

UN ELEMENTO DE VIGA DE VLASOV

Eduardo N. Dvorkin, Diego Celentano, Alberto Cuitiño y
Gustavo Gioia(*)

Instituto de Materiales y Estructuras
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

RESUMEN

En el presente trabajo se desarrolla un elemento de viga basado en la teoría de Vlasov para vigas de sección abierta y paredes delgadas. La novedad del elemento reside en que la interpolación del ángulo de torsión fue diseñada de forma tal de poder interpolar movimientos rígidos y de obtener la solución exacta de problemas simples de torsión no-uniforme con un sólo elemento.

ABSTRACT

In the present paper a beam element based on Vlasov's theory for thin-walled open section beams is presented. The main feature of the element is the torsion angle interpolation that was designed to represent rigid body rotations and to obtain the exact solution to some simple non-uniform torsion problems with only one element.

(*) Becario CONICET

INTRODUCCION.

La teoría que se utiliza para analizar vigas de sección abierta y paredes delgadas fue desarrollada por Vlasov /1/, y numerosos investigadores han estudiado su implementación numérica en problemas lineales y no-lineales /2-10/.

En el presente trabajo, presentamos una nueva implementación de la teoría de Vlasov utilizando el Método de Elementos Finitos /2/. Los aspectos más relevantes del nuevo elemento desarrollado para problemas lineales, son:

- no requiere el uso de integración numérica,
- un solo elemento puede modelar exactamente algunos casos simples de torsión no-uniforme.

Los resultados numéricos que exponemos en el presente trabajo demuestran la eficiencia del elemento propuesto en análisis lineal de estructuras espaciales de vigas rectas y curvas.

Esperamos que la formulación que presentamos constituirá una sólida base para el futuro desarrollo de un elemento de viga de Vlasov no-lineal.

EL ELEMENTO DE VIGA DE VLASOV.

Basados en la teoría de Vlasov, hemos desarrollado un elemento de viga de 2 nodos /2/ para problemas lineales.

En la Fig. 1 mostramos el sistema de coordenadas locales $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, coincidentes con los ejes principales de la sección del elemento y con el eje del mismo.

En la misma figura se indican los desplazamientos nodales que serán nuestras incógnitas, conjuntamente con $\hat{\theta}_2^k$, la derivada en el nodo k del ángulo de torsión con respecto a la coordenada axial del elemento. Esto nos conduce a un elemento con siete grados de libertad por nodo.

Para el desplazamiento axial \hat{w} usamos una interpolación lineal, en tanto que para los desplazamientos transversales \hat{u} y \hat{v} , empleamos una interpolación de Hermite /11/. Debe recordarse que dado que la teoría de Vlasov considera nulas las deformaciones por corte, se tiene que: $\hat{\theta}_2^k = -\hat{v}_{,2}^k$, $\hat{\theta}_3^k = \hat{u}_{,2}^k$.

Para el ángulo de torsión muchos investigadores han usado una interpolación polinómica. Sin embargo, con el objeto de lograr un elemento más poderoso proponemos la siguiente interpolación, basada en la solución analítica de algunos problemas simples de torsión no-uniforme:

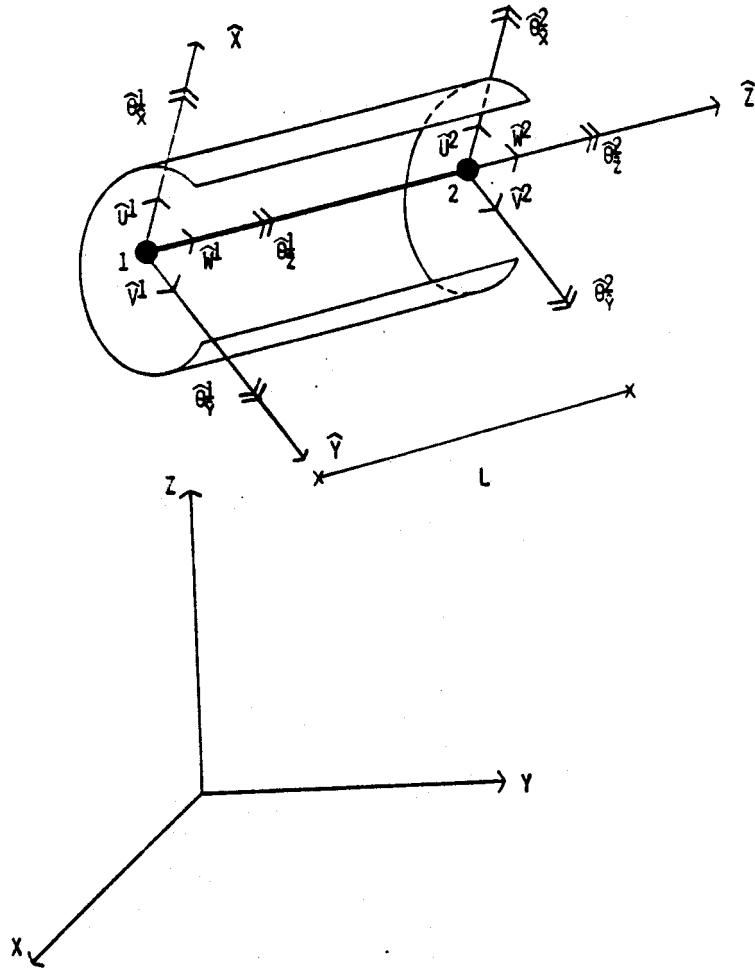


Figura 1. Elemento de viga de Vlasov

$$\hat{\theta}_z = A_1 e^{\lambda z} + A_2 e^{-\lambda z} + A_3 z + A_4 \quad (1.a)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_w}} \quad (1.b)$$

donde E es el módulo de Young del material de la viga, G es el módulo transversal, I_d es el momento de inercia de la sección para torsión pura calculado para secciones compuestas por rectángulos // e I_w es el momento sectorial de la sección //.

Los aspectos más importantes de la función propuesta son:

- puede representar giros rígidos,
- expresa la solución exacta de algunos problemas simples de torsión no-uniforme //.

Las cuatro constantes involucradas en la Ec. (1.a) pueden ser escritas en términos de los grados de libertad nodales, resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 1 & 0 \\ e^{\lambda L} & e^{-\lambda L} & L & 1 \\ \lambda e^{\lambda L} & -\lambda e^{-\lambda L} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_z^1 \\ \hat{\theta}_z^1|_1 \\ \hat{\theta}_z^2 \\ \hat{\theta}_z^1|_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

La solución esta dada por:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} & \Omega_{34} \\ \Omega_{41} & \Omega_{42} & \Omega_{43} & \Omega_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_z^1 \\ \hat{\theta}_z^1|_1 \\ \hat{\theta}_z^2 \\ \hat{\theta}_z^1|_2 \end{bmatrix} \quad (3.a)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \Omega_{11} &= \lambda(1 - e^{-\lambda L})/\Delta & \Omega_{31} &= \lambda^2(e^{-\lambda L} - e^{\lambda L})/\Delta \\
 \Omega_{12} &= [1 - e^{-\lambda L}(1 + \lambda L)]/\Delta & \Omega_{32} &= \lambda(2 - e^{-\lambda L} - e^{\lambda L})/\Delta \\
 \Omega_{13} &= \lambda(-1 + e^{-\lambda L})/\Delta & \Omega_{33} &= \lambda^2(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L})/\Delta \\
 \Omega_{14} &= (-1 + \lambda L + e^{-\lambda L})/\Delta & \Omega_{34} &= \lambda(2 - e^{-\lambda L} - e^{\lambda L})/\Delta \\
 \Omega_{21} &= \lambda(1 - e^{\lambda L})/\Delta & \Omega_{41} &= \lambda[2 + e^{\lambda L}(\lambda L - 1) - e^{-\lambda L}(1 + \lambda L)]/\Delta \quad (3.b) \\
 \Omega_{22} &= [1 + e^{\lambda L}(1 - \lambda L)]/\Delta & \Omega_{42} &= [e^{-\lambda L}(1 + \lambda L) + e^{\lambda L}(\lambda L - 1)]/\Delta \\
 \Omega_{23} &= \lambda(e^{\lambda L} - 1)/\Delta & \Omega_{43} &= \lambda[2 - e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}]/\Delta \\
 \Omega_{24} &= (1 + \lambda L - e^{\lambda L})/\Delta & \Omega_{44} &= (-2\lambda L + e^{\lambda L} - e^{-\lambda L})/\Delta
 \end{aligned}$$

y.

$$\Delta = \lambda [4 + e^{\lambda L}(\lambda L - 2) - e^{-\lambda L}(\lambda L + 2)] \quad (3.c)$$

Para cualquier punto sobre el eje del elemento, se cumple que:

$$\underline{\hat{u}}(\hat{z}) = \underline{\hat{H}}(\hat{z}) \underline{\hat{U}} \quad (4)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \underline{\hat{u}}^T &= [\hat{u} \quad \hat{v} \quad \hat{w} \quad \hat{\theta}_z] \\
 \underline{\hat{U}}^T &= [\hat{U}^1 \hat{\theta}_z^1 \hat{U}^2 \hat{\theta}_z^2 \hat{V}^1 \hat{\theta}_z^1 \hat{V}^2 \hat{\theta}_z^2 \hat{W}^1 \hat{W}^2 \hat{\theta}_z^1 \hat{\theta}_z^2 \hat{h} \hat{\theta}_z^1 \hat{\theta}_z^2]
 \end{aligned}$$

y.

$$\underline{\hat{H}} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \quad (5.a)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \begin{bmatrix} 2(\hat{z}/L)^3 - 3(\hat{z}/L)^2 + 1 & \hat{z}^3/L^3 - 2\hat{z}^2/L + \hat{z} \\ -2(\hat{z}/L)^3 + 3(\hat{z}/L)^2 & \hat{z}^3/L^3 - \hat{z}^2/L \end{bmatrix} \\
 h_2 &= \begin{bmatrix} 2(\hat{z}/L)^3 - 3(\hat{z}/L)^2 + 1 & -\hat{z}^3/L^3 + 2\hat{z}^2/L - \hat{z} \\ -2(\hat{z}/L)^3 + 3(\hat{z}/L)^2 & -\hat{z}^3/L^3 + \hat{z}^2/L \end{bmatrix} \\
 h_3 &= [-\hat{z}/L + 1 \quad \hat{z}/L] \\
 h_4 &= \begin{bmatrix} e^{\lambda \hat{z}} \Omega_{11} + e^{-\lambda \hat{z}} \Omega_{21} + \hat{z} \Omega_{31} + \Omega_{41} & e^{\lambda \hat{z}} \Omega_{12} + e^{-\lambda \hat{z}} \Omega_{22} + \hat{z} \Omega_{32} + \Omega_{42} \\ e^{\lambda \hat{z}} \Omega_{13} + e^{-\lambda \hat{z}} \Omega_{23} + \hat{z} \Omega_{33} + \Omega_{43} & e^{\lambda \hat{z}} \Omega_{14} + e^{-\lambda \hat{z}} \Omega_{24} + \hat{z} \Omega_{34} + \Omega_{44} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (5.b)$$

Quando la viga se encuentra sometida a la acción de cargas exteriores, su configuración de equilibrio está definida por el Principio de la Mínima Energía Potencial /11-12/.

$$\delta(\mathcal{U} - \mathcal{V}) = 0 \quad (6)$$

donde \mathcal{U} es la energía elástica almacenada en el elemento, y \mathcal{V} es el potencial de las cargas exteriores actuantes (conservativas).

En el caso de la viga de Vlasov, la energía elástica /12/ es,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^L [EA (\hat{w}')^2 + EI_{\hat{x}\hat{x}} (\hat{v}'')^2 + EI_{\hat{y}\hat{y}} (\hat{u}'')^2 + GI_d (\hat{\theta}'_z)^2 + EI_\omega (\hat{\theta}''_z)^2] d\hat{z} \quad (7)$$

donde $I_{\hat{x}\hat{x}}$ e $I_{\hat{y}\hat{y}}$ son los momentos de inercia principales de la sección.

En la Ec. (7), el primer sumando a la derecha del signo igual es la energía membranal, el segundo y tercer sumando representan la energía de flexión, el cuarto sumando es la energía asociada con la torsión de St. Venant y el quinto sumando es la energía asociada con la torsión no-uniforme /1/.

De la Ec. (4), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}'' \\ \hat{v}'' \\ \hat{w}' \\ \hat{\theta}'_z \\ \hat{\theta}''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^4 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & h_4^4 & 0 \end{bmatrix} \hat{U} = \hat{B} \hat{U} \quad (8)$$

Por lo tanto, reemplazando en la Ec. (7) se llega a:

$$\delta \mathcal{U} = \delta \hat{U}^T \left[\int_0^L \hat{B}^T \hat{C} \hat{B} d\hat{z} \right] \hat{U} \quad (9)$$

donde,

$$\underline{\hat{C}} = \begin{bmatrix} EI_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_w \end{bmatrix} \quad (10)$$

A: área de la sección transversal.

Las fuerzas externas actuantes sobre el elemento de viga son:

$\hat{p}_z, \hat{p}_z', \hat{p}_z''$: cargas distribuidas por unidad de longitud.

$\hat{m}_z, \hat{m}_z', \hat{m}_z''$: momentos distribuidos por unidad de longitud.

b : bimomento distribuido por unidad de longitud /1/.

$\hat{p}_z^i, \hat{p}_z'^i, \hat{p}_z''^i$: cargas concentradas en el nodo i.

$\hat{M}_z^i, \hat{M}_z'^i, \hat{M}_z''^i$: momentos concentrados en el nodo i.

B^i : bimomento concentrado en el nodo i /1/.

El potencial de las cargas externas /12/ es.

$$\begin{aligned} V = \int_0^L [& \hat{p}_z \hat{u} + \hat{p}_z' \hat{v} + \hat{p}_z'' \hat{w} - \hat{m}_z \hat{v}' + \hat{m}_z' \hat{u}' \\ & + \hat{m}_z'' \hat{\theta}_z + b \hat{\theta}_z^i] dz + \sum_i [\hat{p}_z^i \hat{u}_i + \hat{p}_z'^i \hat{v}_i \\ & + \hat{p}_z''^i \hat{w}_i - \hat{M}_z^i \hat{v}_i' + \hat{M}_z'^i \hat{u}_i' + \hat{M}_z''^i \hat{\theta}_z^i + B^i \hat{\theta}_z^i] \end{aligned} \quad (11)$$

De la Ec. (4), se tiene que.

$$\begin{bmatrix} \delta \hat{u} \\ \delta \hat{v} \\ \delta \hat{w} \\ \delta \hat{v}' \\ \delta \hat{u}' \\ \delta \hat{\theta}_z \\ \delta \hat{\theta}_z^i \\ \delta \hat{\theta}_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta \hat{U} = \hat{D} \delta \hat{U} \quad (12)$$

Por lo tanto,

$$\delta V = \delta \underline{U}^T \left[\int_0^L \underline{\hat{D}}^T \underline{\hat{P}} d\hat{z} + \sum_i \underline{\hat{D}}_i^T \underline{P}_i \right] = \delta \underline{U}^T \underline{\hat{R}} \quad (13)$$

donde,

$$\underline{\hat{P}}^T = [\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z, -\hat{m}_x, \hat{m}_y, \hat{m}_z, b]$$

$$\underline{\hat{P}}_i^T = [\hat{P}_x^i, \hat{P}_y^i, \hat{P}_z^i, -\hat{M}_x^i, \hat{M}_y^i, \hat{M}_z^i, B^i]$$

y definimos,

$$\underline{\hat{R}} = \int_0^L \underline{\hat{D}}^T \underline{\hat{P}} d\hat{z} + \sum_i \underline{\hat{D}}_i^T \underline{P}_i$$

Introduciendo las Ec. (9) y (13) en la Ec. (6), obtenemos:

$$\underline{\hat{K}} \underline{\hat{U}} = \underline{\hat{R}} \quad (14)$$

donde,

$$\underline{\hat{K}} = \int_0^L \underline{\hat{B}}^T \underline{\hat{C}} \underline{\hat{B}} d\hat{z} \quad (15)$$

Notar que:

- las Ec. (13) a (15) están referidas a un sistema de coordenadas locales para cada elemento.

- las integrales en las Ec. (13) y (15) pueden ser evaluadas analíticamente.

Para poder ensamblar un modelo estructural debe pasarse la Ec. (14) al sistema de coordenadas globales. Para ello,

$$\underline{R} = \underline{T} \underline{\hat{R}} \quad (16.a)$$

$$\underline{U} = \underline{T} \underline{\hat{U}} \quad (16.b)$$

$$\underline{K} = \underline{T} \underline{\hat{K}} \underline{T}^T \quad (16.c)$$

donde \underline{U} es el vector de grados de libertad globales,

$$\underline{U} = [U^1 V^1 W^1 \theta_x^1 \theta_y^1 \theta_z^1 \theta_z^1 | U^2 V^2 W^2 \theta_x^2 \theta_y^2 \theta_z^2 \theta_z^2]$$

Es importante destacar que hemos asumido $\hat{\theta}_z^1$ única para todos los elementos que concurren a un nodo. Esto significa una especie de "continuidad del alabeo", que fue introducida por Bažant /4-13/.

EJEMPLOS NUMERICOS.

En la Ref. /2/ hemos estudiado exhaustivamente el comportamiento del elemento propuesto en problemas lineales. En la presente publicación exponemos sólo algunos ejemplos.

1. Modelos de 1 y 2 elementos.

Modelamos usando 1 elemento los casos que se muestran en la Fig. 2.a, y 2 elementos los casos de la Fig. 2.b. Para todos estos problemas, la solución obtenida por elementos finitos (rotaciones, momentos torsionales, momentos de St. Venant y bimomentos), coincidieron exactamente con los resultados analíticos publicados por Vlasov en la Ref. /1/.

2. Viga curva con sección variable.

En la Fig. 3, presentamos una viga curva con sección variable. Comparamos nuestra solución obtenida usando 16 elementos desiguales, contra la solución por diferencias finitas calculada por Heins /14/; dicha solución considera una rigidez a la torsión de St. Venant aumentada 200 veces, y una transición lineal en los cambios de sección. En puntos donde la solución por elementos finitos es discontinua, indicamos valores promedios.

CONCLUSIONES.

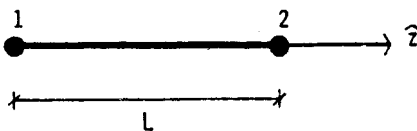
Hemos presentado un elemento finito basado en la teoría de Vlasov para vigas de sección abierta y paredes delgadas. Las características del elemento para problemas lineales son:

- puede representar rotaciones rígidas.
- es capaz de modelar algunos problemas simples de torsión no-uniforme utilizando un sólo elemento.
- no requiere integración numérica.
- el elemento es eficiente en la solución de problemas más complejos.

Estamos estudiando en la actualidad, la extensión para problemas no-lineales.

REFERENCIAS.

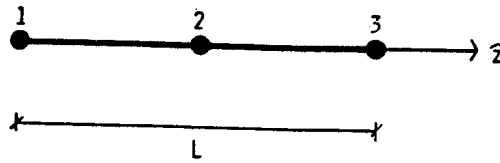
1. V. Z. Vlasov, Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.
2. E. N. Dvorkin, D. Celentano, A. Cuitino y G. Gioia, "A Vlasov Beam Element" (sometido a referato).
3. R. S. Barsoum y R. H. Gallagher, "Finite Element Analysis of Torsional and Flexural-Torsional Stability Problems", Int. J. Numer. Methods in Engg., 2, pp. 335-352, 1970.
4. Z. P. Bažant y M. El Nimeiri, "Large-Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames", A.S.C.E., J. Engg. Mechanics Div., EM6, pp. 1259-1281, December 1973.
5. A. B. Chaudhary, "Generalized Stiffness Matrix for Thin-Walled Beams", A.S.C.E., J. Structural Div., ST3, pp. 559-577, March 1982.
6. E. Ramm y P. Osterrieder, "Ultimate Load Analysis of Three-Dimensional Beams Structures with Thin-Walled Cross Sections Using Finite Elements", Stability of Metal Structures, Paris, 1983.
7. J. W. Wekezer, "Elastic Torsion of Thin-Walled Bars of Variable Cross Section", Computers & Structures, 19, pp. 401-407, 1984.
8. Y. B. Yang y W. McGuirre, "A Procedure for Analysing Space Frames with Partial Warping Restraint", Int. J. Numer. Methods in Engg., 20, pp. 1377-1398, 1984.
9. S. W. Lee y Y. H. Kim, "A New Approach to the Finite Element Modelling of Beams with Warping Effect", Int. J. Numer. Methods in Engg., 24, pp. 2327-2341, 1987.
10. J. E. Mottershead, "Warping Torsion in Thin-Walled Open Section Beams using the Semiloof Beam Element", Int. J. Numer. Methods in Engg., 26, pp. 231-243, 1988.
11. K. J. Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
12. N. J. Hoff, The Analysis of Structures, John Wiley & Sons, 1956.
13. Z. P. Bažant, "Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Bars of Variable Cross Section", Int. Assoc. for Bridges Structural Engg. Publications, 25, pp. 245-267, 1965.
14. C. P. Heins, Bending and Torsional Design in Structural Members, Lexington Books, 1975.



C A S O	CONDICIONES DE BORDE EN EL NODO 1	CONDICIONES DE BORDE EN EL NODO 2
1	$B = 0$ $\hat{\theta}_2 = 0$	$B = 0$ $M = M^*$
2	$\hat{\theta}_2 = 0$ $\hat{\theta}_2 = 0$	$B = 0$ $M = M^*$
3	$\hat{\theta}_2 = 0$ $\hat{\theta}_2 = 0$	$\hat{\theta}_2 = 0$ $M = M^*$
4	$\hat{\theta}_2 = 0$ $B = B$	$\hat{\theta}_2 = 0$ $B = B^*$

(a) Modelos de un elemento

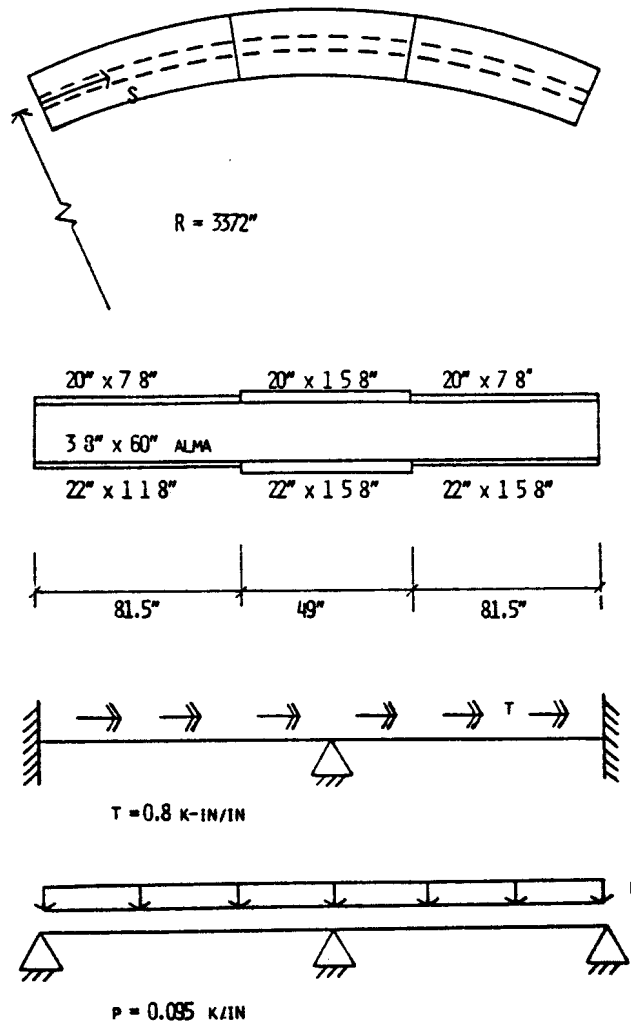
Figura 2. Modelos de uno y dos elementos.



C A S O	CONDICIONES DE BORDE EN EL NODO 1	CONDICIONES DE BORDE EN EL NODO 3	CONDICIONES DE BORDE EN EL NODO 2
1	$\hat{\theta}_2 = 0$ $B = 0$	$\hat{\theta}_2 = 0$ $B = 0$	$M = M^*$
2	$\hat{\theta}_2 = 0$ $\hat{\theta}_2' = 0$	$\hat{\theta}_2 = 0$ $B = 0$	$B = B^*$

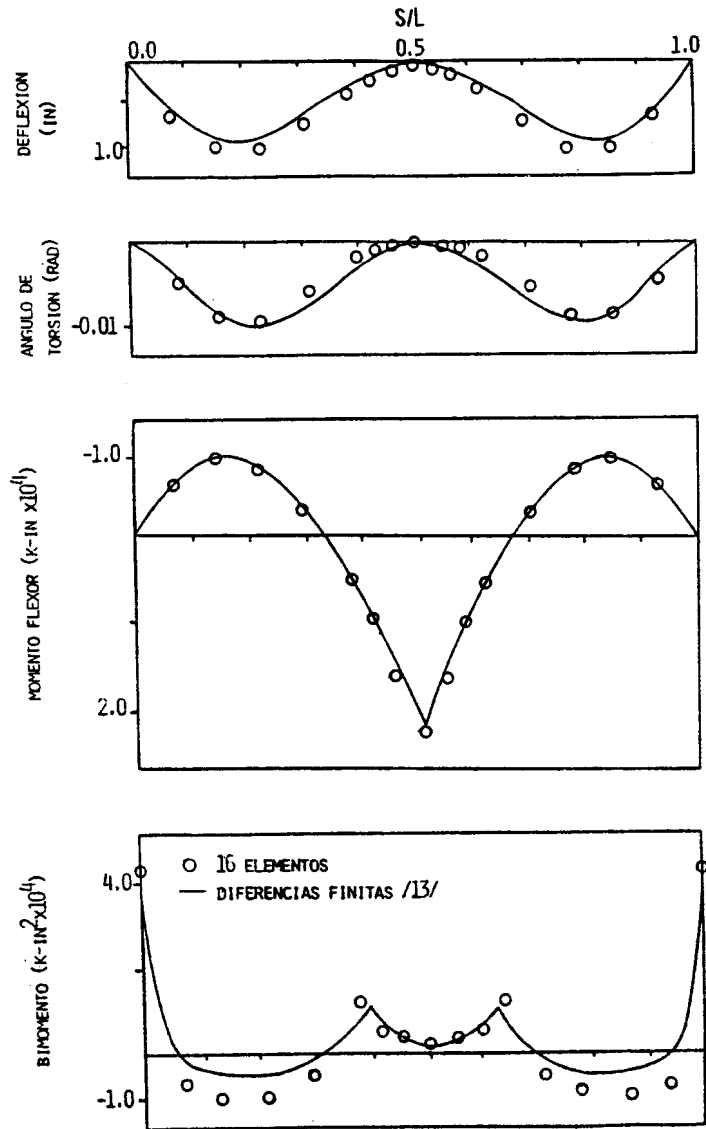
(b) Modelos de dos elementos

Figura 2. (continuación)



(a)

Figura 3. Viga curva con sección variable.



(b)

Figura 3. (continuación).