

SOLUCIÓN RÁPIDA DE INECUACIONES DE ISAACS DISCRETAS

Roberto L. V. González

Mabel M. Tidball

Instituto de Matemática Beppo Levi
Universidad Nacional Rosario.
Rosario - Argentina.

RESUMEN

En este trabajo presentamos un algoritmo acelerado para resolver el problema de punto fijo originado por discretización de un problema de juegos diferenciales con tiempos de detención.

ABSTRACT

In this paper we present an accelerated algorithm to solve the fixed point problem related to a special discretization of a differential game problem with stopping times.

1- INTRODUCCIÓN

Los problemas de juegos diferenciales con tiempo de detención dan origen a inecuaciones variacionales biláteras (ver [4] y [7]). La resolución numérica de estas inecuaciones por medio del método de los elementos finitos y algoritmos iterativos de tipo relajación puede conducir a procedimientos lentamente convergentes, cuando el coeficiente de actualización del problema original es pequeño (ver [8]). En este trabajo, se presenta un algoritmo acelerado destinado a superar esta dificultad.

El procedimiento desarrollado, especialmente diseñado para el tratamiento de este tipo especial de juegos, consiste en una extensión de la metodología presentada en [5] para problemas de control óptimo. Se demuestra que el algoritmo acelerado aquí presentado, converge en un número finito de pasos a la solución exacta del problema discretizado. La demostración se basa en el uso de un sistema de inecuaciones cuasivariacionales asociado a la inecuación bilátera (ver [4]).

Se presentan variadas reglas de detención del lazo interno del cómputo del algoritmo, que permiten adaptar este tipo de procedimientos de aceleración a problemas donde no son verificadas las hipótesis descritas en [5], pag. 7, que garantizan la convergencia del algoritmo allí presentado.

Extensiones al caso general de juegos diferenciales y a la aceleración de problemas que involucren operadores contractivos de tipo más generales son considerados en [6].

2- DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DISCRETIZADO Y SU SOLUCIÓN.

2.1 Elementos del problema.

Sea B una matriz de orden n , tal que

$$i) \quad B_{ij}, j \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

$$ii) \quad \sum_j B_{ij} \leq \gamma \quad \forall i, \gamma < 1, \quad (1)$$

sean $\psi_1(j), \psi_2(j), j=1, \dots, n$ tal que

$$iii) \quad \psi_2(j) - \psi_1(j) \geq \alpha > 0 \quad \forall j=1, \dots, n,$$

y sea $f(j) \in \mathbb{R}, j=1, \dots, n$.

Definición:

Para $w \in \mathbb{R}^n$, definimos el operador $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(Mw)(j) = P_j((Bw+Fx)(j)) \quad (3)$$

donde P_j representa la proyección sobre el intervalo $J_j = [\theta_1(j), \theta_2(j)]$

En términos de operaciones simples el operador M está dado por la fórmula:

$$(Mw)(j) = \max\left(\min((Bw+Fx)(j), \theta_2(j)), \theta_1(j)\right)$$

El algoritmo de aceleración propuesto en este trabajo, calcula la solución del siguiente problema:

$$\boxed{\text{Encontrar } \bar{w} \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que } M\bar{w} = \bar{w}.} \quad (2)$$

2.2 Existencia y unicidad de solución.

Proposición 2.1:

El operador M es contractivo y por lo tanto existe una única solución de (2).

Demostración:

Introducimos en \mathbb{R}^n la norma $\|w\| = \max\{|w(j)|, j=1, \dots, n\}$, entonces por las propiedades i) y ii), se tiene que:

$$\|Mw - M\hat{w}\| \leq \gamma \|w - \hat{w}\| \quad \forall w, \hat{w} \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

En efecto:

$$(Mw)(j) = \max\left(\min((Bw+Fx)(j), \theta_2(j)), \theta_1(j)\right)$$

$$\text{Sea } \epsilon = \|w - \hat{w}\|, \text{ luego } w(j) \leq \hat{w}(j) + \epsilon \quad \forall j$$

por lo tanto, $(Bw)(j) \leq (B\hat{w})(j) + \gamma \epsilon$, lo que implica

$$\min((Bw+Fx)(j), \theta_2(j)) \leq \min((B\hat{w}+Fx)(j) + \gamma \epsilon, \theta_2(j) + \gamma \epsilon)$$

asimismo

$$\begin{aligned} \max\left(\min((Bw+Fx)(j), \theta_2(j)), \theta_1(j)\right) &\leq \max\left(\min((B\hat{w}+Fx)(j) + \gamma \epsilon, \theta_2(j) + \gamma \epsilon), \theta_1(j) + \gamma \epsilon\right) \\ &= \max\left(\min((B\hat{w}+Fx)(j), \theta_2(j)), \theta_1(j)\right) + \gamma \epsilon \end{aligned}$$

o sea:

$$(Mw)(j) \leq (M\hat{w})(j) + \gamma \epsilon$$

Análogamente se demuestra que:

$$(Mw)(j) \geq (M\hat{w})(j) - \gamma \epsilon$$

lo que implica:

$$\|Mw - M\hat{w}\| \leq \gamma \|w - \hat{w}\|$$

□

2.3 Caracterización de la solución y su cómputo.

Propiedades:

1°) Si $\bar{w} = M\bar{w}$, entonces

a) $\bar{w}(j) < \psi_2(j) \Rightarrow (B\bar{w}+f)(j) < \bar{w}(j)$

b) $\bar{w}(j) > \psi_1(j) \Rightarrow (B\bar{w}+f)(j) > \bar{w}(j)$.

2°) El teorema del punto fijo nos da el siguiente algoritmo para calcular \bar{w} :

Algoritmo A0:

Primer paso: dar $w^0 \in \mathbb{R}^n$, $v=0$.

Segundo paso: definir $w^{v+1} = Mw^v$

Tercer paso: si $w^v(j) = w^{v+1}(j) \quad \forall j$, parar; si no, hacer $v=v+1$ e ir al segundo paso.

Con respecto a este algoritmo es válido el siguiente resultado de convergencia (ver (3D):

Teorema 2.1

El algoritmo A0 produce una sucesión finita w^v cuyo último elemento es la solución exacta del problema, o genera una sucesión infinita convergente a la sucesión \bar{w} , siendo válida la siguiente cota para la aproximación del error:

$$\|w^v - \bar{w}\| \leq \gamma^v \|w^0 - \bar{w}\| \quad (4)$$

3- DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO ACELERADO.

Definiciones:

e Dada $k(j)$, $j=1, \dots, n$, una familia de índices con valores en $\{0,1,2\}$, definimos:

$$M_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ tal que}$$

$$v \rightarrow M_1 v$$

siendo:

$$(M_1 v)(j) = \begin{cases} \psi_1(j) & \text{si } k(j)=1 \\ \psi_2(j) & \text{si } k(j)=2 \\ (bv+f)(j) & \text{si } k(j)=0 \end{cases} \quad (5)$$

e Definimos

$$K_{(j,w)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0^*w(j) \in (\theta_1(j), \theta_2(j)) \\ 1 & \text{si } 0^*w(j) = \theta_1(j) \\ 2 & \text{si } 0^*w(j) = \theta_2(j) \end{cases} \quad (6)$$

e Dada una sucesión $\{w^{\mu,\nu}, \mu \geq 0, \nu \geq 0\}$, sea $R(w^{\mu,0}, \dots, w^{\mu,\nu})$, para todo $\mu \geq 0$, una "regla de decisión" con valor en las variables lógicas 0 y 1. Para que los algoritmos propuestos sean convergentes, se supondrá que se satisface la siguiente condición:

$$\forall (\mu, \nu) \exists \bar{w}(\mu, \nu) / R(w^{\mu,0}, \dots, w^{\mu,\nu}) = 1 \quad (7)$$

siendo $\{w^{\mu,\nu}, \nu=0,1,\dots\}$ la sucesión generada por el algoritmo A0 con condición inicial $w^{\mu,0}$.

Descripción del algoritmo A1.

Algoritmo A1

Paso 0: sea $w^{0,0} \in \mathbb{R}^n$, hacer $\mu=0, \nu=0$ y empezar el procedimiento.

Paso 1: hacer $w^{\mu,\nu+1} = M_{\nu} w^{\mu,\nu}$.

Paso 2: si $w^{\mu,\nu+1} = w^{\mu,\nu}$, parar (dado que la solución exacta del problema es $\bar{w} = w^{\mu,\nu}$); si no, ir al paso 3.

Paso 3: si $R(w^{\mu,0}, \dots, w^{\mu,\nu}) = 1$, hacer $K(j) = K_{(j,w^{\mu,\nu})}$, $\forall j=1, \dots, n$ e ir al paso 4; si no hacer $\nu = \nu + 1$ e ir al paso 1.

Paso 4: calcular $\bar{w}^{\mu+1}$ punto fijo del operador M_{ν} , hacer $w^{\mu+1,0} = \bar{w}^{\mu+1}$, $\nu=0$, $\mu = \mu + 1$ e ir al paso 1.

4-CONVERGENCIA DEL ALGORITMO A1

Teorema 4.1

Si se satisface la condición (7), el algoritmo A1 converge en un número finito de pasos al punto fijo \bar{w} del operador M .

Para la demostración de este teorema necesitaremos algunas definiciones y propiedades previas.

Definiciones:

1°) A cada $w \in \mathbb{R}^n$ se le puede asociar pares de elementos (w_1, w_2) , $w_i \in \mathbb{R}^n$, $i=1,2$

tales que $w_2 - w_1 = w$

Definimos entonces:

$$J_w = \{ (w_1, w_2) / w_2 - w_1 = w \} \quad (8)$$

$$2^\circ) \hat{\psi}_2 = \psi_2, \hat{\psi}_1 = -\psi_1, \hat{f}_2 = \frac{f}{2}, \hat{f}_1 = -\frac{f}{2} \quad (9)$$

$$\hat{i} = 1 \quad \text{si } i=2$$

$$= 2 \quad \text{si } i=1.$$

3º) Definimos el operador $\hat{M}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$[\hat{M}(w_1, w_2)]_i(j) = \min\{(Bw_1 + \hat{f}_i)(j) + \hat{\psi}_i(j), (Bw_1 + \hat{f}_i)(j)\} \quad (10)$$

Propiedades del operador \hat{M}

a) Decimos que el par (u_1, u_2) es subsolución del problema: $(v_1, v_2) = \hat{M}(w_1, w_2)$ si

$$u_i \leq u_i + \hat{\psi}_i$$

$$i=1, 2$$

$$u_i \leq (Bw_1 + \hat{f}_i)$$

$[\hat{M}(w_1, w_2)]_i(j)$ es el máximo elemento de este conjunto de subsoluciones.

$$b) \quad [\hat{M}(w_1, w_2)]_2 - [\hat{M}(w_1, w_2)]_1 = Mw \quad \forall (w_1, w_2) \in J_w \quad (11)$$

Demostración:

$$\text{Si } (Mw)(j) = \psi_1(j) \Rightarrow (Bw + f)(j) \leq \psi_1(j) \Rightarrow (B(w_2 - w_1) + f)(j) \leq \psi_1(j) < \psi_2(j), \forall (w_1, w_2) \in J_w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Bw_2 - Bw_1 + \frac{f}{2} + \frac{f}{2})(j) \leq \psi_1(j) < \psi_2(j).$$

Esta última desigualdad implica el siguiente par de desigualdades:

$$(Bw_2 + \frac{f}{2})(j) < (\psi_2 + Bw_1 - \frac{f}{2})(j)$$

$$(Bw_2 + \frac{f}{2} - \psi_1)(j) \leq (Bw_1 - \frac{f}{2})(j)$$

de donde se obtiene en virtud de (10)

$$\hat{M}_2(j) = (Bw_2 + \frac{f}{2})(j)$$

$$\hat{M}_1(j) = (Bw_2 + \frac{f}{2} - \psi_1)(j) \quad (12)$$

$$\text{Luego } (\hat{M}_2 - \hat{M}_1)(j) = \psi_1(j).$$

De la misma forma, en el caso que $(Mw)(j) = \psi_2(j)$ se obtiene $(\hat{M}_2 - \hat{M}_1)(j) = \psi_2(j)$

$$\text{Si } \psi_1(j) < (Mw)(j) < \psi_2(j) = \psi_1(j) < (Bw + f)(j) < \psi_2(j) \Rightarrow \psi_1(j) < (B(w_2 - w_1) + f)(j) < \psi_2(j), \forall (w_1, w_2) \in J_w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_1(D) < (Bw_2 - Bw_1 + \frac{f}{2} + \frac{f}{2}X) < \psi_2(D).$$

Esta última desigualdad implica las siguientes desigualdades:

$$(Bw_2 + \frac{f}{2}X) < (Bw_1 - \frac{f}{2} + \psi_2 X)$$

$$(Bw_1 - \frac{f}{2}X) < (Bw_2 + \frac{f}{2} - \psi_1 X)$$

de aquí se obtiene en virtud de (10)

$$\hat{M}_2(D) = (Bw_2 + \frac{f}{2}X)$$

$$\hat{M}_1(D) = (Bw_1 - \frac{f}{2}X)$$

(13)

$$\text{de donde } (\hat{M}_2 - \hat{M}_1)(D) = (Bw + f)X.$$

□

c) Corolario

$$\text{Si } \bar{w} = M\bar{w} \Rightarrow \hat{M}J_{\bar{w}} \subset J_{\bar{w}}$$

(14)

d) \hat{M} es monótona:

$$\hat{w}_1 \geq \hat{w}_2 \Rightarrow [D\hat{M}(\hat{w}_1, \hat{w}_2)]_i \geq [D\hat{M}(\hat{w}_2, \hat{w}_2)]_i, \quad i=1,2$$

(15)

Definición:

Sea $\hat{M}_1: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$(v_1, v_2) \rightarrow ([D\hat{M}_1(v_1, v_2)]_1, [D\hat{M}_1(v_1, v_2)]_2)$$

siendo:

$$[D\hat{M}_1(v_1, v_2)]_i(D) = (Bv_i + \hat{f}_i X) \text{ si } KD \neq i$$

$$= (Bv_i + \hat{f}_i) + \hat{\psi}_i X \text{ si } KD = i$$

(16)

Propiedades del operador \hat{M}_1

$$a) [D\hat{M}_1(v_1, v_2)]_2 - [D\hat{M}_1(v_1, v_2)]_1 = [M_1(v)] \quad \forall (v_1, v_2) \in J_v$$

(17)

$$b) [D\hat{M}_1(v_1, v_2)]_1 = [M(v_1, v_2)]_1 \quad \forall (v_1, v_2) \in J_v, \quad l=K(v).$$

(18)

c) \hat{M}_1 es contractivo (por lo tanto tiene un único punto fijo).

(19)

d) \hat{M}_1 es monótona:

$$\hat{v}_1 \geq \hat{v}_2 \Rightarrow [D\hat{M}_1(\hat{v}_1, \hat{v}_2)]_i \geq [D\hat{M}_1(\hat{v}_2, \hat{v}_2)]_i.$$

(20)

e) \hat{w}_1 punto fijo de $\hat{M}_1 \Rightarrow \hat{w} = \hat{w}_2 - \hat{w}_1$ es punto fijo del operador M_1 .

(21)

f) \hat{w} punto fijo del operador $M_1 \Rightarrow$ existe único (\hat{w}_1, \hat{w}_2) tal que $\hat{w} = \hat{w}_2 - \hat{w}_1$, siendo

$$\hat{w}_1 \text{ punto fijo de } \hat{M}_1$$

(22)

Demostración de a)

Si $K=0$ entonces $K=1$ para $i=1,2$. De la definición (16) se tiene que:

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_1(x) = (Bv_1 + \hat{f}_1)x$$

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_2(x) = (Bv_2 + \hat{f}_2)x$$

entonces

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_2(x) - \hat{M}_1^i(v_1, v_2)_1(x) = (Bv_2 + \hat{f}_2 - Bv_1 - \hat{f}_1)x = (Bv + f)x = \hat{M}_1^i(v)x$$

Si $K=1$, de la definición (16) se tiene que:

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_1(x) = (Bv_2 + \hat{f}_2 - b_1)x$$

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_2(x) = (Bv_2 + \hat{f}_2)x$$

entonces

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_2(x) - \hat{M}_1^i(v_1, v_2)_1(x) = b_1x = \hat{M}_1^i(v)x$$

Análogamente si $K=2$.

Demostración de b)

Si $Kv=0$ entonces de (13) tenemos que:

$$\hat{M}_2(x) = (Bw_2 + \frac{f}{2})x$$

$$\hat{M}_1(x) = (Bw_1 - \frac{f}{2})x,$$

y en virtud de (9) y (16):

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_1(x) = (Bv_1 + \hat{f}_1)x = (Bv_1 - \frac{f}{2})x$$

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_2(x) = (Bv_2 + \hat{f}_2)x = (Bv_2 + \frac{f}{2})x$$

con lo cual $\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_1(x) = \hat{M}_1^i(v_1, v_2)_2(x)$.

Si $Kv=1$ se tiene que (ver (12)):

$$\hat{M}_2(x) = (Bw_2 + \frac{f}{2})x$$

$$\hat{M}_1(x) = (Bw_2 + \frac{f}{2} - b_1)x,$$

y en virtud de la definición (9) y de (16):

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_1(x) = (Bv_2 + \hat{f}_2 - b_1)x = (Bv_2 + \frac{f}{2} - b_1)x$$

$$\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_2(x) = (Bv_2 + \hat{f}_2)x = (Bv_2 + \frac{f}{2})x$$

Análogamente si $Kv=2$.

Entonces $\hat{M}_1^i(v_1, v_2)_1(x) = \hat{M}_1^i(v_1, v_2)_2(x)$, como queríamos demostrar.

□

5- SUCESIÓN ASOCIADA A $w^{u,v}$.

A cada $w^{u,v}$ le asociamos un par $(w_1^{u,v}, w_2^{u,v})$ y probaremos la convergencia de las sucesiones $w_i^{u,v}$, para $i=1,2$.

El siguiente esquema sintetiza dicha asociación en el desarrollo del algoritmo.

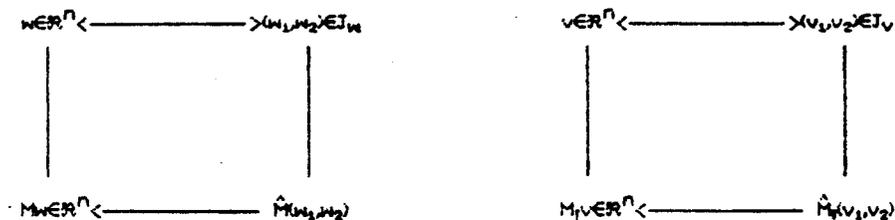
$$\text{Dada } w^{0,0} \in \mathbb{R}^n \text{ le asociamos } \rightarrow w^{0,0}_i \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } (w_1^{0,0}, w_2^{0,0}) \in J_{w^{0,0}} \quad (23)$$

$$2^o) w^{\mu, \nu+1} \rightarrow \hat{M}(w_1^{\mu, \nu}, w_2^{\mu, \nu}) \quad (24)$$

$$3^o) \hat{w}^{\mu+1} \text{ punto fijo del operador } M_T \rightarrow \hat{w}^{\mu+1}, \text{ punto fijo del operador } \hat{M}_T \quad (25)$$

$$4^o) w^{\mu, \nu} \rightarrow (\hat{w}^{\mu})_i \quad (26)$$

En virtud de (11), (17), (21) y (22) los siguientes diagramas son conmutativos:



Propiedades de las sucesiones $(w^{\mu, \nu})_i$.

$$a) (w^{\mu, \nu+1})_i = \min((Bw_1^{\mu, \nu} + \hat{f}_1) + \hat{\theta}_i, (Bw_1^{\mu, \nu} + \hat{f}_1)), \nu \geq 0 \text{ (ver (10)).} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 b) (\hat{w}^{\mu+1})_i &= (Bw_1^{\mu+1} + \hat{f}_1) \text{ si } i \neq 1 \\
 &= (Bw_1^{\mu+1} + \hat{f}_1) + \hat{\theta}_1 \text{ si } i = 1, \text{ (ver (16)).} \quad (28)
 \end{aligned}$$

c) $(\hat{w}^{\mu+1})_i$ puede ser obtenido por la siguiente iteración convergente (ver (19)):

$$(v^{\lambda+1})_i = \hat{M}_T(v_i^{\lambda}, v_2^{\lambda}), \text{ con condición inicial, } (v^0)_i = (w^{\mu, \mathcal{D}(\mu)})_i \quad (29)$$

Proposición 5.1

Con la asociación anteriormente hecha, $(w^{\mu, \nu})_i$ es decreciente para $\mu \geq 1$, $\nu \geq 0$, en el siguiente sentido:

$$(w^{\mu, \nu+1})_i \leq (w^{\mu, \nu})_i \quad (30)$$

$$(w^{\mu+1, 0})_i \leq (w^{\mu, \mathcal{D}(\mu)})_i \quad (31)$$

En efecto, por definición de $w^{\mu, 0}$, se tiene para todo $\mu \geq 1$:

$$(w^{\mu, 0})_i = (\hat{w}^{\mu})_i$$

Dado un μ , sabemos por la definición del algoritmo A1 que se cumple la siguiente igualdad:

$$(\hat{w}^{\mu})_i = (B(\hat{w}^{\mu})_i + \hat{f}_1) \quad \text{si } i \neq [w^{\mu-1, \mathcal{D}(\mu-1)}]$$

$$B(\hat{w}_1^{\mu} + \hat{f}_1 + \hat{\theta}_1) \quad \text{si } i = I(w^{\mu-1, \bar{D}(\mu-1)}).$$

Con $\nu(\mu)$ llamamos al valor de ν en donde el test del paso 3 es satisfecho,

por lo tanto

$$\begin{aligned} (w^{\mu, 1})_i &= [\hat{M}(w_1^{\mu, 0}, w_2^{\mu, 0})]_i = \min(B(w_1^{\mu, 0} + \hat{f}_1 + \hat{\theta}_1, w_2^{\mu, 0} + \hat{f}_1), B(w_1^{\mu, 0}, w_2^{\mu, 0} + \hat{f}_1)) = \\ &= \min(B(w_1^{\mu, 0} + \hat{f}_1 + \hat{\theta}_1, w_2^{\mu, 0} + \hat{f}_1), B(w_1^{\mu, 0}, w_2^{\mu, 0} + \hat{f}_1)) \leq (\hat{w}^{\mu})_i = (w^{\mu, 0})_i \end{aligned}$$

Repetiendo los pasos 1 al 3 se obtiene la sucesión $(w^{\mu, \nu})_i$, de acuerdo a la siguiente ley:

$$(w^{\mu, \nu+1})_i = [\hat{M}(w_1^{\mu, \nu}, w_2^{\mu, \nu})]_i.$$

Luego, por monotonía del operador \hat{M} (ver (15)) se obtiene que:

$$(w^{\mu, \nu+1})_i \leq (w^{\mu, \nu})_i, \quad \forall \nu \leq \bar{D}(\mu), \quad \forall \mu \geq 1.$$

Con lo que queda demostrado (30).

$$\text{Por definición } (w^{\mu+1, 0})_i = (\hat{w}^{\mu+1})_i.$$

Por definición del elemento $\hat{w}^{\mu+1}$, creado en el paso 4 es:

$$(\hat{w}^{\mu+1})_i = [\hat{M}_1(\hat{w}_1^{\mu+1}, \hat{w}_2^{\mu+1})]_i.$$

Por ser $(\hat{w}^{\mu+1})_i$ el punto fijo del operador $[\hat{M}_1(w_1, w_2)]_i$, ver (19) y (25), se tiene

$$\text{que } (\hat{w}^{\mu+1})_i = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \nu^\lambda,$$

siendo $(\nu^{\lambda+1})_i = [\hat{M}_1(\nu_1^\lambda, \nu_2^\lambda)]_i$, con condición inicial $(\nu^0)_i = (w^{\mu, \bar{D}(\mu)})_i$.

Pero

$$(w^{\mu, \bar{D}(\mu)})_i = [\hat{M}(w_1^{\mu, \bar{D}(\mu)-1}, w_2^{\mu, \bar{D}(\mu)-1})]_i,$$

además por (18)

$$[\hat{M}_1(w_1, w_2)]_i = [\hat{M}(w_1, w_2)]_i \quad \forall (w_1, w_2) \in J_w, \quad I = I(w).$$

Luego:

$$[\hat{M}(w_1^{\mu, \bar{D}(\mu)-1}, w_2^{\mu, \bar{D}(\mu)-1})]_i = [\hat{M}_1(w_1^{\mu, \bar{D}(\mu)-1}, w_2^{\mu, \bar{D}(\mu)-1})]_i, \quad I = I(w^{\mu, \bar{D}(\mu)-1})$$

por lo tanto

$$(\nu^0)_i = (w^{\mu, \bar{D}(\mu)})_i = [\hat{M}_1(w_1^{\mu, \bar{D}(\mu)-1}, w_2^{\mu, \bar{D}(\mu)-1})]_i \leq (w^{\mu, \bar{D}(\mu)-1})_i \text{ por (30),}$$

luego

$$(\nu^1)_i = [\hat{M}_1(\nu_1^0, \nu_2^0)]_i \leq [\hat{M}_1(w_1^{\mu, \bar{D}(\mu)-1}, w_2^{\mu, \bar{D}(\mu)-1})]_i = (\nu^0)_i.$$

por la monotonía de \hat{M}_1 surge que $(\nu^\lambda)_i$ es decreciente y en consecuencia:

$$(\hat{w}^{\mu+1})_i = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\nu^\lambda)_i \leq (\nu^0)_i = (w^{\mu, \bar{D}(\mu)})_i.$$

Con lo cual queda demostrado (31).

□

Demostración del Teorema 4.1.

Por la condición (7) el test del paso 3 es satisfecho al cabo de un

número finito de iteraciones (con respecto a ν) permitiendo abandonar el lazo 1-3 y generar el elemento $\hat{w}^{\mu+1}$, por lo que el teorema quedará demostrado si se prueba que esta sucesión es finita.

Por la proposición 3.1 $(\hat{w}^{\mu})_i$ es decreciente y considerando que hay solamente un número finito de posibilidades de variar $I(i, \hat{w}^{\mu})$ se puede generar sólo un número finito de valores distintos de $(\hat{w}^{\mu})_i$. Por lo tanto existe un $\bar{\mu}$ tal que $(\hat{w}^{\bar{\mu}})_i = (\hat{w}^{\bar{\mu}+1})_i$

Dado que

$$(\hat{w}^{\bar{\mu}+1})_i \leq (w^{\bar{\mu}, \nu+1})_i \leq (w^{\bar{\mu}, \nu})_i \leq (w^{\bar{\mu}, 0})_i = (\hat{w}^{\bar{\mu}})_i$$

se tiene que $(w^{\bar{\mu}, 1})_i = (w^{\bar{\mu}, 0})_i$, luego en virtud de (11) $w^{\bar{\mu}, 1} = w^{\bar{\mu}, 0}$ lo que implica que para el par de índices $\mu = \bar{\mu}$, $\nu = 0$ el test del paso 2 es satisfecho, encontrándose el punto fijo del operador M.

□

6- ANÁLISIS DE DIFERENTES REGLAS DE DECISIÓN

Regla R1

Sea $\Gamma: \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{N}$, entonces definimos

$$R1(w^{\mu, 0}, \dots, w^{\mu, \nu+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \geq \Gamma(\mu) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es obvio que para esta regla se satisface la condición (7).

Regla R2

$$R2(w^{\mu, 0}, \dots, w^{\mu, \nu+\hat{\alpha}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } I(i, w^{\mu, \nu}) = I(i, w^{\mu, \nu+\hat{\alpha}}), \forall i, 1 \leq i \leq \hat{\alpha} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El algoritmo A1 se modificaría de la siguiente manera:

Descripción del Algoritmo A1

Algoritmo A1

Paso 0: sean $\mu=0$, $\nu=0$, $w^{\mu, \nu} \in \mathcal{X}^n$, $\hat{\alpha} \in \mathcal{N}$ arbitrarios.

Paso 1: haga $p=0$

Paso 2: haga $w^{\mu, \nu+1} = M w^{\mu, \nu}$

Paso 3: haga $\hat{I}(i) = I(i, w^{\mu, \nu})$, $\forall i$

Paso 4: si $w^{\mu, \nu+1} = w^{\mu, \nu}$, parar (dado que la solución exacta del problema es $\bar{w} = w^{\mu, \nu}$); si no, ir al paso 5.

Paso 5: Si $\nu \geq 1$ y $k(w^{\mu, \nu}) = k(w^{\mu, \nu-1})$ entonces hacer $p=p+1$, e ir al paso 6; si no hacer $p=0$, $\nu=\nu+1$, e ir al paso 2.

Paso 6: si $p \geq \hat{p}$ entonces calcular $\hat{w}^{\mu+1}$ punto fijo del operador M_p , luego hacer $w^{\mu+1, 0} = \hat{w}^{\mu+1}$, $\nu=0$, $\mu=\mu+1$ e ir al paso 1; si no: hacer $\nu=\nu+1$ e ir al paso 2.

Proposición 6.1.

Si son válidas las siguientes hipótesis:

$$\psi_2(j) = \bar{w}(j) \Rightarrow (B\bar{w} + fX(j)) > \psi_2(j) \quad (32)$$

$$\psi_1(j) = \bar{w}(j) \Rightarrow (B\bar{w} + fX(j)) < \psi_1(j) \quad (33)$$

Entonces la condición (7) se cumple para la regla R2.

Tenemos que demostrar que para todo μ el test del paso 6 es satisfecho después de un número finito de iteraciones entre los pasos 1 al 5, generándose un nuevo elemento $\hat{w}^{\mu+1}$.

En efecto, si por el absurdo suponemos que existe $\bar{\mu}$ tal que para ese índice el test del paso 6 nunca es satisfecho, el algoritmo generaría una sucesión infinita $w^{\bar{\mu}, \nu}$. Esta sucesión, en virtud de la definición del paso 2, es idéntica a la generada por el algoritmo A0, por lo que en base al teorema 2.1 puede asegurarse que converge a \bar{w} . Para cada índice j puede darse una de las tres condiciones siguientes:

i) $k(j, \bar{w}) = 0$

ii) $k(j, \bar{w}) = 1$

iii) $k(j, \bar{w}) = 2$

En el caso i) se tiene que $\bar{w}(j) \in (\psi_1(j), \psi_2(j))$, luego de (4) se deduce que existe ν_0 tal que para todo $\nu \geq \nu_0$, $w^{\bar{\mu}, \nu}(j) \in (\psi_1(j), \psi_2(j))$, por lo que $k(j, w^{\bar{\mu}, \nu_0+p}) = 0$, para todo $p \geq 0$.

En el caso ii) es $\bar{w}(j) = \psi_1(j)$, por lo que en virtud de (4) se tiene:

$$\lim_{\nu} (Bw^{\bar{\mu}, \nu} + fX(j)) = (B\bar{w} + fX(j)) < \psi_1(j), \text{ entonces para todo } \nu \geq \nu_1 \quad (Bw^{\bar{\mu}, \nu} + fX(j)) < \psi_1(j), \text{ lo que implica que para todo } \nu \geq \nu_1 \quad k(j, w^{\bar{\mu}, \nu}) = 1.$$

El caso iii) es totalmente análogo al ii).

Como consecuencia de lo anteriormente probado después de un número finito de iteraciones $k(j, w)$ permanece constante, por lo que se satisface el test del

paso 6 generándose un nuevo elemento $\hat{w}^{\mu+1}$.

Regla R3

Sea $\epsilon_U = K \left| w^{U,U} - w^{\mu,U-1} \right|$, $K \geq \frac{27}{1-\gamma}$, $\beta \in \mathbb{N}$ fijo.

Recordando que:

$$\begin{aligned}
 (M_1 w^{\mu,U})(j) &= \begin{cases} \psi_1(j) & \text{si } K(j)=1 \\ \psi_2(j) & \text{si } K(j)=2 \\ (Bw^{\mu,U} + fX)(j) & \text{si } K(j)=0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

introducimos la notación:

$$I_{\epsilon_U}(j, w^{\mu,U}) = \left\{ i \mid \exists i \text{ que satisface } K(i)=i \text{ con } |w^{\mu,U+1}(j) - (M_1 w^{\mu,U})(j)| < \epsilon_U \right\} \quad (34)$$

Definimos entonces:

$$R3(w^{\mu,0}, \dots, w^{\mu,U+\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } I_{\epsilon_U}(i, w^{\mu,U}) = I_{\epsilon_U}(i, w^{\mu,U+\beta}), \forall 1 \leq i \leq \hat{n}, 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veamos que se cumple la condición (7).

De la misma forma en que se hizo la demostración de la proposición 6-1 debe probarse la imposibilidad de construir una sucesión infinita

$$(w^{\mu,U}, \nu=1, \dots), \text{ con el correspondiente } R3(w^{\mu,0}, \dots, w^{\mu,U}) = 0. \quad (35)$$

Si se genera una sucesión infinita para algún \hat{n} , en base al teorema 2.1, esta converge a \bar{w} . Si se verifican las hipótesis de la proposición 6.1, o sea:

$$\psi_2(j) = \bar{w}(j) \Rightarrow (B\bar{w} + fX)(j) > \psi_2(j)$$

$$\psi_1(j) = \bar{w}(j) \Rightarrow (B\bar{w} + fX)(j) < \psi_1(j),$$

se tiene; (razonando como en la demostración de la proposición 6.1) que para cada j puede darse una de las tres condiciones siguientes:

i) Si $K(j, \bar{w}) = 0$, entonces $I_{\epsilon_U}(j, w^{\mu,U+\beta}) = \{0\}$, para todo $\nu > \nu_0$, $\beta \geq 0$.

ii) Si $K(j, \bar{w}) = 1$, entonces $I_{\epsilon_U}(j, w^{\mu,U+\beta}) = \{1\}$, para todo $\nu > \nu_1$, $\beta \geq 0$.

iii) En forma análoga si $K(j, \bar{w}) = 2$.

Luego resta probar que (7) es válida para los casos en que las hipótesis de la proposición 6.1 no se satisfacen, es decir cuando suceda que:

$$\psi_2(j) = \bar{w}(j) \wedge (B\bar{w} + fX)(j) = \psi_2(j)$$

$$\psi_1(j) = \bar{w}(j) \wedge (B\bar{w} + fX)(j) = \psi_1(j)$$

Lo probaremos para el primer caso siendo análogo para el segundo.

Por la continuidad del operador M, para todo $\nu \geq \nu_2$, $I_{\epsilon_\nu}(j_{\nu}^{\mu, \nu})$ está contenido en el conjunto $\{0, 2\}$.

Veamos que $2 \in I_{\epsilon_\nu}(j_{\nu}^{\mu, \nu}) \forall \nu \geq \nu_2$.

En efecto como M es una contracción:

$$\|Mw^{\mu, \nu-1} - M\bar{w}\| \leq \gamma \|w^{\mu, \nu-1} - \bar{w}\|$$

Aplicando la desigualdad triangular:

$$\|w^{\mu, \nu} - \bar{w}\| \leq \gamma \|w^{\mu, \nu} - \bar{w}\| + \gamma \|w^{\mu, \nu-1} - w^{\mu, \nu}\|$$

de esta última desigualdad:

$$(1-\gamma) \|w^{\mu, \nu} - \bar{w}\| \leq \gamma \|w^{\mu, \nu-1} - w^{\mu, \nu}\| \quad (36)$$

y entonces

$$\begin{aligned} |w^{\mu, \nu}(j) - \bar{w}_2(j)| &= |w^{\mu, \nu}(j) - \bar{w}(j)| \leq \|w^{\mu, \nu} - \bar{w}\| \leq \frac{\gamma}{(1-\gamma)} \|w^{\mu, \nu-1} - w^{\mu, \nu}\| < \\ &< K \|w^{\mu, \nu-1} - w^{\mu, \nu}\| \end{aligned} \quad (37)$$

y en consecuencia, por (34) $2 \in I_{\epsilon_\nu}(j_{\nu}^{\mu, \nu}) \forall \nu \geq \nu_2$.

Veamos ahora que $0 \in I_{\epsilon_\nu}(j_{\nu}^{\mu, \nu}) \forall \nu \geq \nu_2$.

$$\begin{aligned} \|Bw^{\mu, \nu} + f - w^{\mu, \nu+1}\| &= \|B(w^{\mu, \nu} - \bar{w}) + \bar{w} - w^{\mu, \nu+1}\| \leq \gamma \|w^{\mu, \nu} - \bar{w}\| + \|w^{\mu, \nu+1} - \bar{w}\| \leq \\ &\leq 2\gamma \|w^{\mu, \nu} - \bar{w}\| \end{aligned}$$

De esta desigualdad y (36):

$$\begin{aligned} |KBw^{\mu, \nu} + f - w^{\mu, \nu+1}(j)| &\leq \|Bw^{\mu, \nu} + f - w^{\mu, \nu+1}\| \leq \\ &\frac{2\gamma^2}{(1-\gamma)} \|w^{\mu, \nu-1} - w^{\mu, \nu}\| \leq K \|w^{\mu, \nu-1} - w^{\mu, \nu}\| \end{aligned} \quad (38)$$

y en consecuencia, por (34) $0 \in I_{\epsilon_\nu}(j_{\nu}^{\mu, \nu}) \forall \nu \geq \nu_2$.

Queda así demostrado que para todos los casos posibles la familia de índices $I_{\epsilon_\nu}(j_{\nu}^{\mu, \nu})$ se repite a partir de un $\hat{\nu}$ por lo que $R_3(w^{\mu, 0}, \dots, w^{\mu, \hat{\nu} + \hat{\nu}}) = 1$ lo que demuestra la imposibilidad de construir la sucesión (35).

Regla R4

Sea $\varepsilon > 0$ y

$$\varepsilon_U = \varepsilon \int w^{u,v} - w^{u,v-1} \Gamma, \quad r \in (0,1).$$

Definimos entonces:

$$R4(w^{u,v}, \dots, w^{u,v+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |w^{u,v+1} - w^{u,v}| \leq \varepsilon_U \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La condición (7) es satisfecha $\forall v \geq \bar{v}$ siendo $\bar{v} / |w^{u,\bar{v}} - w^{u,\bar{v}-1}| < \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_U}\right)^{\frac{1}{1-r}}$

Regla R5

$$\text{Sean } \varepsilon_U = \int w^{u,v} - w^{u,v-1} \Gamma, \quad r \in (0,1),$$

$$I_{\varepsilon_U}(j, w^{u,v}) = \left\{ i / \exists i \text{ que satisface } R3 = i \text{ con } |w^{u,v+1}(j) - (w^{u,v} X)(j)| < \varepsilon_U \right\}$$

$\hat{\delta} \in \mathcal{N}$ fijo.

Definimos entonces:

$$R5(w^{u,v}, \dots, w^{u,v+\hat{\delta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } I_{\varepsilon_U}(j, w^{u,v}) = I_{\varepsilon_U}(j, w^{u,v+\hat{\delta}}) \text{ con } 1 \leq j \leq \hat{\delta}. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como en los casos anteriores se debe probar la imposibilidad de generar una sucesión infinita:

$$(w^{u,v}, v=1, \dots), \text{ con el correspondiente } R5(w^{u,v}, \dots, w^{u,v}) = 0.$$

En el caso en que se cumplan las hipótesis de la proposición 6.1, la demostración es idéntica a la realizada en el caso de la regla R3. Para demostrar que (7) es válida cuando $\psi_2(j) = \bar{w}(j) \wedge (B\bar{w} + fX)(j) = \psi_2(j)$, (el caso $\psi_1(j) = \bar{w}(j) \wedge (B\bar{w} + fX)(j) = \psi_1(j)$, es totalmente análogo), se sigue el mismo razonamiento realizado en la regla R3. Para demostrar que

$$|w^{u,v}(j) - \psi_2(j)| < \varepsilon_U \quad \text{y} \quad |KBw^{u,v} + fX(j) - w^{u,v+1}(j)| < \varepsilon_U$$

(ver (37) y (38)),

hay que tener en cuenta que:

$$\frac{\gamma}{(1-\gamma)} \leq \int w^{u,v-1} - w^{u,v} \Gamma^{-1}, \quad \forall v \geq v_0$$

7- EJEMPLOS

Mostramos en las siguientes tablas los resultados en cuanto a tiempo de cómputo y número de iteraciones de los algoritmos A0 y A1 con regla de detención R3. La tabla 1 corresponde a un problema donde $\nu=36$ y la tabla 2 a uno donde $\nu=64$.

TABLA 1

ϵ	tiempos				iteraciones			
	10^{-3}		10^{-6}		10^{-3}		10^{-6}	
	A1	A0	A1	A0	A1	A0	A1	A0
1.0	19"	1'14"	19"	35"	5	22	5	51
0.4	21"	2'56"	21"	1'23"	6	57	6	124
0.2	25"	5'52"	25"	2'53"	8	123	8	253

TABLA 2

ϵ	tiempos		iteraciones	
	A1	A0	A1	A0
10^{-3}	17"	1'8"	5	86
10^{-6}	17"	1'38"	5	125
10^{-7}	17"	2'8"	5	165
10^{-9}	17"	2'37"	5	205

8- CONCLUSIONES

Cuando la constante de contracción del operador M es muy proxima a 1, el algoritmo A0 puede converger muy lentamente. De allí la necesidad de

desarrollar procedimientos de aceleración.

El algoritmo aquí presentado, como puede observarse en los resultados sintetizados en las tablas 1 y 2; permite reducir el tiempo de cómputo en factores de hasta 14 veces en los problemas allí tratados. Esta reducción depende esencialmente del problema, es decir del factor γ , y es mayor cuanto más cercano a 1 es γ . Puede observarse asimismo que a partir de un ϵ determinado, el algoritmo A1 produce la ϵ -solución aproximada (que en particular es la solución exacta) en el mismo tiempo, contrariamente al algoritmo A0, cuyo tiempo de cómputo es proporcional a $-\ln \epsilon$. Las propiedades de convergencia del algoritmo A1 son independientes del punto inicial $w^{(0)}$ elegido; sin embargo, el tiempo de cómputo puede disminuir aún más con una adecuada elección del punto mencionado [6].

El algoritmo se basa en resolver ciertos sistemas lineales a partir de puntos o estructuras (el vector l mencionado en la regla 2) determinados a través de una aplicación sucesiva del algoritmo A0. La elección de interrumpir el algoritmo A0 y resolver los mencionados sistemas lineales depende de reglas de decisión variadas, algunas de las cuales han sido presentadas en el párrafo 6, junto con la demostración de la propiedad de convergencia. Estas reglas generalizan la regla de "repetición de controles" utilizada inicialmente en [5] y permiten resolver problemas donde las condiciones restrictivas que en [5] garantizan la convergencia, no son verificadas.

El uso de estas reglas, y extensiones de los algoritmos presentados aquí y en [5], realizados para abordar la resolución de problemas de punto fijo más generales, son considerados en [9].

REFERENCIAS

- [1] ARAGONE, L. S. - GONZALEZ, R. L. V. - TIDBALL, M. M. "Juegos diferenciales de suma nula con tiempos de detención". 1989. En preparación.
- [2] ARAGONE, L. S., GONZALEZ, R. L., TIDBALL, M. M. "Solución numérica de juegos diferenciales de suma nula con controles monotónicos". Anales del Séptimo Congreso Brasileiro de Automática. 15-19 Agosto 1988. São José Dos Campos-Brasil. Vol 2, pp. 1078-1083.
- [3] BELBAS, E. A., MAYERGOYZ, I. D., "Applications of fixed-point methods to discrete variational and quasi-variational inequalities". Numerische

Mathematik, Vol 51, pp. 631-654, 1987.

[4] GARRONI, M. G. - VIVALDI, M. A: "Bilateral inequalities and implicit unilateral system of the non-variational type", Manuscripta Mathematica, 33, pp 177-215, 1980.

[5] GONZALEZ, R. - SAGASTIZABAL, C: "On subsolutions and supersolutions of discrete Hamilton-Jacobi-Bellman equations: An accelerated algorithm to solve optimal control problems", Rapport de Recherche, N° 1014, INRIA, 1989.

[6] GONZALEZ, R. - TIDBALL, M: "Fast solution of general non-linear fixed point problems". En preparación.

[7] NAKOULIMA, O: "Etude d'une inéquation variationnelle bilaterale et d'un système d'inéquations quasi-variationnelles unilatérales associé". Thèse 3^{ème} Cycle, Université de Bordeaux I 1977.

[8] ELTARAZI, M. N. "On a monotony-preserving accelerator for the successive approximations method " IMA Journal of Numerical Analysis, Vol 6, pp. 439-446, 1986

[9] GONZALEZ, R. et alts: Trabajo en preparación.