

**ANALISIS DE ESTRUCTURAS PRISMATICAS DE ESPESOR
VARIABLE POR EL METODO DE LA BANDA FINITA**

*Benjamín Suárez**

* Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona,
Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.

*Luis Godoy***

**Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina.

*Eugenio Oñate**

RESUMEN

En este artículo se presenta una formulación de Banda Finita acoplada que permite analizar placas, simplemente apoyadas en sus extremos, de espesor variable. La variación de espesor longitudinal se simula mediante una carga equivalente que actúa sobre la placa de espesor constante. El uso del elemento-banda lineal de dos nodos con integración reducida permite dar una forma explícita a esta carga equivalente y por lo tanto simplificar el proceso de cálculo. La evaluación de esta carga equivalente debe realizarse en cualquier caso mediante un proceso iterativo dado que depende de los parámetros nodales que aparecen en la discretización transversal necesaria. Todos los aspectos básicos de esta formulación se introducen en flexión de vigas de inercia variable y posteriormente se generalizan para placas de Reissner-Mindlin.

ABSTRACT

In this paper a coupled finite strip formulation, which permits the analysis of simply supported plates with variable thickness, is given. The variation of the longitudinal thickness is simulated by means of an equivalent load which acts upon the constant thickness plate. The use of the two-nodes lineal strip element with reduced integration, permits to give an explicit form to this equivalent load, simplifying thus the computation process. The evaluation of the equivalent load has to be performed by means of an iterative process, due to the fact that it depends on the nodal parameters which appear in the transversal discretization. All the fundamental aspects of this formulation are introduced in the bending of beams with variable inertia and then they are generalized for Reissner-Mindlin plates.

INTRODUCCIÓN

Los métodos semianalíticos en Elementos Finitos, que surgieron en la década de los 60, permiten analizar las estructuras denominadas prismáticas simulando el comportamiento transversal (placas, láminas planas y troncocónicas) o meridional (láminas de revolución) de la misma, mediante Elementos Finitos y el longitudinal o circunferencial mediante desarrollos en serie de Fourier.

Esta técnica usada por Grafton y Strone, Ahmad y otros y Wilson en el contexto de láminas y sólidos de revolución con carga cualquiera fué aplicada y sistematizada posteriormente por Cheung [1] en placas y láminas troncocónicas simplemente apoyadas en sus extremos bajo hipótesis estructurales de Kirchhoff, dando lugar al método conocido como *Banda Finita*. Pocos años más tarde Zienkiewicz y Too [2] siguiendo las mismas ideas desarrollaron el método del *Prisma Finito* que amplía la discretización unidimensional transversal de la superficie media de Cheung a bidimensional, lo que permite realizar un verdadero análisis tridimensional.

En ambos métodos las características físico-geométricas de la sección transversal o meridional deben permanecer constantes en la dirección longitudinal o circunferencial en la que se realiza el desarrollo armónico. Los desarrollos usados definen intrínsecamente las condiciones de contorno en los bordes extremos y deben satisfacer ciertas condiciones de desacoplamiento de la ecuaciones de la discretización.

De entre los muchos refinamientos que de la metodología desacoplada se desarrollaron posteriormente, destacamos la *Formulación Unificada* de Suárez y Oñate [5]-[6] que proponen un método *explícito* general para el análisis de placas y puentes cajón rectos o circulares simplemente apoyados en sus extremos y láminas de revolución bajo cualquier tipo de carga, con las hipótesis estructurales más generales de Reissner-Mindlin [3]-[4]. Esta formulación se denomina unificada porque todas las tipologías mencionadas se pueden analizar a partir de la formulación más general asociada a la lámina troncocónica (por ejemplo puentes cajón con planta circular) sin más que introducir ligeras modificaciones en las matrices básicas que intervienen en la misma. Posteriores mejoras de la Formulación Unificada han permitido analizar dinámicamente [8]-[9] (vibraciones libres y forzadas) las tipologías mencionadas anteriormente.

El presente trabajo incorpora a la formulación de placas de Suárez y Oñate la variación de inercia longitudinal que permitirá analizar cualquier variación de espesor en placas simplemente apoyadas en sus extremos. La metodología desarrollada podría adaptarse con facilidad para la simulación de otras condiciones de borde y extenderse a puentes cajón rectos o con planta circular y láminas de revolución.

Se hace uso del concepto de carga equivalente que se evalúa, en un proceso iterativo, usando las matrices de Bandas Finitas. El proceso es iterativo dado que, la carga equivalente que modeliza la variación longitudinal de espesor, es siempre función del campo de desplazamientos calculado.

Como introducción se formula, implementa y comprueba la viabilidad de la aproximación propuesta mediante su aplicación al sencillo caso de vigas simplemente apoyadas en sus extremos. La variación de inercia se desarrolla en serie de Fourier dándole así un carácter general al método ya que en cada caso particular solo sería necesario determinar las amplitudes del desarrollo para una función de variación de inercia conocida.

Posteriormente se generalizan todos los conceptos mediante su aplicación a placas donde se matizan todos los aspectos que surgen al combinar el método de los Elementos Finitos con los desarrollos en serie de Fourier en un proceso que se acopla, al intervenir en las ecuaciones integrales básicas los desarrollos asociados a la variación longitudinal del espesor.

ANÁLISIS DE UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON INERCIA VARIABLE

La Energía Potencial Total de una viga en flexión sometida a una carga uniforme $q(y)$ puede escribirse como :

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^b EI \left(\frac{d^2\omega}{dy^2} \right)^2 dy - \int_0^b q\omega dy \quad (1)$$

donde E es el módulo de elasticidad, I la inercia de la sección transversal y ω la flecha en cada punto.

Si la viga está simplemente apoyada en sus extremos ω debe satisfacer las siguientes condiciones de contorno:

$$\omega(y) = \frac{d^2\omega}{dy^2} = 0 \quad \text{en } y = 0 \text{ y en } y = b \quad (2)$$

Estas condiciones se satisfacen automáticamente si representamos la respuesta de la viga mediante los desarrollos de Fourier :

$$\omega = \sum_l \omega^l \text{sen} \frac{l\pi y}{b} \quad \text{con } l = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3)$$

donde b es la longitud de la viga y ω^l es la amplitud de la flecha incógnita para el l -ésimo armónico.

La carga $q(y)$ se representa por la serie de Fourier siguiente:

$$q(y) = \sum_m q^m \text{sen} \frac{m\pi y}{b} \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (4)$$

donde q^m es la amplitud de la carga para el m -ésimo armónico y puede ser obtenida con facilidad usando la fórmula de Euler.

En esta técnica, por desarrollos armónicos, el problema consiste en encontrar, para una carga dada, las amplitudes ω^l que satisfacen la ecuación de equilibrio del sistema estructural establecida, bien como minimización de la Energía Potencial Total de la viga o a partir del Teorema de los Trabajos Virtuales.

Si la viga tiene inercia variable y se representa en la forma $I(y) = I_0(1 - \beta(y))$ podemos desarrollar también la función $\beta(y)$ nuevamente en serie de Fourier como:

$$\beta(y) = \sum_n \beta^n \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (5)$$

donde β^n es la amplitud para el n-ésimo armónico de la función inercia conocida que puede por tanto evaluarse con más o menos dificultad, a partir de la fórmula de Euler.

La Energía Potencial Total, sustituyendo en (1) los desarrollos propuestos en (3),(4) y (5) puede escribirse como :

$$\begin{aligned} \Pi(\omega) = & \frac{1}{2} \int_0^b EI_0 \sum_{l=1}^{\infty} \omega^l \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \omega^m \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} dy \\ & - \int_0^b \sum_{l=1}^{\infty} \omega^l \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{b} \sum_{m=1}^{\infty} q^m \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} dy \quad (6) \\ & - \frac{1}{2} \int_0^b EI_0 \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \sum_{l=1}^{\infty} \omega^l \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \omega^m \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} dy \end{aligned}$$

El valor de la amplitud ω^l se obtiene minimizando la Energía Potencial Total con respecto a ω^l

$$\frac{d\Pi(\omega)}{d\omega^l} = 0 \quad (7)$$

operando y teniendo en cuenta en la resolución de las integrales en la dirección longitudinal y las propiedades ortogonales de los desarrollos armónicos usados podemos escribir

$$\begin{aligned} 0 = & EI_0 \omega^m \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 \frac{b}{2} - q^m \frac{b}{2} \\ & - EI_0 \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \sum_{l=1}^{\infty} \omega^l \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2 \underbrace{\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy}_{\text{carga equivalente}} \quad (8) \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación debe realizarse por medio de un proceso iterativo dado que los valores de ω^m dependen de los ω^l . Si elegimos como solución inicial la proporcionada por $\omega^l = 0$, solución de la viga simplemente apoyada de inercia constante con la misma carga, podemos realizar el proceso iterativo siguiendo el siguiente esquema.

Solución inicial

$$\omega_0^m = \frac{q^m b^4}{EI_0 m^4 \pi^4} \quad (9)$$

Solución en la iteración j-ésima

$$\omega_j^m = \frac{q^m b^4}{EI_0 m^4 \pi^4} - \frac{2}{m^2 b} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_{j-1}^l l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n I_{lmn} \quad (10)$$

donde

$$I_{lmn} = \int_0^b \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy \quad (11)$$

Para las cargas solo presentamos aquí, las amplitudes del desarrollo armónico asociado a una carga puntual y uniforme siendo sencillo representar cualquier otro tipo de carga :

Carga uniforme

$$q^m = \frac{2q_0}{m\pi} \left[\cos \frac{m\pi b_1}{b} - \cos \frac{m\pi b_2}{b} \right] \quad (12)$$

donde q_0 es la carga uniforme que actúa en el intervalo $[b_1, b_2]$

Carga Puntual

$$q^m = \frac{2P}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi b_1}{b} \quad (13)$$

donde P es la carga puntual que actúa en $y = b_1$.

De la misma manera para la inercia solo se consideran dos casos sencillos de variación longitudinal: un salto constante y un salto con variación lineal. Las amplitudes de los desarrollos correspondientes se explicitan tras haber realizado previamente las integrales que aparecen en la fórmula de Euler. Cualquier otra ley de variación solo presentaría alguna dificultad algebraica adicional.

Salto Constante de Inercia

$$I(y) = I_0 \text{ en } [0, b_1] \text{ y en } [b_2, b]; \quad I(y) = CI_0 \text{ en } [b_1, b_2]$$

$$\beta^m = \frac{2C}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi b_1}{b} - \cos \frac{n\pi b_2}{b} \right] \quad (14)$$

Variación Lineal-Constante de Inercia

lineal $[I_0, CI_0]$ en $[b_1, b_2]$; constante CI_0 en $[b_2, b_3]$; lineal $[CI_0, I_0]$ en $[b_3, b_4]$

$$\begin{aligned} \beta^m = & \frac{4(1-C)b_1}{(b_2-b_1)n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi(b_2+b_1)}{2b} \operatorname{sen} \frac{n\pi(b_2-b_1)}{2b} - \frac{2(1-C)b_1}{(b_2-b_1)n\pi} \cos \frac{n\pi b_1}{b} \\ & + \frac{2(1-C)b_2}{(b_2-b_1)n\pi} \cos \frac{n\pi b_2}{b} - \frac{4(1-C)b}{(b_2-b_1)(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi(b_2+b_1)}{2b} \operatorname{sen} \frac{n\pi(b_2-b_1)}{2b} \\ & - \frac{4(1-C)}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi(b_2+b_3)}{2b} \operatorname{sen} \frac{n\pi(b_3-b_2)}{2b} - \frac{2(1-C)b_3}{(b_3-b_4)n\pi} \cos \frac{n\pi b_3}{b} \\ & + \frac{4(1-C)b_4}{(b_3-b_4)n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi(b_3+b_4)}{2b} \operatorname{sen} \frac{n\pi(b_4-b_3)}{2b} + \frac{2(1-C)b_4}{(b_3-b_4)n\pi} \cos \frac{n\pi b_4}{b} \\ & - \frac{4(1-C)b}{(b_3-b_4)(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi(b_4+b_3)}{2b} \operatorname{sen} \frac{n\pi(b_4-b_3)}{2b} \end{aligned} \quad (15)$$

Los esfuerzos se determinan una vez calculadas las amplitudes de la flecha a través de la expresión clásica dada para las vigas por la Resistencia de Materiales :

$$M(y) = -EI(y) \frac{d^2 \omega}{dy^2} \quad (16)$$

y sustituyendo ω e $I(y)$ por sus desarrollos armónicos podemos escribir:

$$M(y) = -EI_0 \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \omega^l \left(\frac{l\pi}{b} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{b} \quad (17)$$

Conocidos los valores de ω^l y los de β^n podemos realizar los sumatorios correspondientes y determinar el valor del momento flector en cualquier sección $y = a$. La presencia de l^2 reduce la velocidad de convergencia de la solución de momentos en relación a la de la flecha, siendo por ello la determinación de esfuerzos el punto más crítico de este tipo de análisis.

EJEMPLOS DE VIGAS DE INERCIA VARIABLE

En la Figura 1 se presentan los resultados obtenidos para la flecha y momento flector de una viga simplemente apoyada en sus extremos con carga uniforme y puntual y una variación longitudinal de inercia en salto y lineal-salto con apoyos intermedios usando el esquema iterativo presentado en este trabajo.

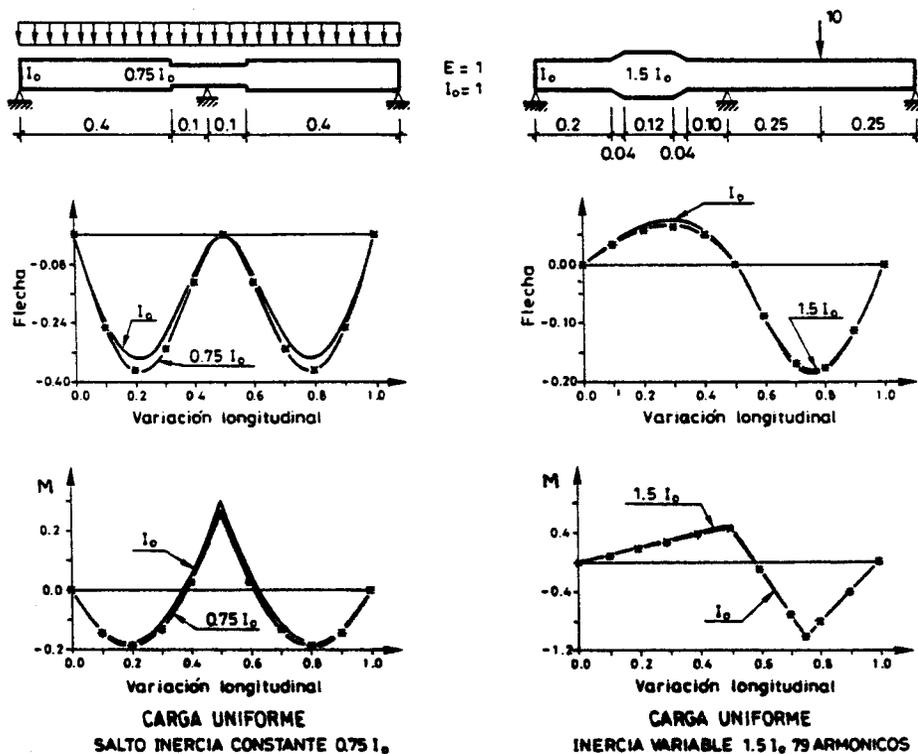


Figura 1. Distribución de flechas y momentos flectores en vigas de inercia variable hiperestáticas.

La flecha aumenta al reducir la sección y disminuye en el caso contrario. Los momentos flectores tienen una ligera variación con respecto a la viga de inercia constante como era previsible en vigas hiperestáticas. El número de armónicos necesarios para obtener la solución correcta es del mismo orden que en el caso de vigas de inercia constante (19 para carga uniforme y 39 para carga puntual) con la única diferencia de que todos los términos son activos en el proceso iterativo. El número de iteraciones necesarias en todos los casos ha sido de seis aunque con solo tres ya se obtienen resultados aceptables. La presencia de apoyos intermedios obliga a tomar precauciones con los términos del desarrollo de la carga en la etapa de la actuación de los infuljos unidad, necesarios para realizar un esquema de flexibilidad.

Los desarrollos utilizados para simular la variación longitudinal de inercia en los casos considerados no han requerido excesivo número de términos dado las sencillas características de los mismos.

FORMULACIÓN DE BANDA FINITA PARA PLACAS DE ESPESOR VARIABLE

La formulación de Banda Finita con espesor longitudinal variable para el análisis de placas moderadamente gruesas se basa en los mismos principios establecidos para espesor constante. El desarrollo de la formulación sigue los mismos pasos presentados en la referencia [5] y la diferencia fundamental aparece cuando se realiza la integración explícita en la dirección longitudinal y . La presencia de $t = t(y)$ en la matriz de constantes elásticas, D , produce en la integración de la ecuación de rigidez según dicha dirección, un acoplamiento para los distintos términos del desarrollo armónico.

La ecuación integral que nos proporciona la matriz de rigidez puede escribirse teniendo en cuenta las contribuciones de flexión y cortante como:

$$[K_{ij}^{lm}]^e = \int \int_{A^e} \left\{ B_{fi1}^{lT} S_l + B_{fi2}^{lT} C_l \quad B_{ci1}^{lT} S_l + B_{ci2}^{lT} C_l \right\} \begin{bmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \left\{ B_{fi1}^m S_m + B_{fi2}^m C_m \right\} dA \quad (18)$$

donde B y D son respectivamente las matrices de deformación y de constantes elásticas que aparecen en la formulación de placas de Reissner-Mindlin [5] y $S_l = \text{sen} \frac{l\pi x}{L}$ y $C_l = \text{cos} \frac{l\pi x}{L}$.

La presencia de t^3 en la matriz D_f y de t en D_c , funciones ahora de y , dificultan el proceso de integración e impiden utilizar las propiedades ortogonales de las funciones S_l y C_l en la forma clásica de la formulación de Banda Finita.

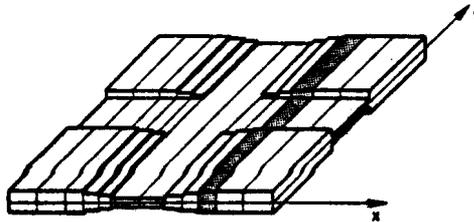


Figura 2. Discretización de una placa de espesor longitudinal variable en bandas.

Si expresamos la función $t(y)$ como:

$$t(y) = t_0(1 - \beta(y))$$

y explicitamos en las matrices elásticas t y t^3 , podemos escribir

$$[K_{ij}^{im}]^e = [K_{ij}^H]^e + [K_{ij}^{im}]^e \quad (19)$$

donde la primera submatriz de rigidez es la desacoplada clásica de Banda Finita al intervenir exclusivamente t_0 , y la segunda viene dada por:

$$[K_{ij}^{im}]^e = \int \int_{A^e} \left\{ \begin{array}{l} B_{fj_1}^{i,T} S_i + B_{fj_2}^{i,T} C_i \quad B_{cj_1}^{i,T} S_i + B_{cj_2}^{i,T} C_i \\ \left[\begin{array}{cc} [-3\beta(y) + 3\beta^2(y) - \beta^3(y)] D_f & 0 \\ 0 & -\beta(y) D_c \end{array} \right] \\ \left\{ \begin{array}{l} B_{fj_1}^m S_m + B_{fj_2}^m C_m \\ B_{cj_1}^m S_m + B_{cj_2}^m C_m \end{array} \right\} dA \end{array} \right. \quad (20)$$

la presencia de la función $\beta(y)$ hace que en esta ecuación se produzca en el proceso de integración un acoplamiento para los distintos términos del desarrollo armónico.

Por lo tanto la minimización de la Energía Potencial Total de la placa conduce, cuando el espesor es variable, a un sistema de ecuaciones armónicamente acoplado que tras el proceso de ensamblaje de los distintos elementos puede escribirse para cada término del desarrollo armónico de la forma compacta siguiente:

$$K^H a^l + \sum_{m=1}^n K^{im} a^m = f^l \quad \text{con } l = 1, \dots, n \quad (21)$$

La matriz K^H coincide con la de rigidez desacoplada asociada a la placa de la misma longitud y espesor constante t_0 . El sistema de ecuaciones de rigidez resultante al estar acoplado es de orden $3 \times N \times n$, siendo N el número total de nodos en que se ha discretizado la sección transversal y n el número de armónicos necesarios para simular el comportamiento longitudinal de la placa.

Para obtener las ventajas de la Banda Finita clásica el proceso se plantea incorporando al vector de cargas la submatriz de rigidez acoplada en forma de una carga equivalente. Se reduce así el orden del sistema final, $(3 \times N)$, de ecuaciones a resolver para obtener la solución a costa de incrementar la etapa de evaluación de las cargas actuantes. Esta fase precisa de un esquema iterativo dado que en la carga equivalente intervienen los parámetros nodales de toda la placa asociados a todos los términos del desarrollo armónico utilizado.

$$K^H a^l = f^l - \underbrace{\sum_{m=1}^n K^{im} a^m}_{\text{carga equivalente}} \quad (22)$$

El esquema iterativo incorporado en este trabajo para la evaluación de la carga equivalente es el siguiente:

$$f_k^i = f_k^i - \sum_{m=1}^n K^{im} a_{k-1}^m \quad (23)$$

En este proceso iterativo es necesario calcular las matrices K^{im} y resolver el sistema (22) para cada armónico en cada iteración pero siempre bajo un esquema equivalente al de Banda Finita más clásica. Si el número de iteraciones necesario para evaluar correctamente la carga equivalente es pequeño, el proceso aquí planteado compite en tiempo y aproximación con el método alternativo de Elementos Finitos.

En la evaluación de la submatriz de rigidez desacoplada se siguen los mismos pasos dados para una placa de espesor constante y para el elemento tipo banda lineal de dos nodos con integración reducida se puede obtener de forma explícita de acuerdo con la expresión que puede encontrarse en la referencia [5].

La evaluación de la submatriz de rigidez acoplada K^{im} lleva consigo una integración explícita a largo del eje longitudinal y , más o menos complicada, dependiendo de la función $\beta(y)$ y una integración clásica de Elementos Finitos a lo largo del eje transversal x . Esta última operación se puede también explicitar si se utiliza el elemento tipo banda lineal de dos nodos con integración reducida obteniendo una expresión algebraica para su integral aproximada.

Para dar generalidad al método propuesto la función $\beta(y)$ se puede desarrollar también en serie de Fourier en la forma:

$$\beta(y) = \sum_n \beta^n \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

donde siguen siendo válidas las expresiones que proporcionan las amplitudes para una variación de espesor constante o lineal-constante en vigas. Cualquier otra variación precisará de un proceso algebraico previo para determinar sus correspondientes amplitudes.

Si sustituimos estos desarrollos en la ecuación (20) podemos escribir

$$[K_{ij}^{im}]^e = \int_{A^e} \left\{ B_{f_i 1}^{i T} S_i + B_{f_i 2}^{i T} C_i \quad B_{c_i 1}^{i T} S_i + B_{c_i 2}^{i T} C_i \right\} \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} -3 \sum_{n=1}^n \beta^n S_n + 3 \sum_{n=1}^n \beta^n S_n \sum_{k=1}^n \beta^k S_k \\ - \sum_{n=1}^n \beta^n S_n \sum_{k=1}^n \beta^k S_k \sum_{j=1}^n \beta^j S_j \end{array} \right] D_f & 0 \\ 0 & - \sum_{n=1}^n \beta^n S_n D_c \end{array} \right] \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} B_{f_j 1}^m S_m + B_{f_j 2}^m C_m \\ B_{c_j 1}^m S_m + B_{c_j 2}^m C_m \end{array} \right\} dA$$

La integración explícita a lo largo del eje longitudinal y proporciona una solución acoplada en función de los valores que toman las siguientes integrales :

$$\begin{aligned}
 I_1^{imn} &= \int_0^b \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy \\
 I_2^{imnk} &= \int_0^b \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b} dy \\
 I_3^{imnkj} &= \int_0^b \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{j\pi y}{b} dy \\
 I_4^{imn} &= \int_0^b \cos \frac{l\pi y}{b} \cos \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy \\
 I_5^{imnk} &= \int_0^b \cos \frac{l\pi y}{b} \cos \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b} dy \\
 I_6^{imnkj} &= \int_0^b \cos \frac{l\pi y}{b} \cos \frac{m\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{j\pi y}{b} dy
 \end{aligned}$$

La ecuación (24) puede, en función de estas integrales longitudinales, escribirse como:

$$\begin{aligned}
 [K_{ij}^{im}]^c &= \left[\int_0^{a^*} B_{j,i_1}^l T D_f B_{j,i_1}^m dz \right] \left(-3 \sum_n \beta^n I_1^{imn} + 3 \sum_n \sum_k \beta^n \beta^k I_2^{imnk} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_n \sum_k \sum_j \beta^n \beta^k \beta^j I_3^{imnkj} \right) \\
 &\quad + \left[\int_0^{a^*} B_{j,i_2}^l T D_f B_{j,i_2}^m dz \right] \left(-3 \sum_n \beta^n I_4^{imn} + 3 \sum_n \sum_k \beta^n \beta^k I_5^{imnk} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_n \sum_k \sum_j \beta^n \beta^k \beta^j I_6^{imnkj} \right) \\
 &\quad + \left[\int_0^{a^*} B_{c,i_1}^l T D_c B_{c,i_1}^m dz \right] \left(- \sum_n \beta^n I_1^{imn} \right) \\
 &\quad + \left[\int_0^{a^*} B_{c,i_2}^l T D_c B_{c,i_2}^m dz \right] \left(- \sum_n \beta^n I_4^{imn} \right)
 \end{aligned} \tag{25}$$

La incorporación del elemento lineal con integración reducida, nos permite explicitar también la integración en la dirección transversal x y escribir:

$$K_{ij}^{im}{}_{j_1}^c = \int_0^{a^*} B_{j,i_1}^l T D_f B_{j,i_1}^m dz = \frac{Et_0^2}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{i+j}}{a} & \frac{(-1)^{j+1}\nu m\pi}{2b} \\ 0 & \frac{(-1)^{i+1}\nu l\pi}{2b} & \frac{alm\pi^2}{4b^2} \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$K_{ij}^{im}{}_{j_2}^c = \int_0^{a^*} B_{j,i_2}^l T D_f B_{j,i_2}^m dz = \frac{Et_0^2}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\nu)alm\pi^2}{8b^2} & \frac{(-1)^i(1-\nu)l\pi}{4b} \\ 0 & \frac{(-1)^j(1-\nu)m\pi}{4b} & \frac{(-1)^{i+j}(1-\nu)}{2a} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$K_{ij}^{lm}{}_{c1} = \int_0^{a^e} B_{c1}^{lT} D_c B_{c1}^m dx = \frac{Et_0}{2.4(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{i+j}}{a} & \frac{(-1)^j}{2} & 0 \\ \frac{(-1)^i}{2} & \frac{a}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$K_{ij}^{lm}{}_{c2} = \int_0^{a^e} B_{c2}^{lT} D_c B_{c2}^m dx = \frac{Et_0}{2.4(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{a^2 m \pi^2}{4b^4} & 0 & \frac{a i \pi}{4b} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{a m \pi}{4b} & 0 & \frac{a}{4} \end{bmatrix} \quad (29)$$

con i y j variando de 1 a 2 y donde a representa el ancho de la banda considerada. La suma de estas cuatro submatrices de rigidez con $l = m$ nos proporciona la matriz de rigidez del elemento cuando el espesor es constante.

La carga equivalente que provoca el espesor variable en cada elemento e viene, para el elemento lineal con integración reducida, dada para cada armónico l , por una expresión matricial ya integrada en x e y

$$q^{le} = \sum_m \left\{ [K_{f1}^{lm}] \sum_n \left(-3\beta^n I_1^{lmn} + 3 \sum_k \beta^n \beta^k I_2^{lmnk} - \sum_k \sum_j \beta^n \beta^k \beta^j I_3^{lmnkj} \right) + [K_{f2}^{lm}] \sum_n \left(-3\beta^n I_4^{lmn} + 3 \sum_k \beta^n \beta^k I_5^{lmnk} - \sum_k \sum_j \beta^n \beta^k \beta^j I_6^{lmnkj} \right) + [K_c^{lm}] \left(- \sum_n \beta^n I_1^{lmn} \right) + [K_c^{lm}] \left(- \sum_n \beta^n I_4^{lmn} \right) \right\} [a^m]^e \quad (30)$$

que depende de todos los parámetros nodales del elemento e^m . La evaluación de esta carga equivalente requiere conocer los valores a^m y por lo tanto precisa de un proceso iterativo que partiendo una solución inicial, valores asociados a la placa de las mismas dimensiones y propiedades pero de espesor constante, nos permita ir desarrollando el proceso hasta obtener una solución que converja.

El método aunque presenta un aspecto inicial complejo debido a la generalidad que se ha pretendido dar a la variación de espesor, es fácil de implementar en un programa de ordenador pues las matrices explícitas que intervienen ya estaban implícitamente planteadas en la formulación del método unificado para placas de espesor constante. La incorporación del esquema iterativo y la evaluación de las distintas integrales que aparecen durante el proceso sólo presentan una cierta complejidad durante la fase de almacenamiento de los valores de las amplitudes nodales en los pasos intermedios.

Una vez evaluada la carga equivalente se resuelve el sistema de ecuaciones (20) y obtenemos los valores de las amplitudes de los parámetros nodales a^l . El campo de desplazamientos en cualquier sección $y = y_0$ se obtiene como suma de los distintos términos del desarrollo armónico.

El campo de esfuerzos generalizados se obtiene, una vez calculadas las amplitudes nodales, a partir de la ecuación clásica

$$\sigma_i^j = \sum_1^n \sum_1^2 D B_i^j \alpha_i^j$$

en la que se sustituyen t^3 y t por sus correspondientes desarrollos armónicos.

$$t = t_0(1 - \sum_n \beta^n S_n)$$

$$t^3 = t_0^3(1 - 3 \sum_n \beta^n S_n + 3 \sum_n \sum_k \beta^n \beta^k S_n S_k - \sum_n \sum_k \sum_j \beta^n \beta^k \beta^j S_n S_k S_j)$$

Utilizando las funciones armónicas que afectan a las distintas filas de B_i^j , podemos obtener, en un proceso algo más complicado que para placas de espesor constante, las tensiones generalizadas en cualquier sección $y = y_0$ como suma de las contribuciones de los distintos términos de los desarrollos.

ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN ITERATIVA

Para estimar el error cometido en la solución durante el proceso iterativo descrito elegimos una norma para los vectores y matrices que designamos como $\|a\|$ y $\|K\|$ respectivamente. El error en la iteración k , en términos del vector solución puede escribirse como

$$e_k = \frac{\|a_k\| - \|a_{k-1}\|}{\|a_{k-1}\|} \quad (31)$$

siendo

$$a_k = -K^{n-1} K^{im} a_{k-1} \quad (32)$$

obteniendo para la norma de desplazamientos en la iteración k la siguiente expresión

$$\|a_k\| = \|K^{n-1} K^{im} a_{k-1}\| \quad (33)$$

Se demuestra que

$$\|K^{n-1} K^{im} a_{k-1}\| \leq \text{cond}(K^n) \frac{\|K^{im}\|}{\|K^n\|} \|a_{k-1}\| \quad (34)$$

El error puede entonces escribirse como

$$e_k \leq \text{cond}(K^n) \frac{\|K^{im}\|}{\|K^n\|} - 1 \quad (35)$$

donde $\text{cond}(K^n)$ es el número de condición de K^n .

Esta última ecuación muestra dos aspectos importantes:

En cada iteración el error está acotado
La cota del error es constante en toda iteración.

lo que nos permite asegurar que el proceso iterativo converge y por lo tanto nos conduce a la solución del problema planteado.

EJEMPLO DE COMPROBACION DE LA TEORIA PROPUESTA

El ejemplo que a continuación se muestra sólo trata de poner de manifiesto la eficacia de la formulación de Banda Finita Acoplada para el análisis de placas de espesor longitudinal variable aquí presentada.

Se analiza una placa cuadrada de lado unidad simplemente apoyada en sus cuatro bordes con una variación constante longitudinal de espesor que toma un valor de 0.75 en $0.4 \leq y \leq 0.6$ y permanece constante e igual a la unidad para los restantes valores de y .

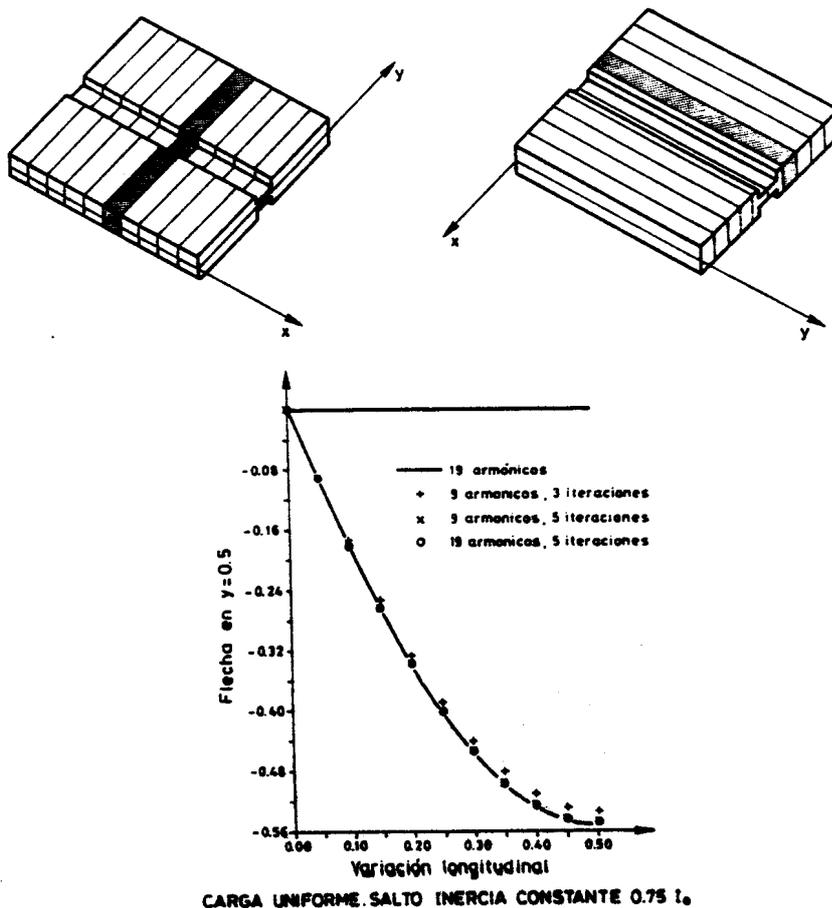
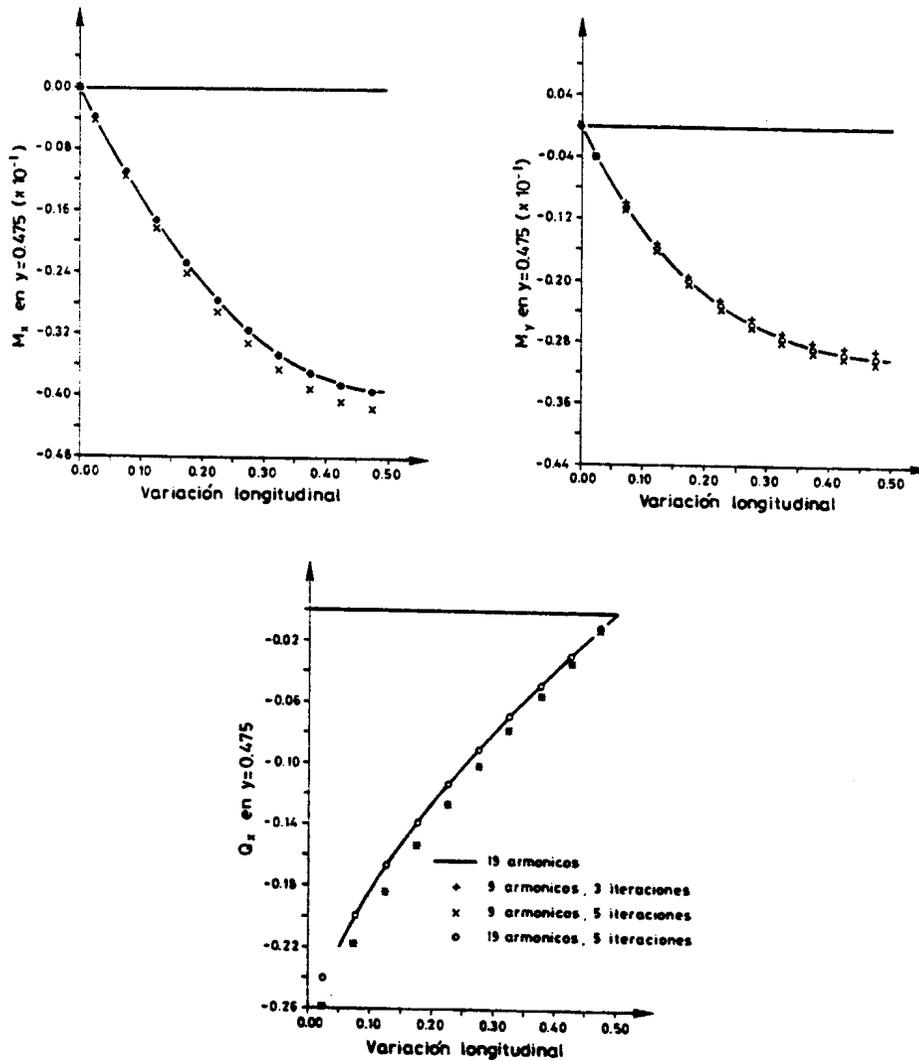


Figura 3. Geometría y discretización de la placa. Distribución transversal de flechas en la sección central.

La placa estudiada se somete a una carga vertical uniforme de valor unidad y los desarrollos armónicos utilizados para simular la variación longitudinal de espesor y de la carga son los dados por las ecuaciones (14) y (12) respectivamente.



CARGA UNIFORME. SALTO INERCIA CONSTANTE 0.75 I.

Figura 4. Distribución transversal de esfuerzos M_x , M_y y Q_x .

En la Figura 3 se presenta la geometría de la placa así como la discretización realizada en bandas lineales de dos nodos usando bandas en la dirección y y alternativamente, para comprobación de resultados, bandas en la dirección x que nos permiten realizar un análisis de Banda Finita clásico con una variación de espesor transversal que se simula mediante

elementos finitos unidimensionales. En la misma figura se presentan los resultados obtenidos para la flecha en la sección central $y = 0.5$ con las dos representaciones usando 9 y 19 términos del desarrollo armónico. Se presenta en dicha figura la variación de la flecha en función del número de iteraciones necesarias para obtener la solución correcta. Como puede observarse cinco iteraciones han resultado suficientes para obtener una distribución transversal de flecha con un error inferior al 0.1%.

Debemos destacar que en este caso el número de armónicos es menos determinante que el número de iteraciones dado que la respuesta en flecha frente a una carga uniforme se simula adecuadamente con pocos términos del desarrollo. Así la distribución de flechas obtenidas con 9 y 19 armónicos son muy semejantes. Por el contrario el número de pasos del proceso iterativo para determinar la carga equivalente tiene su importancia y puede provocar errores importantes.

En la Figura 4 se presentan los resultados obtenidos para la variación transversal de los esfuerzos generalizados M_x , M_y y Q_x en la sección $y = 0.475$ con las dos representaciones definidas anteriormente, usando 9 y 19 términos del desarrollo. La correcta distribución de esfuerzos precisa de un mayor número de términos de acuerdo con las recomendaciones generales que proporciona la técnica de Banda Finita y el número de iteraciones necesarias es nuevamente de cinco.

La observación de la Figura 4 nos permite detectar una posible fuente de error dado que con menos términos y menos iteraciones (9 armónicos y 3 iteraciones) se produce para algunos esfuerzos una seudolución correcta.

REFERENCIAS

- [1.] Cheung, Y.K., "The Finite Strip Method in Structural analysis", Pergamon, 1976.
- [2.] Zienkiewicz, O.C. y Too, J.M., "The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes", Proc. In. IV Engr., Vol. 53-II, pp. 147-172, 1972.
- [3.] Reissner, E., "The effect on transverse-shear deformation on the bending of elastic plates", Jour. of Applied Mech., Vol. 12, pp. 69-77, 1945.
- [4.] Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates", Jour. of Appl. Mech., pp. 31-38, 1951.
- [5.] Suárez, B., "Formulación de Bandas Finitas de Reissner-Mindlin para el análisis de placas, puentes y láminas de revolución", Tesis doctoral, E.T.S.I.C.C.P.B., 1985.
- [6.] Oñate, E., Suárez, B. y Hinton, E., "Mindlin Finite strip and axisymmetric finite element shell analysis", Chapt. 2 in "Finite Element Software for Plates and Shells", Pineridge Press, 1984.
- [7.] Suárez, B. y Sastre, J., "Análisis de placas esviadas por el método de la Banda Finita". II Simp. Aplicaciones del MEF en ingeniería, Tomo I, pp. 435-445, 1986.
- [8.] Miquel, J., Suárez, B. y Oñate, E., "Dynamic Analysis of structures using Reissner-Mindlin finite strip formulation", Computers and Structures, Próxima aparición.
- [9.] Suárez, B., Miquel, J. y Oñate, E., "Free Vibration Analysis of Plates, Bridges and Axisymmetric Shells using a thick finite strip method", Engineering Computations, Próxima aparición.

- [10.] Croll, U.G.D., Kaleli, F., Kemp, K.O. y Munro, V., "A Simplified approach to the analysis of gweometrically imperfect cooling tower shells", *Engineerings Structures*, Vol. 1, pp. 92-98, 1979.
- [11.] Calladine, C., "Structural Consequences of small imperfectioning in elastic thin shells of revolution", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 8, pp. 679-697, 1972.