

DETERMINACION EXPERIMENTAL-NUMERICA DE COEFICIENTES TERMICOS  
A TRAVES DE PROBLEMAS TIPO STEFAN A UNA FASE

Jorge C. Arderius

PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi",  
Fac. de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,  
Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina.

Miguel A. Lara

Grupo de Energía Solar, IFIR (CONICET-UNR),  
Fac. de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,  
Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina.

Domingo A. Tarzia

PROMAR (CONICET-UNR), Instituto de Matemática "B. Levi",  
Fac. de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,  
Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina.

RESUMEN

Se verifican experimentalmente [Ar] las fórmulas analíticas obtenidas para la determinación de coeficientes térmicos de materiales semi-infinitos a través de un proceso con cambio de fase con una sobre-condición en el borde fijo [Ta1.2.3].

ABSTRACT

We verify experimentally [Ar] the analytical formulae which have been obtained in [Ta1.2.3]. These formulae determinate the thermal coefficients of semi-infinite materials through a phase-change process with an overspecified condition on the fixed face.

## INTRODUCCION

Se considera un cuerpo semi-infinito  $x > 0$  en su fase líquida y a la temperatura de fusión al cual se le quieren calcular uno o dos de sus coeficientes térmicos ( $k$ : conductividad térmica,  $c$ : calor específico,  $L$ : calor latente de fusión por unidad de masa,  $\rho$ : densidad de masa,  $\alpha$ : difusión térmica).

Se realiza un proceso de solidificación con una diferencia de temperatura  $\theta_0 > 0$  y con una sobre-condición dada por  $k\theta_x(0,t) = h_0/\sqrt{t}$  ó  $\theta_x(0,t) = H_0/\sqrt{t}$  ( $t > 0, h_0 > 0, H_0 > 0$ ) en el borde fijo  $x=0$ , donde  $\theta = \theta(x,t)$  representa la temperatura en el punto  $x > 0$  y al instante  $t > 0$ ,  $H_0$  es el coeficiente que caracteriza la pendiente de la temperatura en  $x=0$  y  $h_0 = k H_0$  (esta última relación es válida cuando el coeficiente  $k$  es conocido).

El método utilizado para la determinación experimental-numérica de un coeficiente térmico a través del proceso de solidificación descrito consiste en las siguientes etapas:

i) Realizar el proceso de solidificación determinando experimentalmente  $\theta_0 > 0$  y  $H_0 > 0$  (ó  $h_0 > 0$ ) [Ar].

ii) Determinar numéricamente un coeficiente auxiliar  $\xi > 0$  que resulta ser la única solución de la intersección de dos curvas analíticas que dependen de los coeficientes térmicos conocidos, de funciones matemáticas conocidas y de los datos experimentales calculados en (i) [Ta 1,2,3].

(iii) Aplicar las fórmulas analíticas obtenidas en [Ta 1,2,3] para la determinación del coeficiente térmico desconocido en función de los coeficientes obtenidos en (i) y (ii).

(iv) Si en (i) se determina además experimentalmente el coeficiente  $\sigma > 0$  que caracteriza la interfase sólido-líquida  $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ , entonces se pueden repetir los pasos (ii) y (iii) para obtener simultáneamente dos coeficientes térmicos desconocidos [Ta2,3].

El material de cambio de fase utilizado en la experiencia fue estearina y en numerosos casos los resultados obtenidos están de acuerdo con los datos de Tabla.

Los procesos con cambio de fase se presentan en múltiples aplicaciones de la ciencia y de la tecnología moderna; más detalles pueden verse en [Ca, CaJa, Cr, Lu, Ru, Ta4].

### DETERMINACION DE COEFICIENTES TERMICOS A TRAVES DE PROBLEMAS DE TIPO STEFAN A UNA FASE

Para la determinación experimental de coeficientes térmicos constantes (en cada fase del material) a través de un proceso de cambio de fase (problema de Lamé-Clapeyron-Stefan a una fase) se utilizarán las variantes descritas en [Tai,2,3]. Para ello se deberán tener en cuenta las condiciones que implanta el modelo utilizado, es decir:

a) Coeficientes térmicos  $k$ ,  $\rho$ ,  $c$ ,  $L$ ,  $\alpha$  constantes (en cada fase sólida o líquida).

b) Para la determinación de los coeficientes térmicos de la fase sólida (líquida) se realizará un proceso de solidificación (fusión), debiendo toda la substancia encontrarse a la temperatura de cambio de fase  $\theta$ , en estado líquido (sólido) en el instante inicial  $t=0$ .

c) La temperatura del foco (temperatura del borde fijo  $x=0$ ) deberá ser inferior (superior) a la de cambio de fase  $\theta$ , para la determinación de los coeficientes térmicos de la fase sólida (líquida). La diferencia de temperatura (en valor absoluto) entre la del foco y la de cambio de fase será notada con  $\theta_0 > 0$ .

d) Se simula el material semi-infinito con un material de longitud finita (en nuestro caso: 55cm de longitud y 1.6cm de diámetro) que se encuentra aislado en la parte derecha. El foco de temperatura fría (o caliente) se tomará el de la parte izquierda (representado por  $x=0$ ).

e) Si la interfase sólida-líquida es conocida (desconocida) a priori podrán calcularse simultáneamente dos (uno) coeficientes térmicos del material de cambio de fase.

f) En el borde fijo  $x=0$  se tiene una sobre-condición dada por el flujo de calor o la pendiente de la temperatura [Ca].

A continuación se verán las diferentes variantes y fórmulas analíticas obtenidas en [Tai,2,3] que se tratarán de verificar a través de los resultados experimentales (y también numéricos) que se obtuvieron en las 9 experiencias realizadas.

Por conveniencia, se considerarán tres partes A, B, C en las cuales se tendrá en cuenta si el coeficiente de conducción térmica es conocido a priori o

no, y si se trabaja con un problema directo (la interfase sólido-líquida es desconocida a priori) o inverso (la interfase sólido-líquida es conocida a priori en la forma  $s(t) = 2\sigma\sqrt{\pi t}$  con  $\sigma > 0$  coeficiente dado) de cambio de fase.

### Parte A

En este caso se utilizará el modelo matemático dado en [Ta3], el cual puede utilizarse cuando el coeficiente de conducción térmica  $k$  es desconocido.

Esta variante difiere de la dada en [Ta1,2] por el hecho de que la sobrecondición en el borde fijo  $x = 0$  es de la forma:

$$(1) \quad \theta_x(0,t) = \pm H_0/\sqrt{t} \quad , \quad H_0 > 0,$$

signo + : caso solidificación ,      signo - : caso fusión ,

en la cual no aparece el coeficiente de conducción térmica  $k$  ; es decir, el flujo de calor en  $x = 0$  es substituido por la pendiente de la temperatura en  $x = 0$ . Para resolverlo, se supone que los coeficientes  $H_0$ ,  $\sigma$ ,  $\theta_0 > 0$  son conocidos de la experiencia, donde  $\sigma$  es el coeficiente que caracteriza la frontera móvil  $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$  que representa la interfase sólido-líquida.

### Propiedad 1: (Determinación simultánea de los coeficientes $k$ , $l$ )

Si los datos  $H_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  verifican la condición

$$(2) \quad \frac{\theta_0}{2\sigma H_0} < 1$$

independientemente de  $\rho > 0$ ,  $c > 0$ , entonces  $k$  y  $l$  están dados por:

$$(3) \quad k = \frac{\rho c \sigma^2}{\xi^2} \quad , \quad l = H_0 c \exp(-\xi^2)/\xi^2$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación:

$$(4) \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{\theta_0}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}} \quad , \quad x > 0$$

con

$$(5) \quad f(x) = \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Propiedad 2: (Determinación simultánea de los coeficientes k, c)

Si los datos  $H_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  verifican la condición (2), independientemente de  $\rho > 0$ ,  $l > 0$ , entonces k, c están dados por

$$(6) \quad k = \frac{\rho l \sigma}{H_0} \exp(\xi^2), \quad c = \frac{1}{\sigma H_0} \xi^2 \exp(\xi^2)$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación (4).

Propiedad 3: (Determinación simultánea de los coeficientes k,  $\alpha$ )

Si los datos  $H_0 > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  verifican la condición (2), entonces k,  $\alpha$  están dados por

$$(7) \quad k = \frac{\rho l \sigma}{H_0} \exp(\xi^2), \quad \alpha = \frac{\sigma^2}{\xi^2}$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación (4).

Parte B:

En este caso se utilizará el modelo matemático dado en [Tall], el cual puede ser utilizado cuando el coeficiente k de un material semi-infinito es conocido. En este caso se tiene, como sobre-condición en el borde fijo, el flujo de calor que el material de cambio de fase recibe en el borde fijo  $x=0$ , es decir

$$(8) \quad k\theta_x(0,t) = \pm h_0\sqrt{t}, \quad t > 0, \quad \text{con } h_0 > 0$$

signo + : caso solidificación,      signo - : caso fusión.

Para resolverlo, se supone que los coeficientes  $h_0$ ,  $\theta_0 > 0$  son conocidos de la experiencia, con lo cual debe medirse el flujo de calor. El modelo permite obtener también, teóricamente, el valor de  $\sigma$ , que caracteriza la frontera libre  $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ .

La relación entre las constantes  $h_0$  y  $h_0$  está dada por:

$$(9) \quad h_0 = kh_0.$$

En un primer intento experimental se tendrá presente la relación (9). Es decir que en lugar de determinar experimentalmente el flujo de calor en  $x = 0$  se calculará la pendiente de la temperatura en el borde fijo.

Propiedad 4: (Determinación del coeficiente  $l$ )

Si los datos  $h_0 > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  y los coeficientes del material de cambio de fase  $\rho > 0$ ,  $C = \rho c > 0$ ,  $k > 0$  verifican la condición:

$$(10) \quad \frac{k\theta_0}{ah_0\sqrt{\pi}} = \frac{\theta_0}{h_0} \sqrt{\frac{k\rho C}{\pi}} < 1 \quad (a^2 = \frac{k}{\rho C})$$

los coeficientes  $l$  y  $\sigma$  están dados por:

$$(11) \quad \sigma = \epsilon \sqrt{\frac{k}{C}},$$

$$(12) \quad l = \frac{h_0}{\rho} \sqrt{\frac{C}{k}} \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi},$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación:

$$(13) \quad f(\xi) = \frac{k\theta_0}{ah_0\sqrt{\pi}}, \quad x > 0.$$

Propiedad 5: (Determinación del coeficiente  $c$ )

Si los datos  $h_0 > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  y los coeficientes del material de cambio de fase  $\rho > 0$ ,  $k > 0$ ,  $L = \rho l > 0$  verifican la condición:

$$(14) \quad \frac{k\theta_0}{2h_0} < 1$$

los coeficientes  $c$  y  $\sigma$  están dados por:

$$(15) \quad \sigma = \frac{h_0}{L} \exp(-\xi^2),$$

$$(16) \quad c = \frac{\pi h_0}{\rho k \theta_0} f^2(\xi),$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación:

$$(17) \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{k l \theta_0}{h_0^2 \sqrt{\pi}} \exp(x^2), \quad x > 0.$$

Propiedad 6: (Determinación del coeficiente  $\rho$ )

Cualesquiera sean los datos  $h_0 > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  y los coeficientes del material de cambio de fase  $k > 0$ ,  $l > 0$ ,  $c > 0$ , los coeficientes  $\rho$  y  $\sigma$  están dados por:

$$(18) \quad \sigma = \frac{k \theta_0 \xi}{h_0 \sqrt{\pi} f(\xi)},$$

$$(19) \quad \sqrt{\rho} = \frac{h_0}{\theta_0} \sqrt{\frac{\pi}{k c}} f(\xi),$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación:

$$(20) \quad \frac{c \theta_0}{l \sqrt{\pi}} = x \exp(x^2) f(x), \quad x > 0.$$

Parte C:

En este caso se utilizará el modelo matemático dado en [Ta2]. Este modelo permite, una vez conocidos  $h_0$ ,  $\sigma$ ,  $\theta_0 > 0$  de la experiencia, la determinación simultánea de dos de los cuatro coeficientes,  $k$  (conductividad térmica),  $l$  (calor latente de fusión),  $c$  (calor específico),  $\rho$  (densidad de masa), de un material que ocupa un medio semi-infinito. Esta determinación es obtenida a través de un problema inverso de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase.

Propiedad 7: (Determinación simultánea de los coeficientes  $l$  y  $c$ )

Si los datos  $h_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  y el coeficiente  $k > 0$  del material de cambio de fase verifican la condición:

$$(21) \quad \frac{k \theta_0}{2 h_0 \sigma} < 1$$

independientemente de  $\rho > 0$ , entonces los coeficientes  $l$  y  $c$  están dados por:

$$(22) \quad c = \frac{k}{\rho \sigma^2} \xi^2, \quad l = \frac{h_0}{\rho \sigma} \exp(-\xi^2),$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación:

$$(23) \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{k \theta_0}{h_0 \sigma^4 \pi}, \quad x > 0.$$

Propiedad 8: (Determinación simultánea de los coeficientes  $l$  y  $\rho$ )

Si los datos  $h_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  y el coeficiente  $k$  del material de cambio de fase verifican la condición (21), independientemente de  $c > 0$ , entonces los coeficientes  $l$  y  $\rho$  están dados por:

$$(24) \quad \rho = \frac{k}{c \sigma^2} \xi^2, \quad l = \frac{h_0 c \sigma \exp(-\xi^2)}{k \xi^2},$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación (23).

Propiedad 9: (Determinación simultánea de los coeficientes  $c$  y  $\rho$ )

Si los datos  $h_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  y el coeficiente  $k > 0$  del material de cambio de fase verifican la condición (23), independientemente de  $l > 0$ , los coeficientes  $c$  y  $\rho$  están dados por:

$$(25) \quad \rho = \frac{h_0}{l \sigma} \exp(-\xi^2), \quad c = \frac{k l}{h_0 \sigma} \xi^2 \exp(\xi^2),$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación (23).

A continuación se considerarán la determinación de  $h_0$  y uno de los coeficientes térmicos  $k$ ,  $l$ ,  $\rho$ ,  $c$ :

Propiedad 10: (Determinación simultánea de otros coeficientes físicos)

10a) Cualesquiera sean los datos  $\sigma > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  y los coeficientes del material de cambio de fase  $k > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $c > 0$ , los coeficientes  $h_0$  y  $l$  están dados por:



$$(26) \quad h_0 = \frac{k\theta_0\xi}{\sigma\sqrt{\pi\xi f(\xi)}} \quad , \quad l = \frac{c\theta_0 \exp(-\xi^2)}{\sqrt{\pi\xi f(\xi)}} \quad \left( \text{con } \xi = \frac{q}{2} \right) .$$

10b) Cualesquiera sean los datos  $\sigma > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  y los coeficientes del material de cambio de fase  $l > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $c > 0$ , los coeficientes  $h_0$  y  $k$  están dados por:

$$(27) \quad h_0 = \rho l \sigma \exp(\xi^2) \quad , \quad k = \frac{\rho c \sigma^2}{\xi^2} \quad ,$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación (20).

10c) Cualesquiera sean los datos  $\sigma > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  y los coeficientes del material de cambio de fase  $k > 0$ ,  $l > 0$ ,  $c > 0$ , los coeficientes  $h_0$  y  $\rho$  están dados por:

$$(28) \quad h_0 = \frac{k l}{c \sigma} \xi^2 \exp(\xi^2) \quad , \quad \rho = \frac{k}{c \sigma^2} \xi^2 \quad ,$$

donde  $\xi$  es la única solución de la ecuación (20).

#### DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

Para la determinación de coeficientes térmicos (de la fase sólida o líquida) de un material semi-infinito a través de un proceso con cambio de fase, se construyó un dispositivo [Ar] que respondiese a las características que implanta el modelo matemático utilizado [Ta1,2,3]. En las figuras 1, 2, 3 se encuentra una descripción del equipo experimental.

El material de cambio de fase utilizado fue la estearina (ácido esteárico), cuyos coeficientes teóricos de tabla [Pe, We] están dados por:

$$\theta_f = 69,3 \text{ } ^\circ\text{C} \quad , \quad l = 47,54 \text{ cal/gr} \quad ,$$

$$\rho \text{ (sólido)} = 0,9408 \text{ gr/cm}^3 \quad , \quad \rho \text{ (líquido)} = 0,847 \text{ gr/cm}^3 \quad ,$$

$$c \text{ (sólido)} = 0,399 \text{ cal/gr } ^\circ\text{C} \quad , \quad c \text{ (líquido)} = 0,550 \text{ cal/gr } ^\circ\text{C} \quad ,$$

$$k = 0,0003824 \text{ cal/seg cm } ^\circ\text{C} \quad \text{(válido para ambas fases)} \quad .$$

### ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Utilizando los datos experimentales obtenidos [Ar] se analizarán los resultados mediante gráficas. En la figura 4 se grafican los valores de  $k$  hallados experimentalmente aplicando las fórmulas analíticas de las Propiedades 1, 2, 10 (fórmulas (3), (6) y (27) respectivamente) y se los compara con el valor teórico de tabla. Puede observarse que los valores de  $k$  obtenidos con las fórmulas analíticas están en concordancia con el valor de tabla en las experiencias 1, 2, 3, 6, 8 aplicando las tres propiedades, mientras que en la experiencia 9 sólo se encuentran de acuerdo con el valor de tabla los valores hallados por medio de las Propiedades 1 y 2. En cuanto al resto de las experiencias los valores de  $k$  difieren con respecto al de tabla.

Si se analizan los valores de  $h_0$  representados en las figs. 11 y 12 para las distintas experiencias, obtenidos por aplicación de las fórmulas analíticas de las Propiedades 10a, 10b, 10c, 10d (fórmulas (29) y (31) respectivamente) y la relación  $h_0 = k H_0$  se ve que en las experiencias 1, 2, 6 y 8 hay concordancia a través de las cuatro propiedades y los dados por la relación  $h_0 = k H_0$ .

Se podría decir que los valores de  $h_0$  hallados en las experiencias 1, 2, 6 y 8 son "buenos" (se debe recordar que en realidad se hallaron experimentalmente los valores de  $H_0$ ) y en consecuencia se obtienen buenos valores de  $k$  aplicando la fórmula de la Propiedad 2 en las experiencias mencionadas.

Si bien las fórmulas dadas por las Propiedades 1 y 10 son las mismas, la diferencia entre ellas está dada por el parámetro  $\xi$ . En la primera,  $\xi$  es solución de la ecuación (4) mientras que para la segunda,  $\xi$  es solución de la ecuación (20).

Para analizar los valores de  $k$  dados por las Propiedades 1 y 10 se observarán los valores de  $\sigma$  que se representan en la fig. 6. En ésta se encuentran los valores de  $\sigma$  hallados experimentalmente y los obtenidos al aplicar las fórmulas analíticas dadas por las Propiedades 4, 5, y 6 (fórmulas (11), (15) y (18) respectivamente). En esta gráfica se puede ver que hay concordancia entre los coeficientes  $\sigma$  experimentales ( $\sigma_{exp}$ ) con los dados por las Propiedades 4, 5 y 6 en todas las experiencias, excepto, en la 4 (donde no se ha graficado  $\sigma_{exp}$  por tener un valor mucho mayor que los de las propiedades) y en la 7 por discrepancias entre  $\sigma_{exp}$  y el resto de los coeficientes de la misma experiencia. Volviendo a la fig. 4 se ve que las mayores discrepancias en los valores de  $k$  se encuentran,

precisamente en las experiencias 4 y 7.

Aplicando teoría de errores y teniendo en cuenta todos los valores de  $k$  graficados en la fig. 4, se obtiene:

$$k = (3,54 \pm 0,29) \cdot 10^{-4} \text{ cal/seg cm } ^\circ\text{C}$$

Este valor estadístico de  $k$  concuerda muy bien con el valor hallado en tabla.

Se analizarán ahora los valores hallados para el coeficiente  $\rho$ . En la fig.5 se representan los valores dados por las Propiedades 6, 8, 9 y 10c (fórmulas (19), (24), (25) y (29) respectivamente). En las experiencias 1 y 2 los valores de  $\rho$  dados por las cuatro propiedades se encuentran en concordancia con el valor de tabla. En cuanto a las experiencias 3, 7 y 4 sólo se obtienen valores "buenos" de  $\rho$  con la Propiedad 6 a pesar de haberse comprobado que los valores de  $h_0$  obtenidos por esta propiedad no son "buenos" para estas experiencias.

Aplicando teoría de errores y teniendo en cuenta todos los valores de  $\rho$  graficados en la figura 5 (excepto los de la experiencia 4) se obtiene para el sólido:

$$\rho_s = (0,93 \pm 0,09) \text{ gr/cm}^3$$

Este valor estadístico de  $\rho_s$  concuerda muy bien con el valor hallado en tabla.

En cuanto al valor de la densidad del líquido ( $\rho_l$ ) se cuenta con uno sólo:

$$\rho_l = (0,8 \pm 0,4) \text{ gr/cm}^3$$

que también concuerda con el valor dado por tabla (aunque su error relativo es muy grande).

En las figuras 7 y 8 se hallan representados los valores de  $c$  hallados experimentalmente aplicando las fórmulas analíticas de las Propiedades 2, 5, 7, 9 y 10d (fórmulas (6), (16), (22), (25) y (31) respectivamente). En las experiencias 1 y 2 los valores dados por las cinco propiedades están en concordancia con el valor hallado en tabla.

-Aplicando teoría de errores y teniendo en cuenta todos los valores de  $\rho$  graficados en las figuras 7 y 8 (excepto los de la experiencia 4) obtenemos para  $\rho$  el siguiente valor:

$$\rho_s = (0,39 \pm 0,02) \text{ cal/gr } ^\circ\text{C}$$

Este valor estadístico de  $\rho$  concuerda muy bien con el valor hallado en la tabla.

Con respecto al coeficiente del líquido tenemos un único valor:

$$\rho_l = (0,59 \pm 0,29) \text{ cal/gr } ^\circ\text{C}$$

que está en concordancia con el valor de tabla.

Continuando con el análisis de los resultados obtenidos, se tienen las figuras 9 y 10, donde se hallan representados los valores de  $l$ . En dichas gráficas se representan los valores obtenidos al aplicar las propiedades 1, 4, 9 y 10 (fórmulas (3), (12), (22), (24) y (26) respectivamente). Sólo en las experiencias 1 y 2 los valores dados por todas las propiedades se encuentran en concordancia con el dado por tabla.

Aplicando teoría de errores y teniendo en cuenta todos los valores de  $l$  graficados en las figuras 9 y 10 se obtiene:

$$l = (50 \pm 4) \text{ cal/gr}$$

Este valor estadístico de  $l$  concuerda muy bien con el valor hallado en la tabla.

Para finalizar se puede destacar que el modelo matemático que resultó ser más simple, desde el punto de vista experimental es el dado en [Ta3], pues para la determinación de los coeficientes térmicos sólo se necesita conocer el gradiente de temperatura  $\theta$ , no el flujo de calor en el borde fijo  $x = 0$ .

#### Observación:

Para la determinación del punto de fusión de la estearina se obtuvo el plateau

al determinar experimentalmente la curva de enfriamiento [Qr] (ver la fig.13). Del análisis de dicha curva se obtiene que el punto de fusión de esta sustancia es de  $(55 \pm 0,5) ^\circ\text{C}$ .

Si se observa la fig. 13 se verán dos zonas , A.y B. Cada una de estas zonas forma parte del plateau determinado por el enfriamiento de la estearina. Se puede considerar que en la parte A la sustancia , en su mayor porcentaje , está a la temperatura de fusión y en estado líquido ; mientras que en la parte B se tiene un mayor porcentaje de sustancia a la temperatura de fusión y en estado sólido. Debido a que en el intervalo de tiempo de cada zona es de 765seg. , se tomarán los primeros 480seg. de la zona A para la determinación experimental del problema de solidificación y los últimos 480seg. de la zona B para la determinación experimental del problema de fusión.

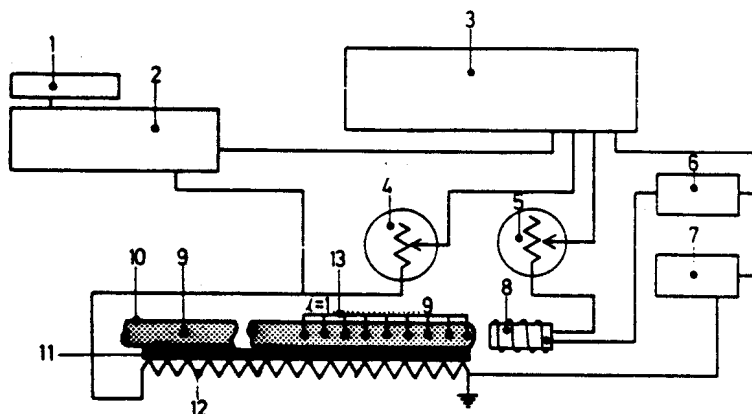


FIG. 1. DESCRIPCION EXPERIMENTAL DEL EQUIPO

1. Impresora
2. Sistema adquisición de datos
3. Estabilizador de tensión
- 4/5. Autotransformadores
6. Regulador de temperatura
7. Multímetro digital de  $4 \frac{1}{2}$  dígitos
8. Foco calefactor de 240 watt
9. Material analizado (estearina)
10. Tubo de vidrio
11. Amianto
12. Resistencia de la base calefactora (100 watt)
13. Termocuplas (i=1.....9)

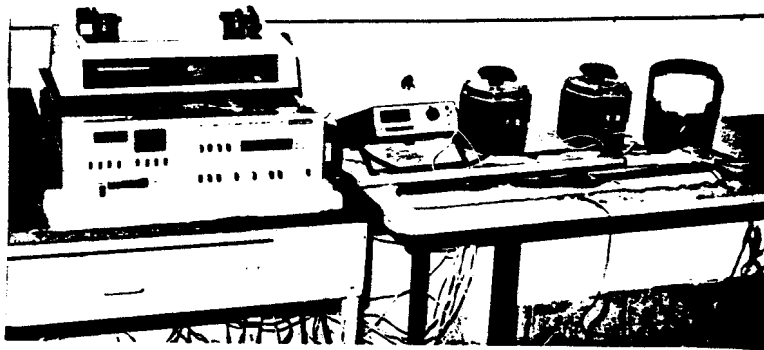


Fig. 2 - Vista general del sistema experimental



Fig. 3 - Detalle descriptivo del dispositivo experimental foco caliente y probeta con estearina.

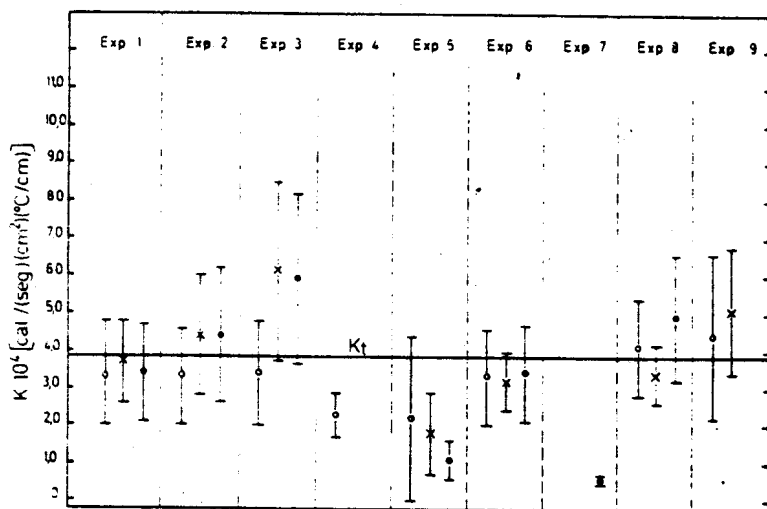


FIG. 4.- Valores de K hallados experimentalmente aplicando las fórmulas analíticas de las propiedades 1, 2 y 10

$K_t$  - conductividad térmica (tabla)

○ Prop. 1  $K = f < \sigma^{-2} / \xi^2$

× Prop. 2  $K = f l r / H_0 \exp(\xi^2)$

● Prop. 10  $K = f < r^2 / \xi^2$

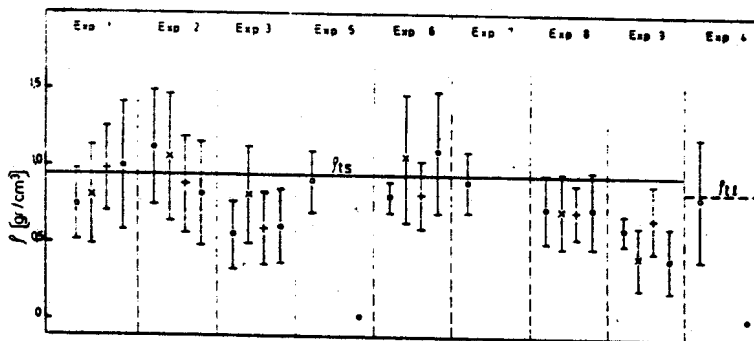


FIG. 5.- Valores de  $\rho$  hallados experimentalmente aplicando las fórmulas analíticas de las propiedades 6, 8, 9 y 10.

$\rho_s$  - densidad de masa del sólido (tabla)

$\rho_l$  - densidad de masa del líquido (tabla)

○ Prop. 6  $\rho = \pi / (k.c) h_0^2 \xi^2 / \theta^2$

× Prop. 8  $\rho = k / (c v^2) \xi^2$

+ Prop. 9  $\rho = h_0 / (l v) \exp(-\xi^2)$

● Prop. 10.c  $\rho = k / (c v^2) \xi^2$

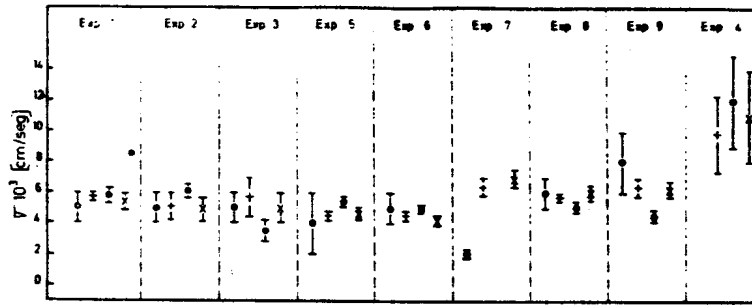


FIG. 6. Valores de  $V$  aplicando las fórmulas analíticas de las propiedades 4,5,6 y en (a) se encuentran los valores hallados experimentales.

$V$  - coeficiente que caracteriza la frontera móvil  $S(t)=2V\sqrt{t}$

- $V$  exp.
- + Prop 4.  $V = \xi \sqrt{k/c}$
- Prop 5.  $V = h_0/L \exp(-\xi^2)$
- x Prop 6.  $V = k \theta_0 \xi / (h_0 \sqrt{t} f(\xi))$

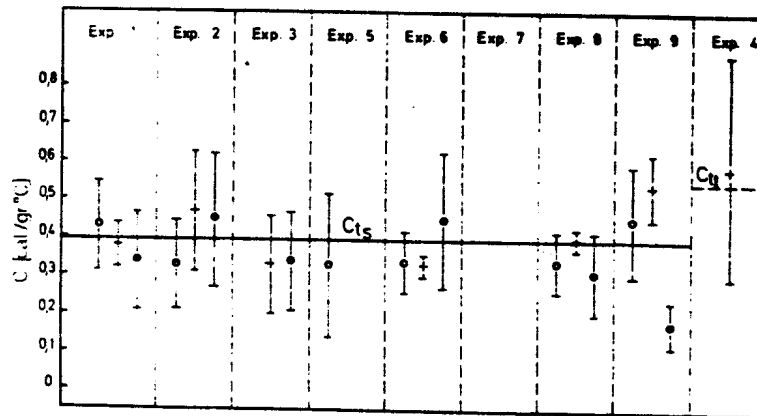


FIG. 7. Valores de  $C$  hallados experimentalmente aplicando las fórmulas analíticas de las propiedades 2,5 y 7.

$C_s$  - calor específico del sólido. (tabla)

$C_l$  - calor específico del líquido. (tabla)

○ Prop. 2 :  $C = l / (V H_0) \xi^2 \exp(\xi^2)$

+ Prop. 5 :  $C = \pi h_0^2 / (\rho k \theta_0^2) f^2(\xi)$

• Prop. 7 :  $C = k / (\rho V^2) \xi^2$



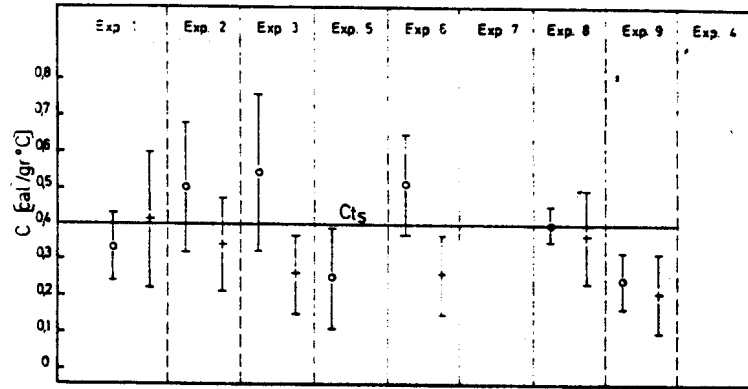


FIG. 8.-Valores de C hallados experimentalmente aplicando las fórmulas analíticas de las propiedades 9 y 10 d

$C_{ts}$ -calor específico del sólido (tabla)

o Prop. 9:  $C = k / (h \Gamma) \xi^2 \exp(\xi^2)$

+ Prop. 10 d:  $C = k / (\rho \Gamma^2) \xi^2$

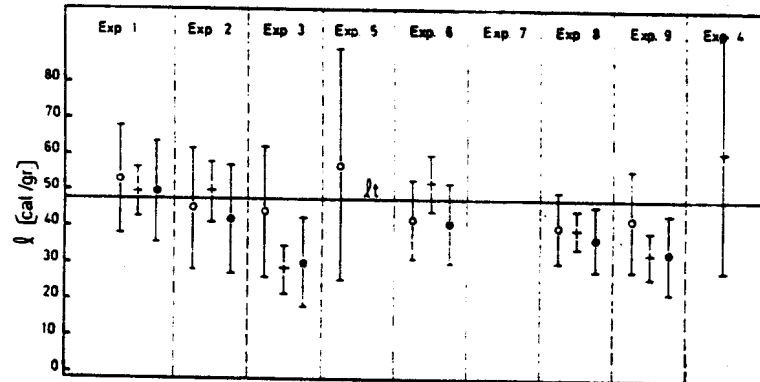


FIG. 9.-Valores de  $l$  hallados experimentalmente aplicando las fórmulas analíticas de las propiedades 1, 4 y 7

$l_t$ -calor latente de fusión (tabla)

o Prop. 1:  $l = H \cdot c \Gamma \exp(-\xi^2) / \xi^2$

+ Prop. 4:  $l = h / \rho \cdot c / k \exp(-\xi^2) / \xi$

o Prop. 7:  $l = h \omega / (\rho \Gamma) \exp(-\xi^2)$

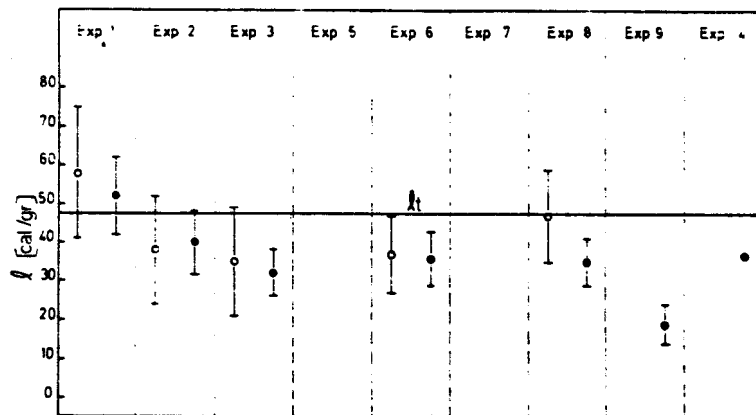


FIG. 10. Valores de  $l$  hallados experimentalmente aplicando las fórmulas analíticas de las propiedades 8 y 10.

$l$  - calor latente de fusión. (tabla)

○ Prop. 8:  $l = h_0 c \sqrt{k} \exp(-\xi^2) / \xi^2$

● Prop. 10:  $l = c \theta_0 / \pi^{1/2} \exp(-\xi^2) / (\xi f(\xi))$

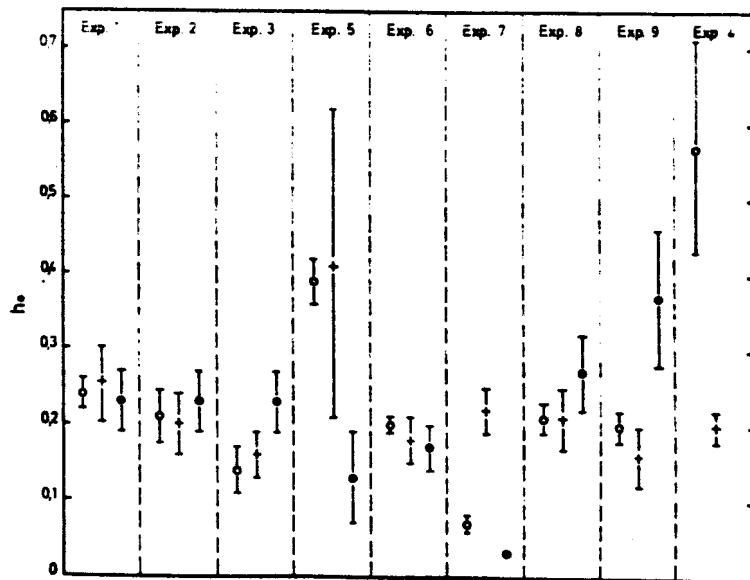


FIG. 11. Valores de  $h_0$  aplicando las fórmulas analíticas de las propiedades 10a, 10b y en (o) se encuentran los valores dados por la relación

$h_0 = k H_0$

○  $h_0 = k H_0$ , + Prop. 10a:  $h_0 = k \theta_0 / (\sqrt{\pi} \xi^2) / f(\xi)$ , ○ Prop. 10b:  $h_0 = l / \sqrt{k} \exp(\xi^2)$

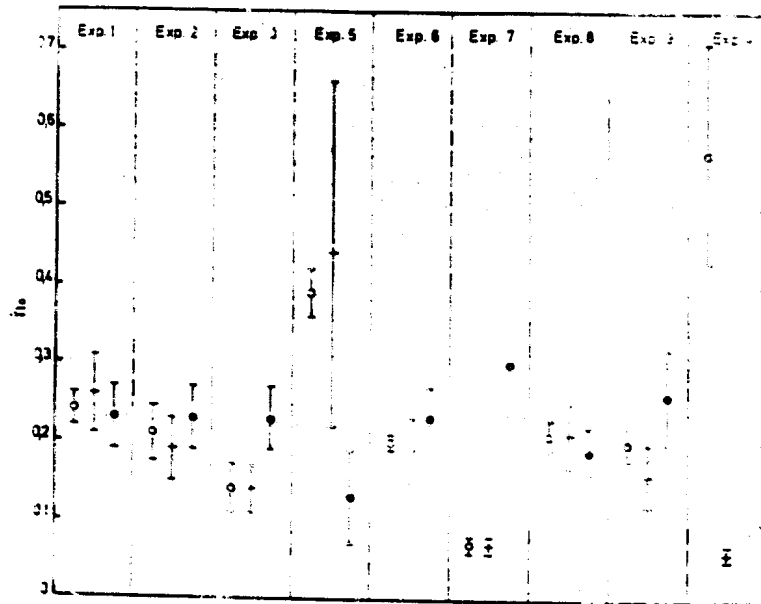


FIG. 2. Valores de  $h_0$  aplicando las fórmulas analíticas de las propiedades 10c y 10d y en (o) se encuentran los valores dados por la relación:  
 $h_0 = k H_0$   
 o  $h_0 = k H_0$ , + Prop. 10c:  $h_0 = k / (c \sqrt{t}) \xi^2 \exp(\xi^2)$ , • Prop. 10d:  $\int \sqrt{t} \exp(\xi^2)$

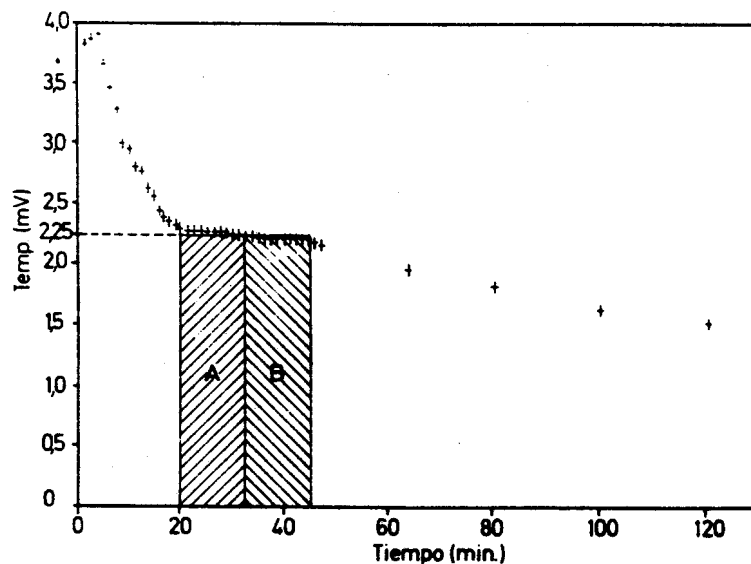


FIG.13. Determinación experimental del plateau de la ESTEARINA

#### REFERENCIAS

[Ar] Anderius, J. C. "Determinación experimental de coeficientes térmicos a través de un proceso con cambio de fase", Trabajo Final de la Lic. en Física, Univ. Nac. de Rosario, Rosario (1988).

[Ca] Cannon, J. R. "The one-dimensional heat equation", Addison-Wesley, Menlo Park, California (1988).

[CaJa] Carslaw H. S., Jaeger C. J., "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford (1959).

[Cr] Crank J., "The mathematics of diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).

[Gr] Grodzoa P. G., "Phase - change storage systems", Solar Energy - Technology Handbook, Part A: Engineering Fundamentals, W. C. Dickinson-P. N. Chermisinoff (Eds.), Marcel Dekker, New York (1980), chapter 25, 795-809.

[Lu] Lunardini V. J., "Heat transfer in cold climates", Van Nostrand Reinhold Company, New York (1981).

[P] Perry J. H., "Chemical Engineers Handbook", Mc Graw - Hill Book Company, New York (1950).

[Ru] Rubinstein L. I., "The Stefan problem", Trans. Math. Monographs, vol.27, Amer. Math. Soc. Providence (1971).

[Ta1] Tarzia D. A., "Determination of the unknown coefficients in the Lamé - Clapeyron problem ( or one - phase Stefan problem)", Advances in Applied Math., 3(1982), 74 - 82.

[Ta2] Tarzia D. A., "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one - phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed phase", Int. J. Heat Mas Transfer, 28 (1983), 1151-1157.

[Ta3] Tarzia D. A., "Una nueva variante para el cálculo simultáneo de algunos coeficientes térmicos de un material semi-infinito a través de un problema de cambio de fase con una sobre-condición en el borde fijo", Rev. Latinoam. Transf. Calor y Materia, 8 (1984), 227-235.

[Ta4] Tarzia D. A., "Introducción al seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", en "Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", CUADERNOS del Instituto de Matemática "B. Levi, N 12, Rosario (1984), 5-32. Ver también "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan problem", Progetto Nazionale M. P. I.: Equazioni di evoluzione e applicazioni fisico-matematiche, Firenze (1988) con 2528 referencias.

[We] Weast R. C., "Handbook of chemistry and physics", Melvin J. Astle (Ed), Boca Raton, CRC Press (1980).