permanece en el rango elastico.

Algoritmo:

* Si $y_{fc} \leq y_{i+1}$ entonces existe un segmento en este tramo en el cual el acero esta en fluencia por compresion. Luego,

$$y_{min} = \text{Max} [y_i, y_{fc}]$$

$$y_{max} = y_{i+1}$$

$$A_{ps_i} = A_{s_i} \frac{y_{max} - y_{min}}{y_{i+1} - y_i} \quad y$$

$$N_{di}^u = - A_{ps_i} \beta_a \quad (31)$$

$$M_{di}^u = A_{ps_i} \frac{(y_{max} + y_{min})}{2} \beta_a \quad (32)$$

* Si $y_{i+1} > y_{ft}$ y además $y_i > y_{fc}$ existe un segmento en el tramo en estudio donde el acero permanece en el rango elástico.

$$y_{min} = \text{Max} [y_i , y_{ft}]$$

$$y_{max} = \text{Min} [y_{i+1} , y_{fc}]$$

$$A_{ps_i} = A_{s_i} \frac{y_{max} - y_{min}}{y_{i+1} - y_i}$$

$$\epsilon_i = \epsilon (y_{min}) \text{ segun ecs. (24) a (26)}$$

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon (y_{max})$$

$$N_{di}^u = A_{ps_i} E_s \frac{(\epsilon_i + \epsilon_{i+1})}{2} \quad y \quad (33)$$

$$M_{di}^u = -A_{ps_i} \frac{E_s}{6} \left[3 \epsilon_i (y_{min} + y_{max}) + (\epsilon_{i+1} - \epsilon_i) (y_{min} + 2 y_{max}) \right] \quad (34)$$

* Si $y_i < y_{ft}$ entonces existe un segmento en fluencia por tracción:

$$y_{min} = y_i$$

$$y_{max} = \text{Min} [y_{i+1} , y_{ft}]$$

$$A_{ps_i} = A_{s_i} \frac{y_{max} - y_{min}}{y_{i+1} - y_i} \quad y$$

$$N_{di}^u = A_{ps_i} \beta_a \quad (35)$$

$$M_{di}^u = - A_{ps_i} \frac{(y_{max} + y_{min})}{2} \beta_a \quad (36)$$

Finalmente, sumando sobre el numero de tramos N y el numero de segmentos se obtienen los esfuerzos resistentes:

$$N_d^u = \sum_{i=1}^N N_{di}^u \quad (37)$$

$$M_d^u = \sum_{i=1}^N M_{di}^u \quad (38)$$

Si se desean conocer los esfuerzos del sistema de armaduras distribuidas de seccion total variable, se deberan reemplazar en las ecs. (31) a (36) A_{ps_i} por el valor $k_{di} = A_{ps_i} / A$ o fraccion de la armadura total variable presente en ese tramo.

V - ALGORITMO DE DIMENSIONADO AUTOMATICO

Las ecuaciones generales de equilibrio en flexion compuesta recta, para una seccion de hormigon armado en estado ultimo, pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\underline{\Delta R} = \underline{0} \quad (39)$$

donde $\underline{\Delta R}$ es el vector de desequilibrio obtenido vectorialmente, ver Fig. N° 6, de la diferencia

$$\underline{\Delta R} = -\underline{S} + \underline{R}_r + A \underline{R}_s \quad (40)$$

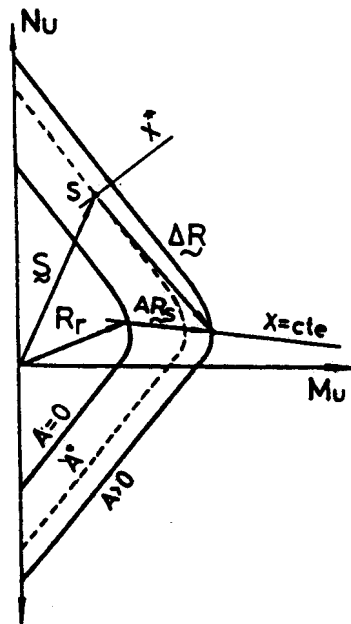


Fig. N° 6 : Desequilibrio bajo solicitaciones normales

Siendo:

- \underline{S} : vector de solicitaciones externas
- \underline{R}_r : vector de resistencia seccional de base, suma de la contribucion del hormigon y del sistema de armaduras de seccion total invariable.
- \underline{R}_s : vector de resistencias del sistema de armaduras variables para armadura total unitaria.

En adelante omitiremos el supraindice u, para indicar valores en estado ultimo, pues los siguientes tratamientos mantienen su validez tanto en estado ultimo, como bajo solicitaciones de servicio.

La ecuacion vectorial (39) puede descomponerse en un sistema de dos ecuaciones escalares simultaneas no lineales, una por componente de equilibrio, en forma equivalente:

$$- N + N_r(X) + A N_s(X) = 0 \quad (41)$$

$$- M + M_r(X) + A M_s(X) = 0 \quad (42)$$

donde:

- N : Esfuerzo solicitante normal.
- $N_r(X)$: Esfuerzo normal resistente base, solo depende de la profundidad del eje neutro X .
- $N_s(X)$: Esfuerzo normal resistente del sistema de armaduras variables, para seccion total unitaria ($A=1$).
- M : Momento flector solicitante referido al origen del sistema de referencias.
- $M_r(X)$: Momento flector resistente base.

$M_s(X)$: Momento flector resistente del sistema de armaduras variables.

El sistema de ecuaciones (41) y (42) se resuelve determinando los valores de las variables independientes X y A que satisfacen las anteriores expresiones. Un enfoque equivalente de abordar el mismo problema consiste en su tratamiento como un problema de minimización. Los valores de las incógnitas A^* y X^* solución del sistema de ecuaciones son los mismos valores que minimizan al cuadrado del módulo del vector de equilibrio:

$$\Delta R^2 (X^*, A^*) = \text{minimo} \quad (43)$$

donde ΔR^2 se obtiene a partir de la expresión

$$\Delta R^2 = \Delta N^2 + \Delta M^2 \quad (44)$$

Aprovechando la dependencia lineal de los esfuerzos internos resistentes con la variable A , si se mantiene constante la profundidad del eje neutro, se puede despejar analíticamente el valor A :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Delta R^2)}{\partial A} &= 0 \\ &= 2 (-N + N_r + A N_s) N_s + 2 (-M + M_r + A M_s) M_s \end{aligned} \quad (45)$$

de donde se obtiene el valor de A^* :

$$A^* = \frac{(N - N_r) N_s + (M - M_r) M_s}{N_s + M_s} \quad (46)$$

Incorporando este valor en la ecuación (43) obtenemos:

$$\Delta R^2 (X) = (-N + N_r + A^* N_s)^2 + (-M + M_r + A^* M_s)^2 \quad (47)$$

sujeta a la restricción $A^* \geq 0$ (no negatividad)

La minimización de ΔR^2 respecto a la profundidad del eje neutro solo puede resolverse a través de un algoritmo numérico, debido a la discontinuidad de la función $\partial(\Delta R^2)/\partial X$. Esta discontinuidad proviene del análisis de contornos poligonales, de las ecuaciones constitutivas de los materiales y de la definición de los planos de rotura.

Se propone el siguiente algoritmo:

- 1) Se adoptan los valores iniciales $X_2 = 0.5 d$
 $\Delta X = 0.5 d$
- 2) Se determinan dos posiciones del eje neutro $X_1 = X_2 - \Delta X$
 $X_3 = X_2 + \Delta X$
- 3) Se calculan ΔR_j^2 para X_j $j=1,2,3$
- 4) Se determina el valor j que satisface $\Delta R_j^2 = \min_{i=1}^3 (\Delta R_i^2)$
- 5) Si en el punto j se satisface $|\Delta N_j| \leq \Delta N_{Tol}$ y $|\Delta M_j| \leq \Delta M_{Tol}$ se considera finalizada la iteración.
- 6) Si $j=2$ disminuimos el intervalo de estudio $\Delta X = 0.25 \Delta X$ y volvemos al punto 2.
- 7) Si $j \neq 2$ se asigna $X_2 = X_j$ y continuamos en el punto 2.

Conceptualmente el método adopta un punto central de referencia y

dos igualmente espaciados a cada lado. Seguidamente se define como nuevo punto central al mejor de los tres. Si el mejor resultase el punto central, se reduce el intervalo de ΔX y se repite el procedimiento. La iteración se considera finalizada cuando se satisfacen simultáneamente las exigencias en los valores absolutos de los desequilibrios en esfuerzos normales y en momentos.

La característica más importante de este algoritmo estriba en su carácter autocorrector y convergente. Esto significa que se puede satisfacer el equilibrio en cualquiera de las cinco zonas de dimensionado, desde la tracción pura a la compresión pura, abarcando todos los estados intermedios de flexo-tracciones y flexo-compresiones.

Si el problema de dimensionado tiene sentido físico, existen solo cuatro situaciones posibles:

1) El equilibrio entre solicitaciones y esfuerzos resistentes exige una cierta curvatura seccional y una cantidad de armadura no nula, ver Fig. N°7. En este caso el mínimo de ΔR^2 toma el valor cero para una profundidad finita X^* y se satisfacen las condiciones de equilibrio y congruencia de las deformaciones.

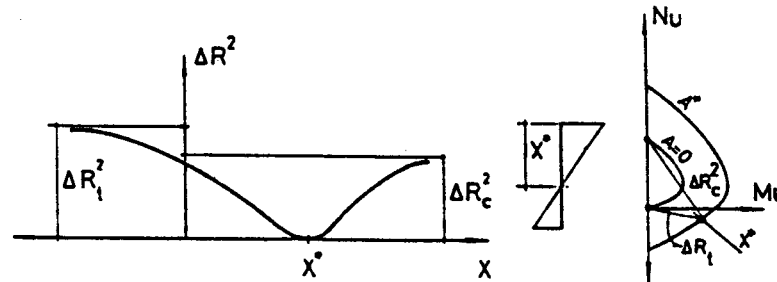


Fig. N°7 : Comportamiento de la función ΔR^2
Interpretación en el abaco de interacción

2) El equilibrio solo se logra con un plano de alargamientos uniformes con curvatura seccional nula. La armadura de equilibrio es no nula ($A > 0$) y la profundidad X puede tener un valor determinado o tender a $-\infty$. En la

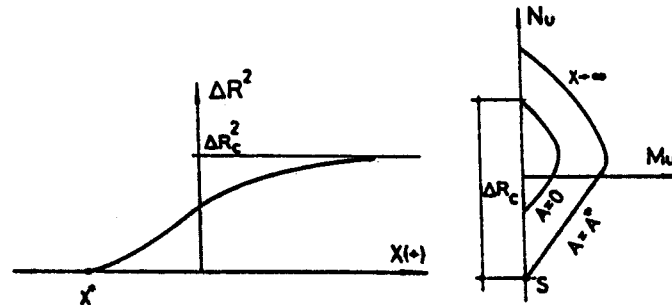


Fig. N° 8 : Comportamiento de la función ΔR^2 con equilibrio satisfecho para $X \rightarrow -\infty$.

Fig. N°8 se puede apreciar la gráfica típica de variación del valor ΔR^2

con la profundidad del eje neutro. El algoritmo disminuirá el valor de X hasta satisfacer las exigencias en $|\Delta N|$ y en $|\Delta M|$. El eje neutro de equilibrio será un valor finito si y solo si las armaduras menos traccionadas alcanzan la tensión de fluencia para una deformación $\epsilon_{a\max}$.

3) El equilibrio se satisface para un plano de acortamientos uniformes $\epsilon_p = -0.002$. Este caso, ver Fig. N°9, es similar al anterior, con la diferencia que la función ΔR^2 es asintótica a cero conforme $X \rightarrow \infty$, explicable debido a que el hormigón y los aceros, que satisfacen $\beta_s - \sigma_{pi} \geq 4200 \text{ kg/cm}^2$, no están totalmente en fluencia para profundidades finitas de X . Numéricamente esta consideración teórica no es significativa porque tanto $|\Delta N|$ como $|\Delta M|$ decrecen rápidamente conforme X aumenta.

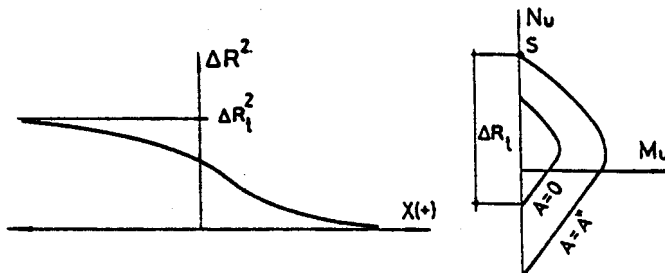


Fig. N° 9: Comportamiento de la función ΔR^2 . Equilibrio para $X \rightarrow \infty$.

4) El equilibrio no es satisfecho con ningún estado último. Aun con armadura nula ($A=0$) existe una sobrerresistencia de la sección y las magnitudes resistentes internas superan a las solicitantes últimas. El algoritmo convergirá al valor X que minimiza ΔR^2 , pero su valor mínimo no será cero, sino que representará la mínima distancia entre el punto de solicitaciones y la curva resistente N-M para armadura total nula ($A=0$) del sistema variable.

Esta alternativa, que generalmente no es conocida a priori, invalida todos los algoritmos de dimensionamiento basados en la búsqueda de una raíz del sistema no lineal de ecuaciones de equilibrio, ecs. (41) y (42), porque sencillamente no existe dicha solución.

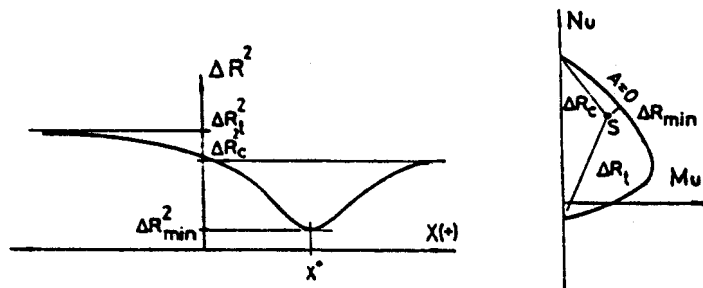
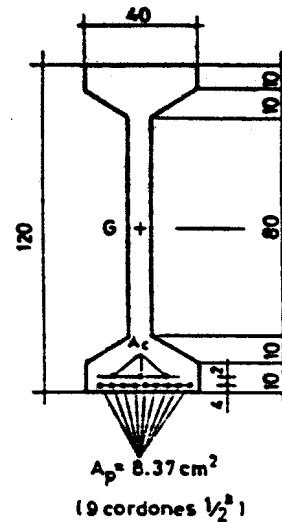


Fig. N° 10: Comportamiento de la función ΔR^2
La sección no llega a un estado último

EJEMPLO : DIMENSIONADO DE UNA SECCION PRETENSADA A LA FLEXION SIMPLE

Como ejemplo del algoritmo se presenta un caso típico de dimensionado de una sección de una viga de hormigón pretensado por

adharencia directa cuando esta solicitado por un momento flector de servicio de 85 Tm. La geometria de la seccion transversal puede apreciarse en la Fin N° 11. El hormigon responde al tipo H-21 ($\beta_s=175 \text{ kg/cm}^2$) y esta armado con 9 cordones de 1/2" (8.37 cm) de acero de alta resistencia ($\beta_s=16000 \text{ kg/cm}^2$) pretensionado a 12000 kg/cm. Se desea conocer la cantidad de armadura pasiva necesaria para establecer el equilibrio segun las directivas planteadas en la Norma CIRSOC 201 (DIN 1045). Los puntos optimos de las iteraciones son:



FigN°11: Seccion transversal

X/d	A[cm ²]	ν	ΔR^2	$\Delta N[\text{Tn}]$	$\Delta M[\text{Tm}]$
0.45000	2.78	1.75	0.223605	0.221	-0.418
0.45781	2.96	1.75	0.012048	0.051	-0.097
0.45977	3.01	1.75	0.000386	0.009	-0.017
0.46025	3.02	1.75	0.000008	-0.001	0.003
0.46013	3.01	1.75	0.000008	0.001	-0.002
0.46016	3.02	1.75	0.000002	0.000	-0.001
0.46019	3.02	1.75	0.000000	0.000	0.000

VI - DETERMINACION DEL COEFICIENTE DE SEGURIDAD

Un calculo, muchas veces necesario, consiste en determinar el coeficiente de seguridad de una determinada seccion respecto a las cargas de servicio N_s y M_s . Si definimos al coeficiente de seguridad ν como el cociente entre los esfuerzos resistentes ultimos y los esfuerzos solicitantes sobre una determinada seccion, distinguiremos tres coeficientes distintos, ver Fig.N° 12:

1) Coeficiente de seguridad contra aumento proporcional de los esfuerzos. Si las solicitaciones estan representadas por el punto S en la Fig.N° 12 y el punto A se obtiene de la interseccion de la recta, que une el origen con el punto S de las solicitaciones, con la curva de esfuerzos resistentes ultimos internos, definimos al coeficiente ν como el cociente:

$$\nu^* = \frac{R_A}{S} \quad \text{donde} \quad (48)$$

$S = \sqrt{N^2 + M^2}$: radio de las solicitaciones, y

$R_A = \sqrt{N_A^2 + M_A^2}$: radio de los esfuerzos resistentes interno obtenido con la condicion de mantener constante la excentricidad de la carga normal.

2) Coeficiente de seguridad contra aumento de los esfuerzos normales. En este caso el momento exterior permanece constante y se desea determinar el grado de seguridad referido al incremento de los esfuerzos normales. La expresion es

$$\nu_N^* = \frac{N^*}{N} \quad (49)$$

3) Coeficiente de seguridad contra aumento de los momentos flectores. Ahora es el esfuerzo normal quien se mantiene constante. Ejemplos comunes son los elementos solicitados preponderantemente a flexion simple ($N=0$) o las estructuras donde la variacion de la carga normal sea despreciable respecto a las acciones horizontales, como viento o acciones sismicas, que generan solicitaciones de flexion. El grado de seguridad se calcula con:

$$\nu_M^* = \frac{M^*}{M} \quad (50)$$

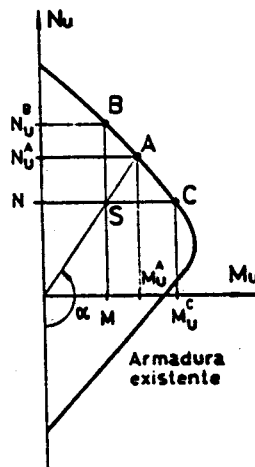


Fig. N° 12: Coeficientes de seguridad

Algoritmos:

► Para el caso 1, coeficiente proporcional, se utiliza el mismo algoritmo que para el dimensionado minimizando el valor:

$$\Delta\alpha = | \alpha^* - \alpha | \quad \text{donde} \quad (51)$$

$$\alpha^* = \arctg\left[\frac{M}{N}\right] \quad \text{y} \quad \alpha = \arctg\left[\frac{M(X)}{N(X)}\right]$$

► Para el caso 2, coeficiente de seguridad de esfuerzos normales, se determina la profundidad X de la fibra neutra que minimiza la expresion:

$$\Delta M = | M - M(X) | \quad (53)$$

sujeta a la restriccion $N * N(X) > 0$.

► Para el caso 3, coeficiente de seguridad de momentos flectores, se itera hasta precisar el valor de X que minimiza la expresion:

$$\Delta N = | N - N(X) | \quad (54)$$

VII - COEFICIENTE DE MAYORACION DE LAS SOLICITACIONES

El algoritmo propuesto para el dimensionado de secciones bajo solicitaciones ultimas puede ser modificado facilmente para determinar la cantidad necesaria de armaduras si se proporcionan como datos las solicitaciones de servicio y se exige el cumplimiento de lo estipulado por la Norma CIRSOC 201.

Segun la citada norma y su fuente, la norma alemana DIN 1045, el

coeficiente de mayoración de las solicitaciones de servicio es una función del alargamiento de la fibra de acero más traccionada, tal como se puede apreciar en la Fig. N° 3. Este coeficiente puede calcularse con las siguientes expresiones:

$$\text{Si } x = X/h < 0.538 \quad \nu = 1.75$$

$$\text{Si } x > 0.538 \text{ pero } x < 1 \quad \nu = 2.10 - \frac{1.225}{3} \frac{(1-x)}{x}$$

$$\text{Si } x > 1 \quad \nu = 2.10$$

VII - CONCLUSIONES

La presente formulación ha permitido la elaboración de un programa para computadores personales que brinda solución directa a problemas frecuentes que se plantean en el análisis y dimensionado de elementos estructurales en hormigón armado y pretensado por adherencia directa. Para el caso de postensados se deben precalcular las pérdidas de tensión, en los cordones o trenzas predeformados, por el acortamiento que sufre el hormigón hasta que la armadura activa alcanza la tensión definitiva σ_{pi} .

La generalidad del enfoque permite el estudio de secciones con distintos tipos de armaduras, puntuales o linealmente distribuidas sobre una recta, tanto de sección fija como variable. Las fórmulas para el cálculo de los esfuerzos resistentes internos del hormigón brindan los valores exactos de una sección poligonal, hueca o no, con un costo computacional relativamente bajo y de valor independiente de discretización alguna. Pudiendo variar el valor de $\epsilon_{s,max}$ es posible el tratamiento de los mismos problemas según la norma del CEB.

Disponiendo de dichas expresiones para la evaluación de los esfuerzos resistentes internos, un módulo del programa posibilita el trazado de los abacos de interacción N-M para una sección, tanto para cargas últimas como de servicio, valores dimensionales o adimensionales, entre dos posiciones predefinidas del eje neutro o cubriendo todo el rango de planos de deformaciones últimas especificado por la norma. Estos abacos permiten un dimensionado expeditivo y su forma reflejara la respuesta y sensibilidad de la sección frente a variaciones en las solicitaciones.

El algoritmo de dimensionado converge independientemente de los valores iniciales hacia la solución, abarcando todas las posibles combinaciones N-M. Los valores iniciales sugeridos se estimaron con el fin de minimizar el número total de iteraciones de determinación de armaduras en todo el rango de solicitaciones. Además se dispone de dos ventajas prácticas: en primer lugar el cierre de las iteraciones se establece en término de errores en esfuerzos normales y momentos, con lo cual se puede determinar la armadura con una precisión acorde a la incertidumbre de las solicitaciones. En segundo lugar es capaz el procedimiento de detectar casos donde no se requiere armadura adicional. Tales situaciones descalifican todo algoritmo basado en la solución del sistema no lineal de ecuaciones de equilibrio. El planteo es absolutamente común para dimensionado bajo solicitaciones de servicio y para el dimensionado para valores últimos.

Los algoritmos de la sección VI se utilizan en la verificación de secciones, con la armaduras determinadas por otro procedimiento o para otras exigencias, con la capacidad de analizar en forma aislada la acción

de los esfuerzos normales y de los momentos flectores entre si. Esto es particularmente util cuando dichas solicitaciones provienen de origenes distintos con incertidumbres tambien diferentes y no resulta sensato el analisis a excentricidad constante.

IX - REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] HARO. "Calculo de caracteristicas mecanicas de una seccion de hormigon poligonal". Publicacion del Departamento de Estructuras (U.N.C.). Cordoba, Junio de 1987.
- [2] LARSSON C.- HARO C.. "Calculo automatico de vigas pretensadas por adherencia segun CIRSOC 201". VII Jornadas Argentinas del Hormigon Pretensado. La Plata, Nov. 1987.
- [3] COMISION ALEMANA DEL HORMIGON ARMADO. CUADERNO 220. "Dimensionado de los elementos de hormigon y hormigon armado" Edicion en español, IRAM 1981.
- [4] MORAN CABRE F.. "Calculo de secciones de hormigon armado, sometidas a solicitaciones normales, en el estado ultimo". Monografia N° 304 Instituto Eduardo Torrojas. Sept. 1972.
- [5] REGLAMENTO CIRSOC 201. "Proyecto, calculo y ejecucion de estructuras de hormigon armado y pretensado". Julio 1982.
- [6] DEL CARRIL T.-VELEDA C.-CODAGNONE J. "Analisis de secciones de hormigon armado, con grado de pretensado variable, sometidas a flexion compuesta oblicua". V Jornadas Argentinas del Hormigon Pretensado. San Miguel de Tucuman, Octubre de 1982.
- [7] GARCIA A. "Diseño automatico de columnas de hormigon armado de seccion rectangular sometidas a flexocompresion o flexo- tracion esviada". XX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural. Cordoba, Julio de 1979.
- [8] GARCIA A: "Diseño automatico de columnas de hormigon armado de seccion rectangular sometidas a flexocompresion o flexo- tracion recta". XX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural. Cordoba, Julio de 1979.
- [9] LEONHARDT F.- MONNIG E. "Estructuras de hormigon armado. Bases para el dimensionado de estructuras de hormigon armado". Edit. EL ATENEO. Edicion 1985.
- [10] RUSCH H.. "Hormigon armado y pretensado. Propiedades de los materiales y procedimientos de calculo". Edit. CECSA. 1984.