

PROPUESTA SOBRE DISCRETIZACION DE ESTRUCTURAS  
DE BARRAS, SOLICITADAS POR ACCIONES DINAMICAS

Oscar Möller

Marcelo Rubinstein

Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras.

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.

Universidad Nacional de Rosario.

Rosario - Argentina.

RESUMEN

Se presenta en este trabajo un método para analizar estructuras de barras solicitadas por acciones dinámicas, en donde se tiene en cuenta la verdadera distribución de los efectos dinámicos externos, las fuerzas de inercia y de amortiguamiento.

Esto permite una importante disminución en la cantidad de elementos en que se discretiza la estructura, con el consiguiente ahorro de esfuerzo computacional.

ABSTRACT

It is presented in this paper a method to analyse bars structures acted by dynamic actions, where it is taken into account of the real distribution of the external dynamic effects, the inertia and damping forces.

This permit un important reduction in the number of elements in which the structure is discretized, with the consequent economy of computational effort.

## INTRODUCCION

En el análisis dinámico de estructuras de barras, resulta usual considerar las ecuaciones completas del movimiento de cada elemento:  $\{P\} = [k] \{v\} + [m] \{\ddot{v}\} + [c] \{\dot{v}\} - \{P_0\}$ , a partir de las cuales se plantea el sistema de ecuaciones de la estructura, para finalmente calcular las solicitaciones en extremos de elementos a partir de la ecuación incompleta:  $\{P\} = [k] \{v\}$ .

Este procedimiento, que equivale de algún modo, a concentrar fuerzas de origen dinámico en los nodos, da resultados aceptables sólo a partir de un cierto grado de refinamiento en la discretización.

En este trabajo se muestra la conveniencia de calcular solicitaciones en elementos a partir de la ecuación completa. Así queda como única causa de error, debida a la discretización, la utilización de la función de forma aproximada, y resulta posible obtener resultados satisfactorios disminuyendo sustancialmente el número de elementos, con el consiguiente ahorro de esfuerzo computacional.

Finalmente se dan los lineamientos necesarios para adaptar la propuesta al método de análisis modal espectral, haciendo la reserva que en este caso la discretización no deberá eliminar de la solución la contribución de modos de vibración significativos.

## ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En la fig.1 se muestra la barra con condiciones de borde arbitrarias, sujeta a acciones dinámicas transversales y axiales, y cuyas propiedades son:  $EI(x)$ : rigidez a flexión,  $EA(x)$ : rigidez axial,  $m(x)$ : masa por unidad de longitud,  $c(x)$ : parámetro de amortiguamiento externo con respecto a la velocidad de desplazamiento, y  $c_s$ : parámetro de amortiguamiento interno con respecto a la velocidad de deformación.

A partir de la fig.1(b),(c) se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales de equilibrio en dirección transversal y axial [1] :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = p_t \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} + c_s A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} = p_a \quad (2)$$

En estas expresiones no se han tenido en cuenta: el efecto de la fuerza axial sobre la flexión transversal, las deformaciones por corte ni la inercia rotacional de la sección.

La solución de las ecuaciones (1) y (2), es decir  $w(x,t)$ ,  $u(x,t)$  se obtiene adicionando la contribución debida a las cargas actuantes sobre la barra con extremos fijos y la contribución debida a los desplazamientos de los extremos con la barra sin carga.

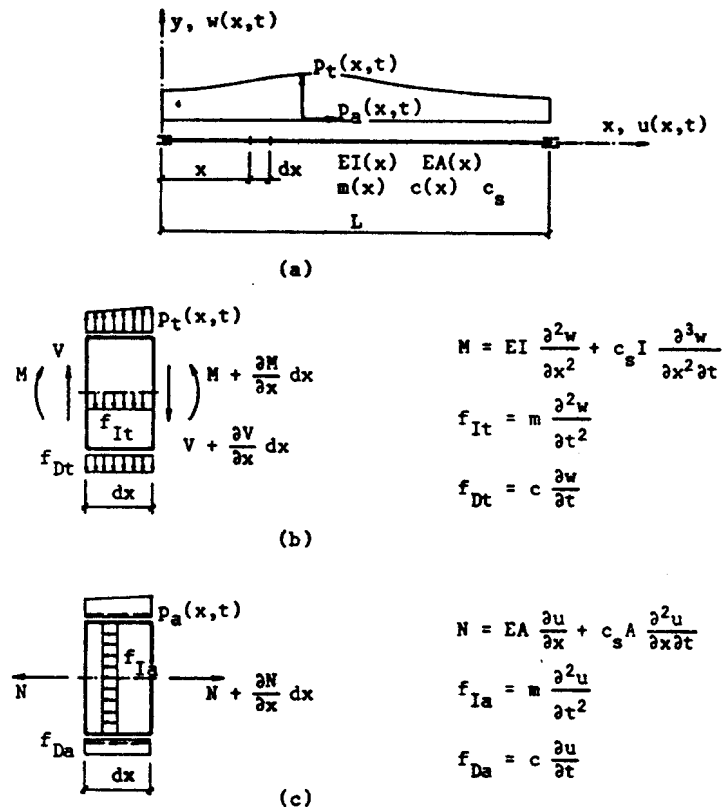


Fig. 1 Barra de pórtico plano: (a) ejes de referencia, propiedades y acciones dinámicas; (b) fuerzas transversales sobre un elemento diferencial; (c) fuerzas axiales sobre un elemento diferencial.

DESPLAZAMIENTOS

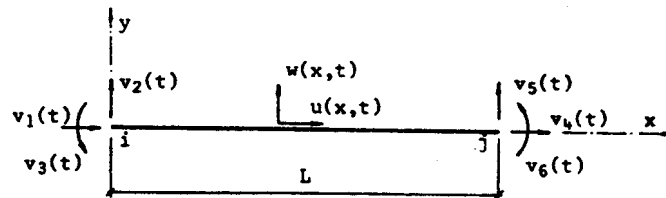


Fig. 2 Campo de desplazamientos y grados de libertad en nodos extremos.

a) Contribución debida a las cargas actuantes sobre la barra con extremos fijos:

a-1 Cargas transversales a la barra:

La solución es obtenida aplicando el método de superposición modal [1],[2],[3], para lo cual es necesario resolver previamente el problema de vibraciones libres no amortiguado asociado:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

Solución por separación de variables

$$w(x,t) = \phi(x) Y(t) \quad (4)$$

resulta:

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \text{sen } \omega t + Y(0) \text{cos } \omega t \quad (5)$$

$$\phi(x) = A_1 \text{sen } ax + A_2 \text{cos } ax + A_3 \text{senh } ax + A_4 \text{cosh } ax \quad (6)$$

donde:  $\omega$ : frecuencia angular de vibración

$$a^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (7)$$

$A_1, A_2, A_3, A_4$ : constantes que dependen de las condiciones de borde.

Para el caso de extremos fijos:  $w(0,t) = w'(0,t) = w(L,t) = w'(L,t) = 0$  se obtiene la forma genérica de los modos de vibración

$$\phi(x) = A_1 [ \text{sen } ax - \text{senh } ax - C ( \text{cos } ax - \text{cosh } ax ) ] \quad (8)$$

$$\text{con } C = \frac{\text{sen } aL - \text{senh } aL}{\text{cos } aL - \text{cosh } aL}$$

y la ecuación de frecuencias

$$\text{cos } aL \cdot \text{cosh } aL = 1 \quad (9)$$

de donde  $aL = 4.7300 ; 7.8532 ; 10.9956 ; 14.1372 ; \text{etc.}$

La solución de la ecuación (1) se expresa como combinación lineal de los modos de vibración:

$$w_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) Y_n(t) \quad (10)$$

reemplazando en (1) y aplicando propiedades de ortogonalidad resulta:

$$\ddot{Y}_n(t) + 2 \xi_n \omega_n \dot{Y}_n(t) + \omega_n^2 Y_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad (11)$$

donde:

$$M_n = \int_0^L \phi_n^2(x) m dx = m L \left( \frac{\text{sen } a_n L - \text{senh } a_n L}{\cos a_n L - \cosh a_n L} \right)^2 \quad (12)$$

$$P_n(t) = \int_0^L \phi_n(x) p(x,t) dx \quad (13)$$

$$\xi_n = \frac{a_0}{2 \omega_n} + \frac{a_1 \omega_n}{2} \quad \text{con } c(x) = a_0 m(x) \quad (14)$$

$$c_s = a_1 E$$

Finalmente, para condiciones iniciales de reposo y  $p(x,t) = p(x) f(t)$ , resulta:

$$w_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\int_0^L \phi_n(x) p(x) dx}{M_n \omega_{Dn}} \cdot \int_0^t f(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \text{sen } \omega_{Dn} (t-\tau) d\tau \quad (15)$$

a-2 Cargas axiales a la barra :

La solución se encontraría procediendo de manera análoga a la empleada para cargas transversales. Se obtiene  $u_0(x,t)$ , el cual no se ha desarrollado en este trabajo.

b) Contribución debida a los desplazamientos de los extremos con la barra sin carga:

Para el campo de desplazamientos se proponen las siguientes expresiones:

$$w(x,t) = \left( \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \right) v_2(t) + \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \right) v_3(t) +$$

$$+ \left( -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \right) v_5(t) + \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right) v_6(t) \quad (16)$$

$$u(x,t) = \left( 1 - \frac{x}{L} \right) v_1(t) + \frac{x}{L} v_4(t) \quad (17)$$

Las expresiones (16) y (17) corresponden a la solución exacta para acciones estáticas [1],[4], pero sólo aproximadas para el problema dinámico, ya que no corresponden a la solución de las ecuaciones homogéneas asociadas a (1) y (2).

c) Finalmente el campo de desplazamientos, velocidades y aceleraciones se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} = [N] \{v\} + \begin{Bmatrix} \dot{w}_0 \\ \dot{u}_0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} = [N] \{\ddot{v}\} + \begin{Bmatrix} \ddot{w}_0 \\ \ddot{u}_0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} = [N] \{\dot{v}_t\} + \begin{Bmatrix} \dot{w}_0 \\ \dot{u}_0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

donde  $\{\dot{v}_t\} = \{\ddot{v}\} + [i] \ddot{v}_g$ , con  $\ddot{v}_g(t)$ : aceleración de los apoyos

### EQUILIBRIO

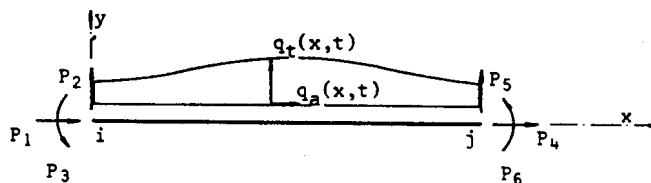


Fig. 3 Acciones sobre la barra

En la fig.3 se tiene:

$$q_t(x,t) = p_t(x,t) - m(x) \ddot{w}(x,t) - c(x) \dot{w}(x,t) \quad (21)$$

$$q_a(x,t) = p_a(x,t) - m(x) \ddot{u}(x,t) - c(x) \dot{u}(x,t) \quad (22)$$

La condición de equilibrio es obtenida aplicando el principio de los desplazamientos virtuales.

a) Trabajo virtual interno

$$\bar{T}_i = \int_0^L M \delta d\phi + N \delta d\Delta = \int_0^L \begin{Bmatrix} \delta d\phi \\ \delta d\Delta \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix} dx \quad (23)$$

$$d\phi = w'' dx \quad \delta d\phi = \delta w'' dx, \quad M = EI w''$$

$$d\Delta = u' dx \quad \delta d\Delta = \delta u' dx, \quad N = EA u'$$

Teniendo en cuenta que los esfuerzos internos M, N asociados a la elástica de la barra con extremos fijos aportan trabajo interno nulo, debido a que es nulo el correspondiente trabajo externo, luego se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta d\phi \\ \delta d\Delta \end{Bmatrix}^T = \{\delta v\}^T [B]^T dx \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix} = [D] [B] \{v\} \quad (25)$$

$$\bar{T}_i = \{\delta v\}^T \left[ \int_0^L [B]^T [D] [B] dx \right] \{v\} = \{\delta v\}^T [k] \{v\} \quad (26)$$

b) Trabajo virtual externo

b-1 Cargas dinámicas

$$\begin{aligned} \bar{T}_e &= \int_0^L p_t(x,t) \delta w \, dx + p_a(x,t) \delta u \, dx \\ &= \{\delta v\}^T \int_0^L [N]^T \left\{ \begin{matrix} p_t(x,t) \\ p_a(x,t) \end{matrix} \right\} dx = \{\delta v\}^T \{P_{0c}\} \end{aligned} \quad (27)$$

b-2 Fuerzas de inercia

$$\begin{aligned} \bar{T}_e &= \int_0^L -m \ddot{w} \delta w \, dx - m \ddot{u} \delta u \, dx \\ &= \{\delta v\}^T \left[ - \int_0^L [N]^T m [N] \, dx (\{\ddot{v}\} + \{i\} \ddot{v}_g) - \int_0^L [N]^T m \left\{ \begin{matrix} \ddot{w}_0 \\ \ddot{u}_0 \end{matrix} \right\} dx \right] \\ &= \{\delta v\}^T \left[ - [m] \{\ddot{v}\} - [m] \{i\} \ddot{v}_g - \{P_{0I}\} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

b-3 Fuerzas de amortiguamiento

$$\begin{aligned} \bar{T}_e &= \int_0^L -c \dot{w} \delta w \, dx - c \dot{u} \delta u \, dx \\ &= \{\delta v\}^T \left[ - \int_0^L [N]^T c [N] \, dx \{\dot{v}\} - \int_0^L [N]^T c \left\{ \begin{matrix} \dot{w}_0 \\ \dot{u}_0 \end{matrix} \right\} dx \right] \\ &= \{\delta v\}^T \left[ - [c] \{\dot{v}\} - \{P_{0D}\} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

donde en general:  $[c] = \alpha [m] + \beta [k]$  (30)

b-4 Fuerzas en extremos de barra

$$\bar{T}_e = \{\delta v\}^T \{P\} \quad (31)$$

Los vectores  $\{P_{0c}\}$ ,  $\{P_{0I}\}$ ,  $\{P_{0D}\}$ , que corresponden a las fuerzas equivalentes sobre los nodos extremos de barra debido a las cargas actuales sobre la barra, en lugar de evaluarlos con las integrales indicadas en (27),(28),(29), en las que intervienen las funciones de forma aproximadas  $[N]$ , se calculan a partir de la solución exacta (10). Siendo:

$$\{P_0\} = \{P_{0c}\} - \{P_{0I}\} - \{P_{0D}\} \quad (32)$$

y teniendo en cuenta sólo cargas transversales a la barra, será:

$$\begin{aligned} P_{01} &= P_{0u} = 0 \\ P_{02} &= EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3 \phi(0)}{dx^3} Y_n(t) \end{aligned} \quad (33)$$

etc.

c) El principio de los desplazamientos virtuales:

$$\bar{T}_i = \bar{T}_e \quad (34)$$

resulta:

$$\begin{aligned} \{\delta v\}^T [k] \{v\} &= \{\delta v\}^T \{P_0\} - \{\delta v\}^T [m] \{\ddot{v}\} - \{\delta v\}^T [m] \{i\} \ddot{v}_g \\ &- \{\delta v\}^T [c] \{\dot{v}\} + \{\delta v\}^T \{P\} \end{aligned} \quad (35)$$

y por ser el vector  $\{\delta v\}$  arbitrario, se obtiene:

$$\{P\} = [k] \{v\} + [m] \{\ddot{v}\} + [c] \{\dot{v}\} - \{P_0\} + [m] \{i\} \ddot{v}_g \quad (36)$$

Las fuerzas  $\{P\}$  convenientemente rotadas y cambiadas de signo, se ensamblan como acciones sobre nodos, que junto con las cargas directamente aplicadas sobre ellos, forman el sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura.

#### ESFUERZOS INTERNOS FINALES

El sistema de ecuaciones de la estructura se resuelve para cada instante de tiempo, utilizando algún método de integración directa paso a paso [5] (Newmark, Wilson- $\theta$ , etc.), obteniéndose los desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales.

Luego se deben calcular los esfuerzos internos en extremos de barra  $\{P\}$  con la expresión completa (36), y la variación de dichos esfuerzos a lo largo de la barra a partir de la configuración de equilibrio mostrada en la fig.3.

Se debe notar que el cálculo de los esfuerzos finales en extremos de barra a partir de la expresión incompleta:

$$\{P\} = [k] \{v\} \quad (37)$$

usualmente utilizada en la bibliografía [1],[4], corresponde a la solución de un problema con cargas equivalentes concentradas en los nodos, y en donde se obtienen resultados aceptables sólo a partir de una densa discretización, como se muestra en los siguientes ejemplos.

#### EJEMPLOS

Ejemplo N°1:

Se trata de una viga de 10m de luz, simplemente apoyada, solicitada por una aceleración vertical en ambos apoyos  $\ddot{v}(t) = 0.02 (5\pi)^2 \text{ sen } 5\pi t$ , y cuyas propiedades son:  $E = 3 \cdot 10^4 \text{ KN/m}^2$ ,  $A^B = 0.3\text{m}^2$ ,  $I = 0.025\text{m}^4$ ,  $\xi = 0.05$ . Se resolvió para cuatro discretizaciones diferentes con integración directa paso a paso con  $\Delta t = 0.01\text{seg}$ .

En la fig.4 se muestran los resultados para estado de régimen en un instante de amplitud máxima, en donde se representan los valores obtenidos con la solución completa (36) y con la incompleta (37).

Acceptando los resultados de la discretización (a) como "exactos" los cuales fueron verificados con solución analítica [2], se observa claramente como a medida que disminuye el número de elementos, la



solución incompleta se aparta de los valores "exactos", hasta obtener resultados totalmente inaceptables para los casos (c) y (d). Sin embargo la solución completa (36) mantiene los resultados casi exactos, notándose recién una diferencia de 6% para la discretización (d) de un sólo elemento, debido a la aproximación en la solución de la homogénea (16).

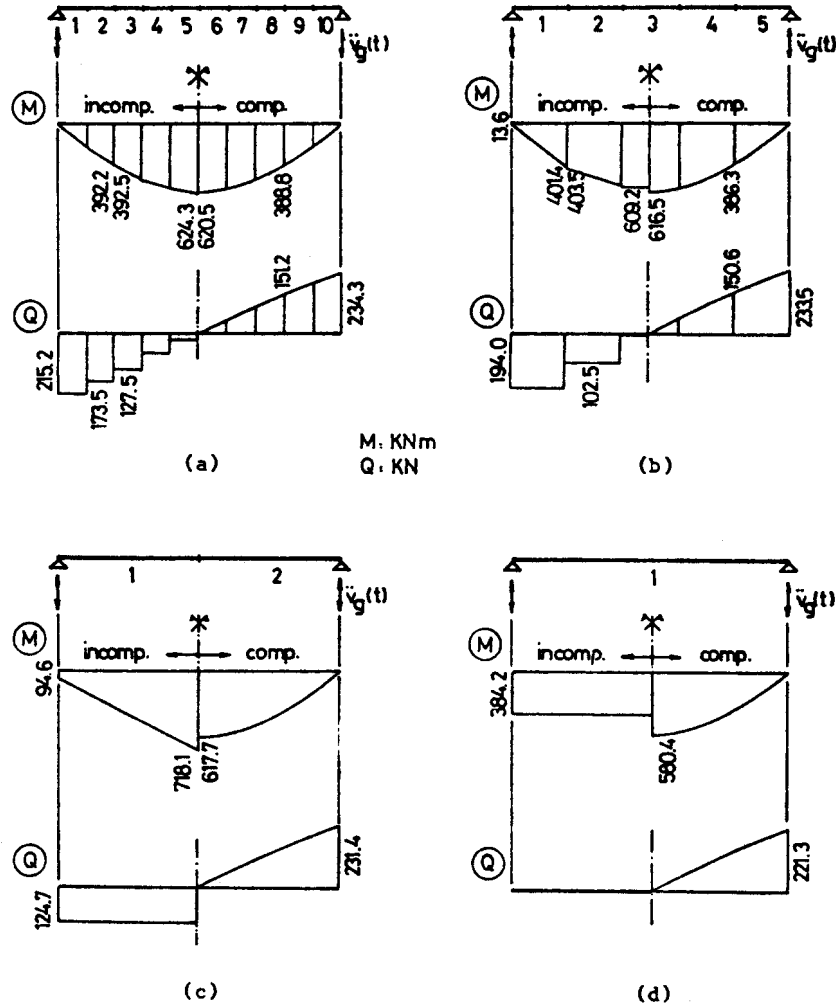


Fig. 4 Resultados de momento flector y esfuerzo de corte para las cuatro discretizaciones del ej.1

Ejemplo N°2:

Es un pórtico solicitado por una aceleración vertical en los apoyos  $\ddot{v}(t) = 0.25g \text{ sen } 100t$ , cuyas dimensiones y características se muestran en la fig.5, conjuntamente con los resultados de momentos flectores obtenidos para cuatro discretizaciones con la solución completa (36) e incompleta (37).

En dichos resultados se observa nuevamente que a medida que disminuye la cantidad de elementos, la solución incompleta se hace inaceptable. Con la solución completa, hasta el caso (c) los valores son muy aproximados, advirtiéndose diferencias significativas, del orden del 23% para el caso (d).

Variando el grado de empotramiento de la viga, mediante la rigidización o flexibilización de las columnas, y variando la frecuencia de la excitación, acercándola y alejándola de la frecuencia fundamental de vibración vertical se observa que: cuanto más cerca esté la viga del caso simplemente apoyado y la excitación alejada de la frecuencia propia, el polinomio cúbico (16) aproxima mejor a la solución correcta y se puede discretizar la viga con un sólo elemento. Cuando la viga está más empotrada en las columnas y la frecuencia de excitación se acerca a la frecuencia propia, se torna imprescindible colocar un nodo intermedio, obteniéndose entonces diferencias de sólo el 4%.

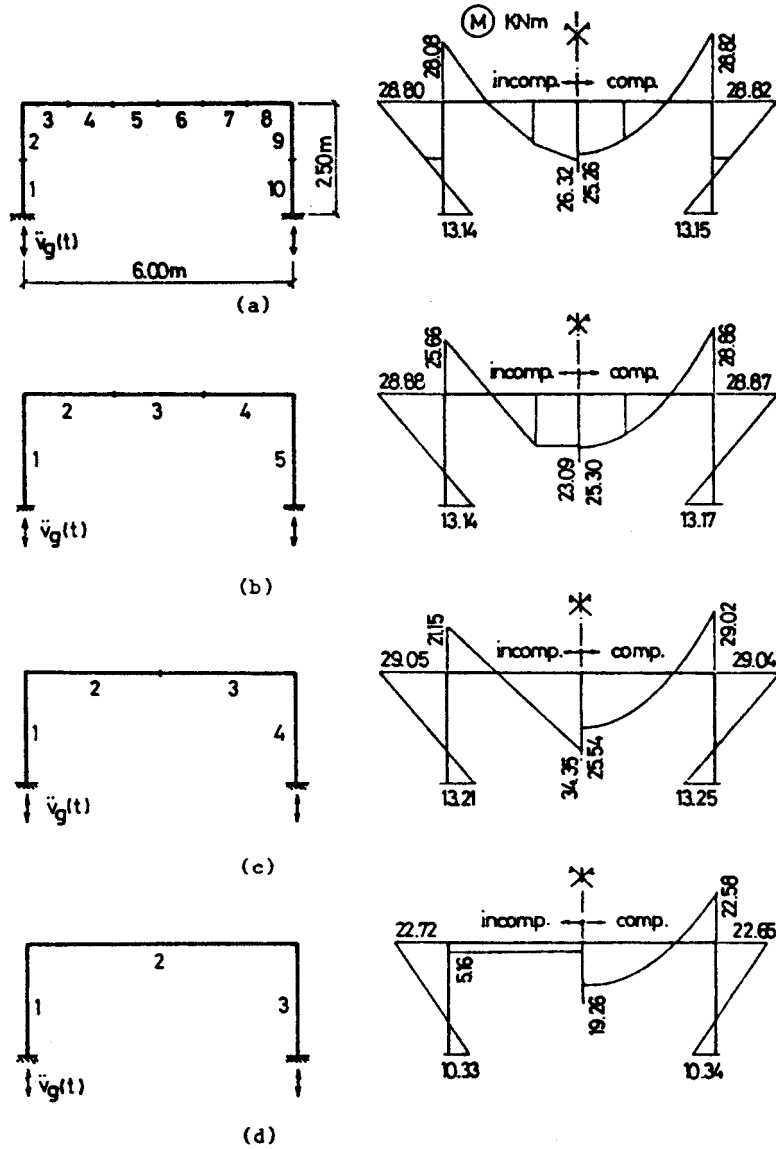
Ejemplo N°3:

El mismo pórtico del ejemplo N°2 es ahora solicitado por una carga vertical uniformemente distribuida sobre la viga  $p_t(x,t) = 30\text{KN/m sen}100t$

Se resuelve la estructura con una densa discretización en la viga y cargas concentradas en los nodos como se indica en la fig.6(a) aplicando en este caso la solución con la expresión incompleta (37), la que se adopta como "exacta" para comparar con los resultados de las discretizaciones (b) y (c) de la fig.6 obtenidos con solución completa.

En la evaluación de  $\{P_0\}$  según (32),(33) para las discretizaciones (b) y (c), se utilizó una integración numérica para  $Y_1(t)$  [1] (integral de Duhamel correspondiente a la ecuación (11)), con un paso de tiempo del orden de  $1/10 T_n$ , siendo  $T_n$  el período más bajo de los modos  $\phi_n(x)$  que colaboran en la respuesta  $w_0(x,t)$ . El número de modos depende del tipo de carga, y este paso de tiempo es necesario para obtener una integración numérica precisa. Sin embargo el  $\Delta t$  para la integración directa de las ecuaciones de movimiento de la estructura mantiene sus restricciones usuales [5], siendo independiente y en general significativamente más grande que el necesario para evaluar  $\{P_0\}$ .

Se nota nuevamente el gran ahorro en la discretización, al utilizar la expresión (36) para evaluar los esfuerzos en extremos de barra. Además como en este caso la contribución en la respuesta de las cargas actuantes sobre la barra con extremos fijos es significativa, y dicha contribución se obtiene con la verdadera solución (10), los resultados de la discretización con un sólo elemento en la viga son muy aproximados, disminuyendo la importancia del error en la aproximación (16).



$$E = 30000 \text{ MN/m}^2 \quad A = 0.24 \text{ m}^2 \quad I = 0.0128 \text{ m}^4$$

$$m_c = 0.5872 \text{ KN s}^2/\text{m} \quad m_v = 3.0581 \text{ KN s}^2/\text{m} \quad \xi = 0.05$$

Fig. 5 Características y resultados de momento flector para el pórtico del ej.2, en un instante de amplitud máxima.

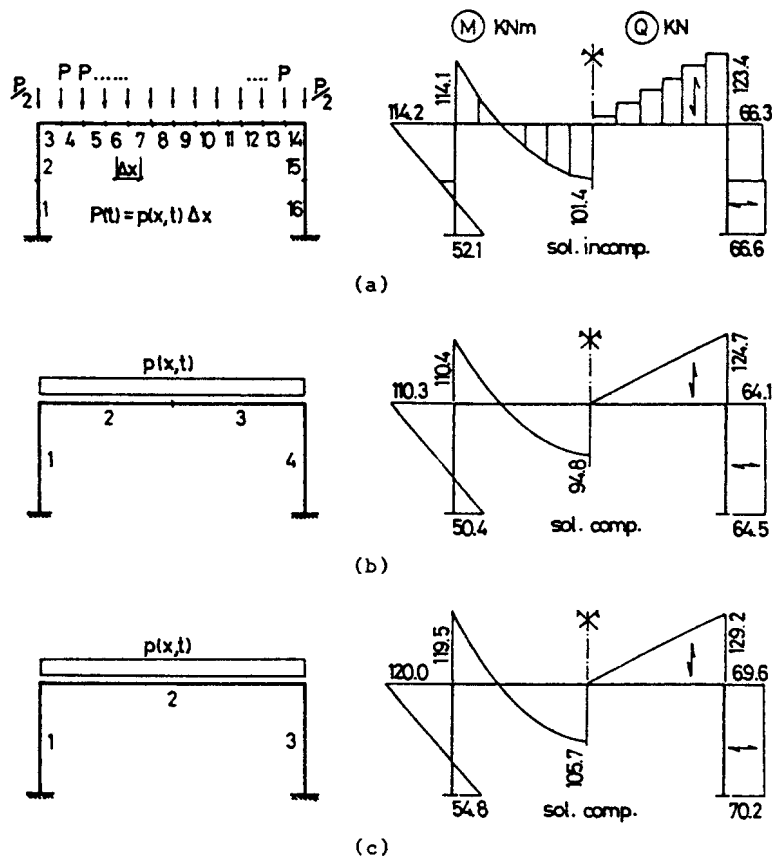


Fig. 6 Características y resultados de momento flector y corte para el pórtico del ej.3, en un instante de amplitud máxima.

#### CONCLUSIONES

La evaluación de los esfuerzos internos a través de la solución completa (36), que significa tener en cuenta la verdadera distribución de todas las acciones que actúan sobre la barra, permite reducir considerablemente la cantidad de elementos en la discretización, con respecto a los que serían necesarios en caso de emplear la expresión (37)

La contribución en la respuesta debida a las cargas externas actuantes sobre la barra con extremos fijos se calcula con la verdadera solución (10), mientras que la contribución debida a los desplazamientos de nodos se evalúa con los polinomios aproximados (16),(17). Debido a esta aproximación, en aquellos elementos donde se generen fuerzas inerciales importantes debido a los desplazamientos de nodos, es decir cuando los vectores  $[m] \{\ddot{v}\}$ ,  $[m] \{i\} \ddot{v}_g$  sean significativos en el

cálculo de  $\{P\}$  (36), es necesario colocar por lo menos un nodo intermedio. En caso contrario es posible discretizar la estructura con un sólo elemento por barra.

#### APLICACION EN ANALISIS MODAL ESPECTRAL

Cuando se utiliza la técnica de análisis modal espectral en un problema sísmico, surge el inconveniente al querer emplear la solución completa (36), que no se dispone de la historia de desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Sin embargo, despreciando términos debido al amortiguamiento, y observando que los desplazamientos máximos son contemporáneos con las aceleraciones máximas absolutas, las cuales a su vez pueden aproximarse a las pseudoaceleraciones máximas [6], a partir de (36) las acciones de extremo de barra para un modo n-ésimo resultan:

$$\{P_n\} = [k] \{D_n\}_{\text{máx}} + [m] \omega_n^2 \{D_n\}_{\text{máx}} \quad (38)$$

donde  $\{D_n\}_{\text{máx}}$  : vector de los desplazamientos espectrales correspondiente al modo n-ésimo.

#### REFERENCIAS

- [1] Clough, R.W., Penzien, J., "Dynamics of Structures". Mc Graw-Hill, 1975.
- [2] Kiseliov, V.A., "Mecánica de Construcción. Curso especial de la Dinámica y Estabilidad de las Estructuras". Mir, 1983.
- [3] Rubinstein, M.F., "Structural Systems, Static, Dynamic and Stability". Prentice Hall, 1970.
- [4] Zienkiewicz, O.C., "El Método de los Elementos Finitos". Reverté, 1980.
- [5] Bathe, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis". Prentice Hall, 1982.
- [6] Newmark, N.M., Rosenblueth, E., "Fundamentos de Ingeniería Sísmica". Diana, 1976.

