ELEMENTOS FINITOS EN PLASTICIDAD, VISCOPLASTICIDAD Y FRACTURA: ALGUNOS NUEVOS DESARROLLOS

Eduardo N. Dvorkin[1,2], Andrea P. Assanelli[3],
Alberto M. Cuitiño[1] y Gustavo Gioia[1,4]

1 Instituto de Materiales y Estructuras
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

2 Centro de Investigaciones Industriales
Siderca
Buenos Aires, Argentina

3 Departamento de Construcciones
Instituto Nacional de Tecnología Industrial
Buenos Aires, Argentina

4 Becario CONICET

RESUMEN

En la presente comunicación comentamos brevemente algunos de nuestros recientes desarrollos para la solución mediante elementos finitos de problemas elastoplásticos, elastoviscoplásticos y de fractura.

ABSTRACT

In this commmunication we briefly present some of our recent developments for the finite element solution of elastoplastic, elastoviscoplastic and fracture problems.

1. INTRODUCCION

La resolución de diversos problemas ingenieriles mediante el método de los elementos finitos exige disponer de elementos, algoritmos y relaciones constitutivas confiables y eficientes en los campos de la plasticidad, la viscoplasticidad y la fractura. A modo de ejemplo podemos citar el modelado de estructuras de hormigón en las que aparecen deformaciones plásticas permanentes [1], efectos reológicos y fisuración; la determinación de cargas límite y los problemas de conformado en metales.

Para atacar este tipo de problemas hemos desarrollado en los últimos años algunos métodos innovadores que describiremos muy brevemente en esta comunicación, poniendo especial énfasis en ilustrar los resultados alcanzados. Nos referiremos en particular a nuestro trabajo en los siguientes campos:

- Relaciones constitutivas para el hormigón

Ilustraremos la buena capacidad predictiva de un modelo de hormigón que hemos desarrollado basándonos en plasticidad no asociada y fractomecánica no lineal.

- Elementos finitos en plasticidad incompresible

Comentaremos los resultados obtenidos con nuestro nuevo elemento bidimensional QMITC basado en la técnica de interpolación mixta de componentes tensoriales.

- Elementos finitos en problemas de localización

Presentaremos algunos resultados obtenidos con una familia de elementos que hemos desarrollado para la solución de problemas con localización de deformaciones (v.g. fisuración). Veremos que el comportamiento estructural es insensible a las distorsiones de malla.

- Algoritmos para problemas de viscoplasticidad

Mostraremos mediante algunos ejemplos las posibilidades de un nuevo algoritmo que desarrollamos basándonos en la regla del punto medio.

2. RELACIONES CONSTITUTIVAS PARA EL HORMIGON

En la referencia [2] hemos presentamos un modelo constitutivo para la descripción del comportamiento instantáneo del hormigón. Antecedentes parciales de este desarrollo pueden encontrarse en nuestras referencias [3,4]. Las características sobresalientes del modelo son las siguientes:

En la descripción de las zonas de prefalla y de posfalla dúctil utilizamos un modelo de plasticidad no asociada [5,6]. La plasticidad no asociada origina matrices de rigidez no simétricas, que impedirían la difusión del modelo en códigos generales. Para resolver este problema en forma eficiente hemos utilizado la técnica de actualización BFGS combinada con la matriz constitutiva equivalente simétrica propuesta por Pande y Pietruszczak [7], con excelentes resultados.

En la descripción de la zona de posfalla frágil, caracterizada por la localización de deformaciones, utilizamos el modelo de la fisura difusa de Bazant y Oh [8], basado en fractomecánica no lineal. Este modelo es insensible a los refinamientos en la malla pero no a las distorsiones. En el punto 4 de este trabajo comentamos nuestra solución para este problema.

En la Fig.1 comparamos nuestros resultados numéricos con los valores experimentales de Kupfer et al. [9] para una serie de problemas planos de tensión correspondientes a varias relaciones entre las dos tensiones principales.

3. ELEMENTOS FINITOS EN PLASTICIDAD INCOMPRESIBLE

Los elementos finitos convencionales basados en interpolación de desplazamientos presentan el fenómeno de bloqueo (locking) al ser utilizados en el campo plástico en problemas planos de deformación y axilsimétricos. Esto los incapacita para la predicción de cargas últimas en este tipo de problemas [10].

En la presente sección mostraremos algunos resultados obtenidos mediante un nuevo elemento basado en la técnica de interpolación mixta de componentes tensoriales [11-13]: el QMITC [14]. En nuestra referencia [15] demostramos que el QMITC no bloquea, en el campo plástico, en problemas planos de deformación y axilsimétricos.

En las Figs.2 a 4 comparamos los resultados dados por el QMITC con los correspondientes al elemento estandar de cuatro nodos basado en la interpolación de desplazamientos (STD-4). Vemos que para los casos de plasticidad perfecta (Figs.2 y 4) el QMITC puede predecir la carga límite con exactitud, en tanto que el STD-4 no. En el caso de plasticidad con endurecimiento lineal (Fig.3), el QMITC describe exactamente la rigidez final, mientras que el STD-4 presenta una rigidez espuria.

4. ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS DE LOCALIZACION

Determinados materiales presentan un fenómeno de ablandamiento (*Strain Softening*) por el que, en ciertas circunstancias, ante la aplicación de un desplazamiento creciente la reacción es decreciente. Encontramos algunos ejemplos de importancia en el hormigón microfisurado y en la aparición de bandas de corte en metales sometidos a altas tensiones. En la presente comunicación nos referiremos exclusivamente a aquellos casos en que el comienzo de localización está claramente señalado por un nivel de tensión y/o deformación (como en el primer ejemplo). No consideraremos casos [16] en que el inicio de localización está ligado a un proceso de bifurcación (como en el segundo ejemplo).

Es bien sabido que en estos problemas de nuestro interés sólo se podràn obtener resultados insensibles a los refinamientos de malla teniendo en cuenta las siguientes apreciaciones:

1. La energía requerida por unidad de àrea fracturada debe ser considerada una propiedad del material [8].

2. Es errónea la utilización de relaciones constitutivas del tipo tension-deformación, que conducen a la anulación del volumen de localización, con la consiguiente anulación de la energía [17,18].

Existen ya modelos que cumplen con estas condiciones. Los modelos de *Fisura Discreta* [19] utilizan elementos de fisura regidos directamente por una relación constitutiva del tipo tensión-desplazamiento, ajustada al valor de energía específica de fractura. El seguimiento del proceso de propagación de fisura obliga a sucesivas redefiniciones de la malla para ir dando cabida a la inserción de los elementos de fisura. Este grave inconveniente es superado por el *Modelo de la Fisura Difusa* [8]. Este modelo introduce en cada punto de integración fisurado dentro de un elemento una relación constitutiva del tipo tensión-deformación, pero asociada a un ancho de banda que actúa como limitador de la zona de localización, impidiendo su anulacion. La combinación de ancho de banda y relacion tension-deformación se ajustan al respeto de la energía específica de fractura. En este planteo, que más que un elemento finito finito debe ser considerado como un modelo de material con localización, se presenta otro problema igualmente grave: los resultados son altamente sensibles a la distorsión de la malla. Al distorsionar los elementos los resultados sufren grandes modificaciones, siendo habitual la divergencia.

Atendiendo a que es imprescindible en muchos casos la utilización de elementos no rectangulares, hemos desarrollado una familia de elementos finitos [20] capaz de presentar (cuando las condiciones de carga y/o deformación así lo exijan) bandas de localización en su interior. Mediante interpolación independiente de los desplazamientos debidos a la localización hemos logrado objetividad de resultados ante la distorsión de malla. Comentaremos a continuación algunos resultados obtenidos con nuestro elemento de cuatro nodos.

La Fig.5 describe el funcionamiento a tracción-compresión de una malla simple distorsionada y sin distorsionar. El material es elástico lineal y la relación de ablandamiento tensión-desplazamiento es también lineal. En la Fig.6 repetimos el experimento para una solicitación de corte puro, investigando la propagación de fisura en modo I.

Finalmente mostramos la evolución de una malla de 25 elementos distorsionada y sin distorsionar sometida a tracción (Fig. 7) y corte puro (Fig. 8). En estos ensayos la localización se ha inducido debilitando el elemento central.

5. ALGORITMOS PARA PROBLEMAS DE VISCOPLASTICIDAD

En la implementación numérica de un modelo elasto-viscoplástico del tipo Perzyna [21] existen dos variantes principales para la búsqueda de la configuración de equilibrio correspondiente a un instante dado "t":

1. Formular el equilibrio en términos de los desplazamientos totales desde la configuración de referencia "0" hasta "t" [22,23].

2. Formular el equilibrio en términos de los desplazamientos incrementales desde la última configuración de equilibrio determinada [24].

Siguiendo nuestro estilo de trabajo tendiente a la inplementación del algoritmo en desarrollo en un programa general incremental de elementos finitos, hemos adoptado la segunda variante. Los problemas a resolver para esta implementación son la integración numérica de la relación constitutiva y el esquema iterativo durante el análisis incremental.

Para la integración numérica de la relación constitutiva hemos desarrollado [25] un algoritmo basado en la regla del punto medio. Este algoritmo tiende, en el límite plástico (tiempos grandes), al desarrollado para plasticidad invíscida por Ortiz y Popov [26], que nosotros utilizáramos en nuestro modelo de hormigón [2].

Los puntos destacables de nuestro algoritmo son:

1. Es incondicionalmenmte estable ($\alpha \geq 0.5$).

2. Es general: puede utilizarse en viscoplasticidad no asociada.

3. Puede utilizarse en problemas planos de tensión.

Para ilustrar el grado de exactitud alcanzado por nuestro algoritmo de integración viscoplástica recurriremos a los *Mapas de Iso-Error* [26] correspondientes a estados planos de tensión. Para construir estos mapas integramos mediante nuestro algoritmo para diferentes incrementos de la deformación total, partiendo de una situación tensional y de endurecimiento que será propia del mapa. LLevando sobre un par de ejes cartesianos a los incrementos aplicados según dos direcciones (que sin pérdida de generalidad adoptamos principales $\Delta\varepsilon_{I}$ y $\Delta\varepsilon_{II}$), y teniendo en cuenta el error en el valor integrado por el algoritmo para los incrementos de deformación representados por cada uno de los puntos del mapa, podremos trazar las curvas de iso-error. En los ejes coordenados llevaremos los incrementos de deformación en unidades de la deformación específica de fluencia en el ensayo uniaxial. Los errores porcentuales en las tensiones y en las deformaciones integradas (en los casos planos de tensión la componente de deformación normal al plano debe integrarse) se evalúan en términos de las normas de los correspondientes tensores integrados por el algoritmo y exactos. Estos últimos no son computables analíticamente, pero pueden estimarse por repetida aplicación del algoritmo (técnica de subincrementación). En el caso de los mapas que presentamos los valores "exactos" fueron calculados con 1000 subincrementos: nuestra experimentación numérica indica que el error del error no llega en este caso al 1%.

Para el trazado de los mapas de iso-error que mostramos en la Fig.9 hemos utilizado viscoplasticidad no asociada con funciones de potencial viscoplástico y de fluencia del tipo Drucker-Prager con endurecimiento. En la misma figura se indican los puntos a que corresponden los distintos mapas y las direcciones de deformación correspondiennntes. Para estudiar la influencia del grado de viscidez hemos construido mapas correspondiendo a diferentes valores del *Factor Adimensional de Viscidez* f.a.v.= $(E \gamma \Delta t)^{-1}$. Puede verse fácilmente que f.a.v.= 0 corresponde al límite de plasticidad inviscida.

Los errores obtenidos son del mismo orden de los correspondientes a otros algoritmos existentes para plasticidad inviscida y viscoplasticidad.

En cuanto al esquema iterativo durante el análisis incremental, estamos desarrollando una matriz de rigidez consistente con el algoritmo presentado [25].

6. REFERENCIAS

[1] W.F. Chen, *Plasticity in Reinforced Concrete*. Mc Graw-Hill, 1982.

[2] E.N. Dvorkin, A.M. Cuitiño y G. Gioia, "A Concrete Material Model Based on Non-Associated Plasticity and Fracture", Eng. Comp. (en prensa).

[3] E.N. Dvorkin, R.J. Torrent y A.M. Alvaredo, "A Constitutive Relation for Concrete", Proceed. First Int. Conf. on Computational Plasticity (Ed. D.R.J. Owen et al.), Pineridge Press, 1987.

[4] R.J. Torrent, E.N. Dvorkin y A.M. Alvaredo, "A Model for Work-Hardening Plasticity and Fracture of Concrete Under Multiaxial Stresses", Cement and Concrete Research, *17*, pp 939-950, 1987.

[5] Z.P. Bazant, *Advanced Topics in Inelasticity and Failure of Concrete*. Swedish Cement and Concrete Research Institute, 1979.

[6] P. A. Vermeer y R. De Borst, "Non-Associated Plasticity for Soils, Concrete and Rock", Heron, *29*, 3, 1984.

[7] G.N. Pande y S. Pietruszczak, "Symmetric Tangential Stiffness Formulation for Non-Associated Plasticity", Computers and Geotechniques, *2*, pp.89-99, 1986.

[8] Z.P. Bazant y B.H. Oh, "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", RILEM Mat. & Struc., *16*, pp.155-177, 1983.

[9] H. Kupfer, H.K.Hilsdorf y H. Rush, "Behaviour of Concrete Under Biaxial Stress", ACI J. *66*, pp.656-666, 1969.

[10] J. C. Nagtegaal, D.M. Parks y J.R. Rice, "On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range", Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., *4*, pp.153-177, 1974.

[11] E.N. Dvorkin y K.J. Bathe, "A continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis", Eng. Comp., *1*. pp.77-88, 1984.

[12] K.J. Bathe y E.N. Dvorkin, "A Four-Node Plate Bending Element Based on Midlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation" Int. J. Num. Meth. in Eng., *22*, pp.367-385, 1985.

[13] K.J. Bahte y E.N. Dvorkin, "A Formulation for General Shell Elements - The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components", Int. J. Num. Meth. in Eng., *22*, pp.697-722, 1986.

[14] E. N. Dvorkin y S.I. Vassolo, "A Quadrilateral 2-D Finite Element Based on Mixed Interpolation of Tensorial Components", Eng. Comp. (en prensa).

[15] E. N. Dvorkin y A. Assanelli, "Elasto-Plastic Analysis Using a Quadrilateral 2-D Element Based on Mixed Interpolation of Tensorial Components", Proc. Second Int. Connf. on Computational Plasticity (Ed. D.R.J. Owen et al.), Pineridge Press (en prensa).

[16] M. Ortiz, Y. Leroy y A. Needelman, "A Finite Element Method for Localized Failure Analysis", Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., *61*, pp.189-214, 1987.

[17] Z. P. Bazant, "Inestability, Ductility and Size Effect in Strain-Softenig Concrete", ASCE J. Eng. Mech. Div., *102*, EMR, pp.331-344, 1976.

[18] N. S. Ottosen, "Thermodynamic Consecuences of Strain Softening in Tension", ASCE J. Eng. Mech.Div., *112*, pp.1152-1164, 1986.

[19] A. Hillerborg, M. Modeer y P.E. Petersson, "Analysis of Crack Formation and Crack Growth by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements", Cement and Concrete Research, *6*, pp.773-782, 1976.

[20] E.N. Dvorkin, A.M. Cuitiño y G. Gioia, "Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distortion", (en preparación).

[21] P. Perzyna, "Fundamental Problems in Viscoplasticity", Adv. in Appl. Mech., *9*, pp.243-377, 1966.

[22] O.C. Zienkiewicz y I.C. Cormeau, "Visco-Plasticity, Plasticity and Creep in Elastic Solids - A Unified Numerical Solution Approach", Int. J. Num. Meth. in Eng., *8*, pp.821-845, 1974.

[23] I.C. Cormeau, "Numerical Stability in Quasi-Static Elasto/Visco-Plasticity", Int. J. Num. Meth. in Eng., *9*, pp.109-127, 1975.

[24] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis* , Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.

[25] G. Gioia, A.M. Cuitiño y E.N. Dvorkin, "A Mid-Point Rule Based Procedure for Non-Associated Viscoplasticity Applicable to Plane Stress Problems", (en preparación).

[26] M. Ortiz y E.P. Popov, "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations", Int. J. Num. Meth. in Eng., *21*, pp.1561-1576, 1985.

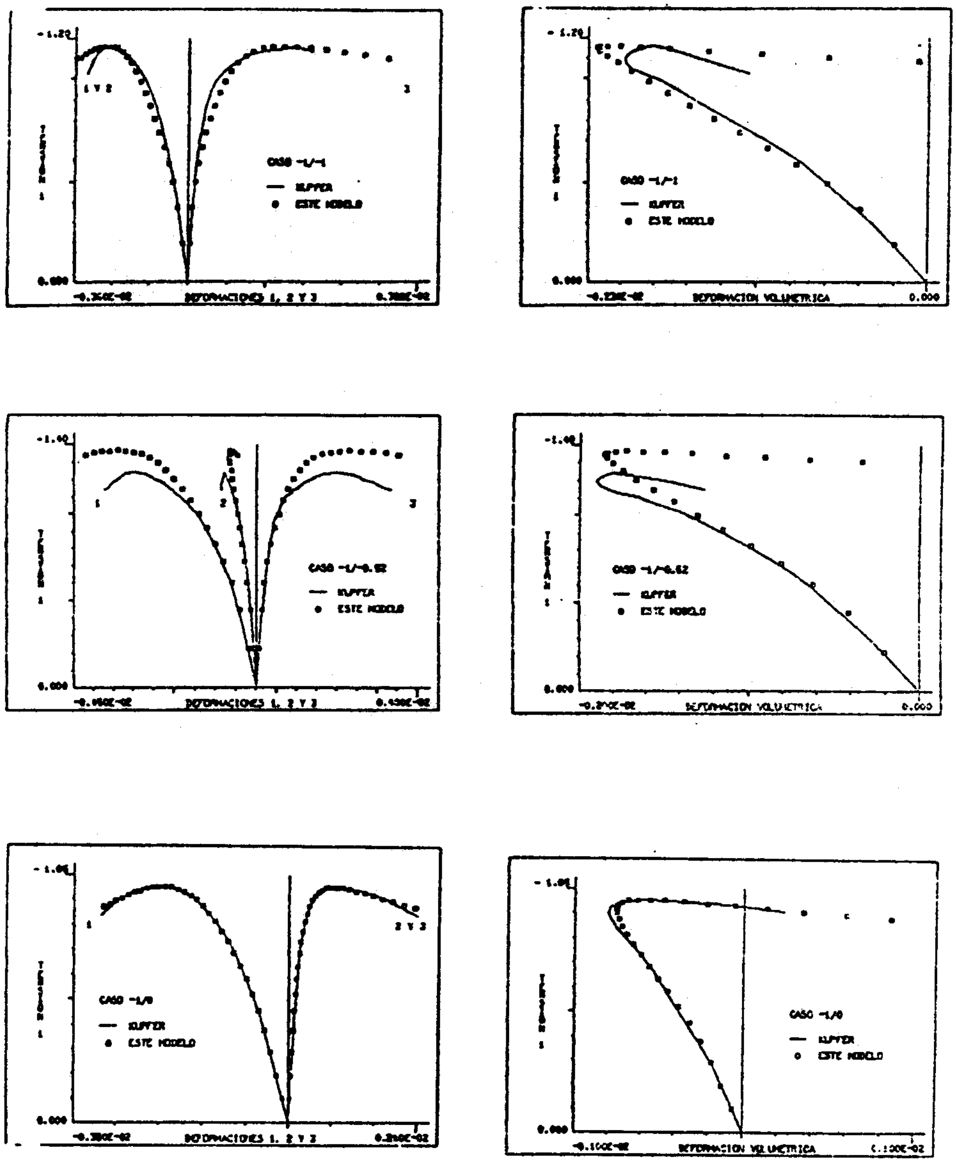


Figura 1. Comparación de los resultados de nuestro modelo de hormigón con los valores experimentales de Kupfer et al. [5] para una serie de ensayos planos de tensión.

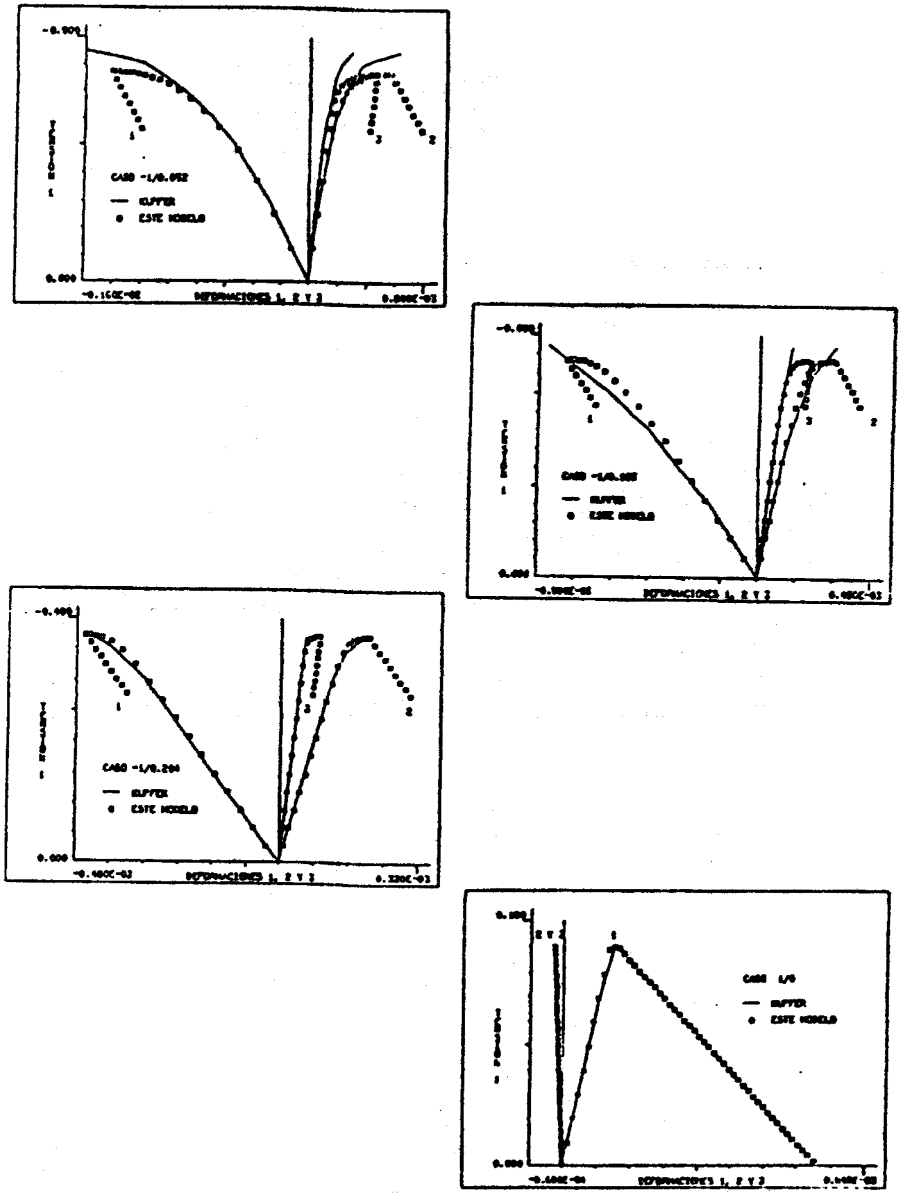
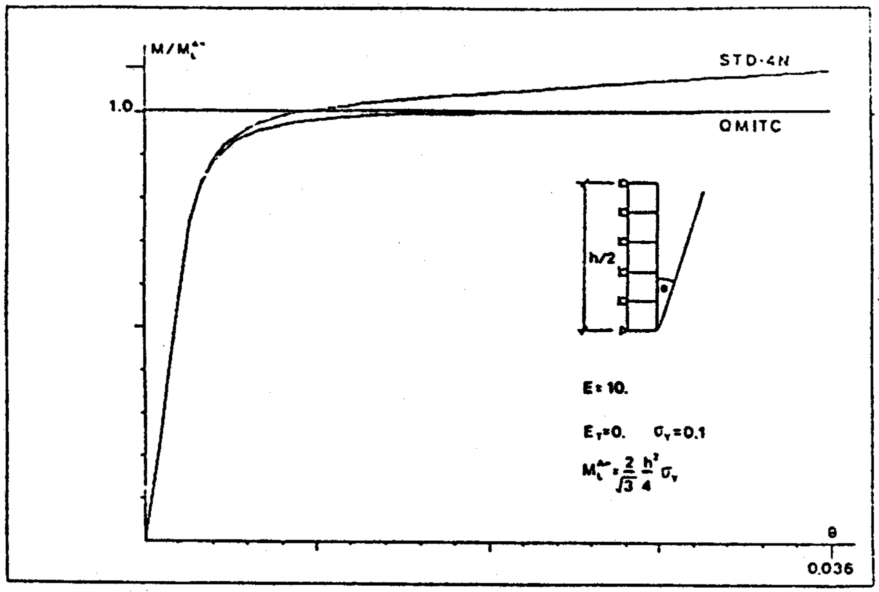


Figura 1. Continuación.



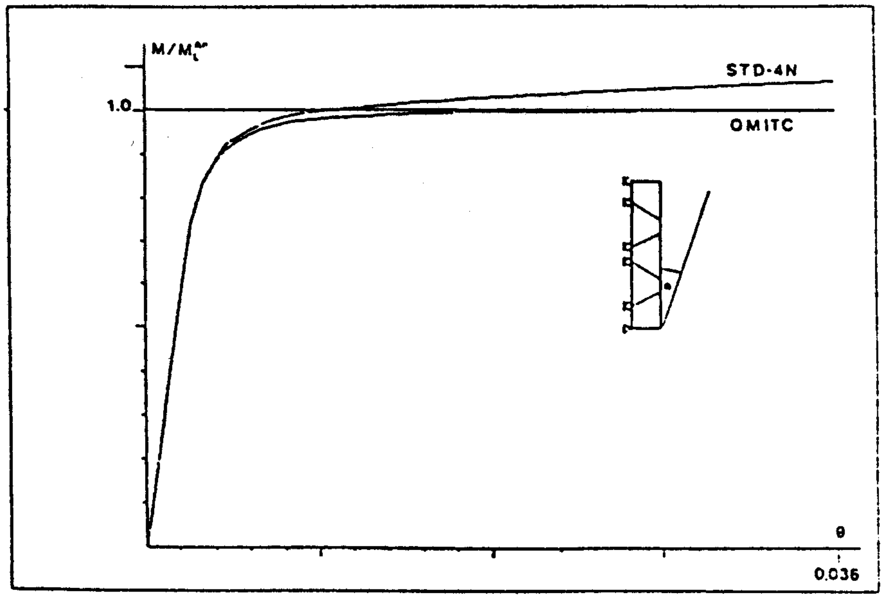
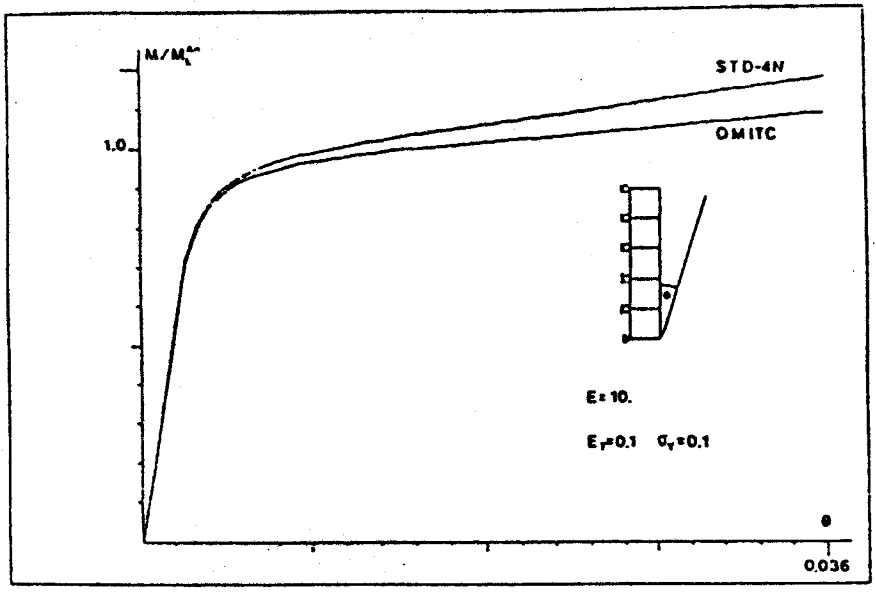


Figura 2. Flexión de una viga de material elástico-perfectamente plástico en estado plano de deformaciones modelada con el elemento QMITC.



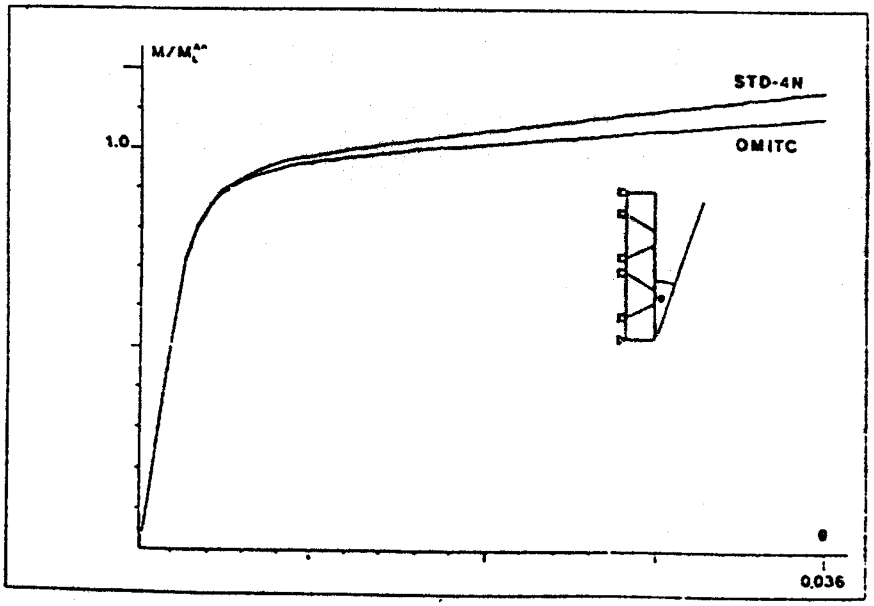
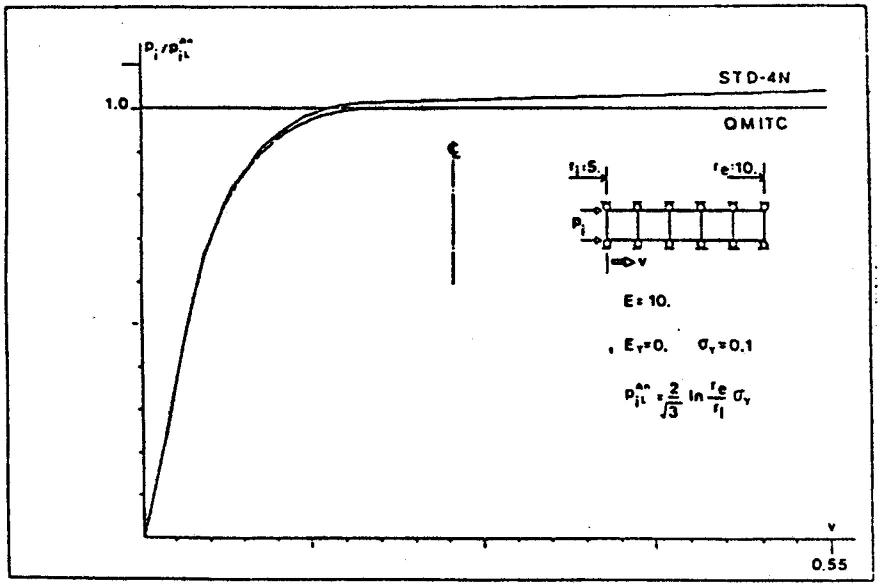


Figura 3. Flexión de una viga de material plástico con endurecimiento lineal en estado plano de deformaciones modelada con el OMITC.



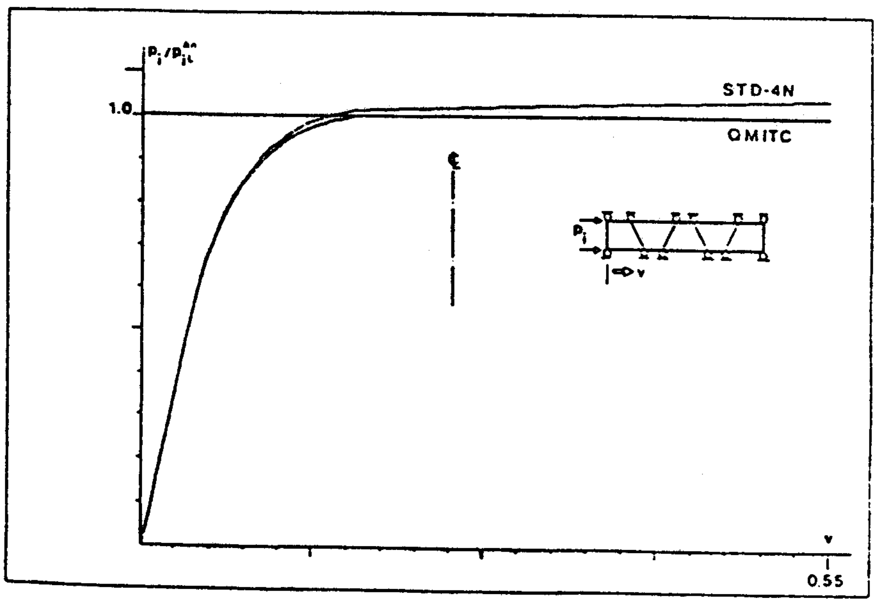


Figura 4. Cilindro elástico-perfectamente plástico con presión interior modelado con el QMITC.

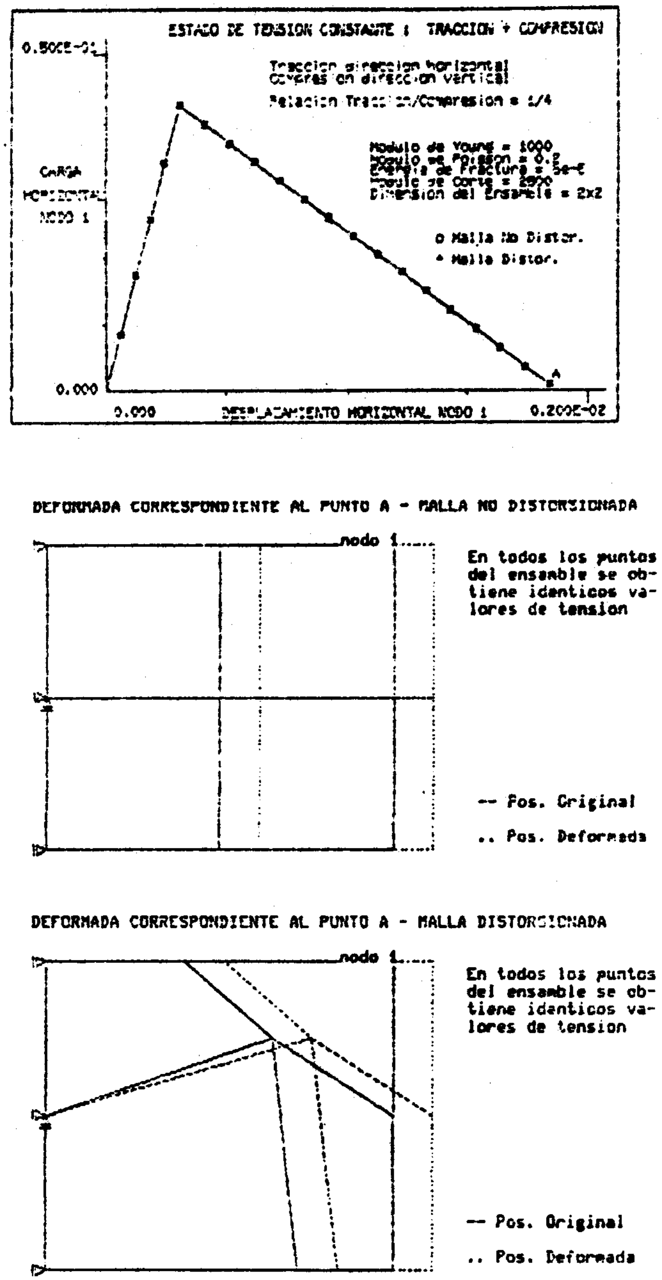
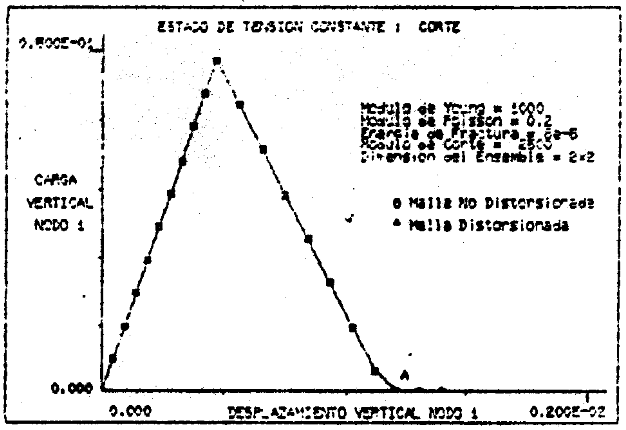
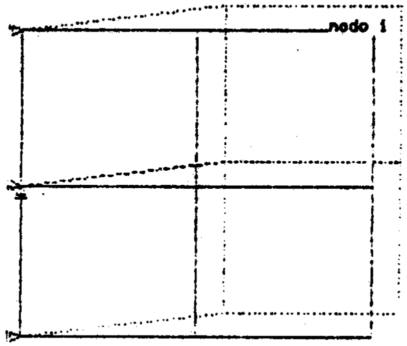


Figura 5. Ensayo de fractura a tracción-compresión modelado con una malla simple distorsionada y sin distorsionar.



DEFORMADA CORRESPONDIENTE AL PUNTO A - MALLA NO DISTORSIONADA

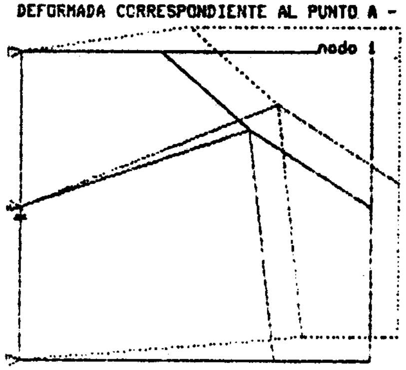


En todos los puntos del ensamble se obtiene identicos valores de tension

-- Pos. Original

.. Pos. Deformada

DEFORMADA CORRESPONDIENTE AL PUNTO A - MALLA DISTORSIONADA

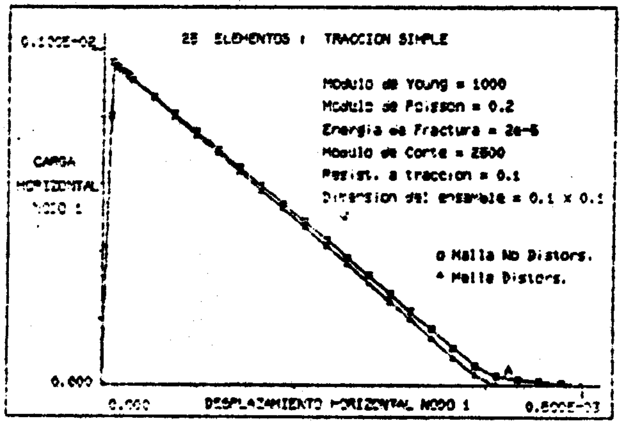


En todos los puntos del ensamble se obtiene identicos valores de tension.

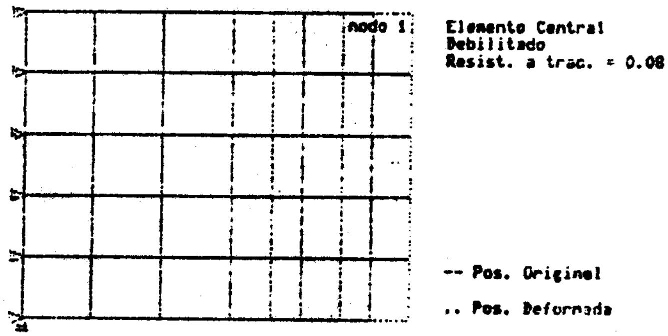
-- Pos. Original

.. Pos Deformada

Figura 6. Ensayo de fractura a corte puro.



DEFORMADA CORRESPONDINTE AL PUNTO A - MALLA NO DISTORSIONADA



DEFORMADA CORRESPONDIENTE AL PUNTO A - MALLA DISTORSIONADA

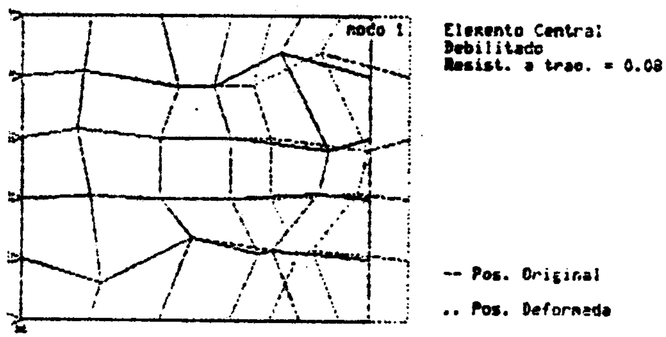


Figura 7. Ensayo de fractura a tracción pura modelado con una malla de 25 elementos

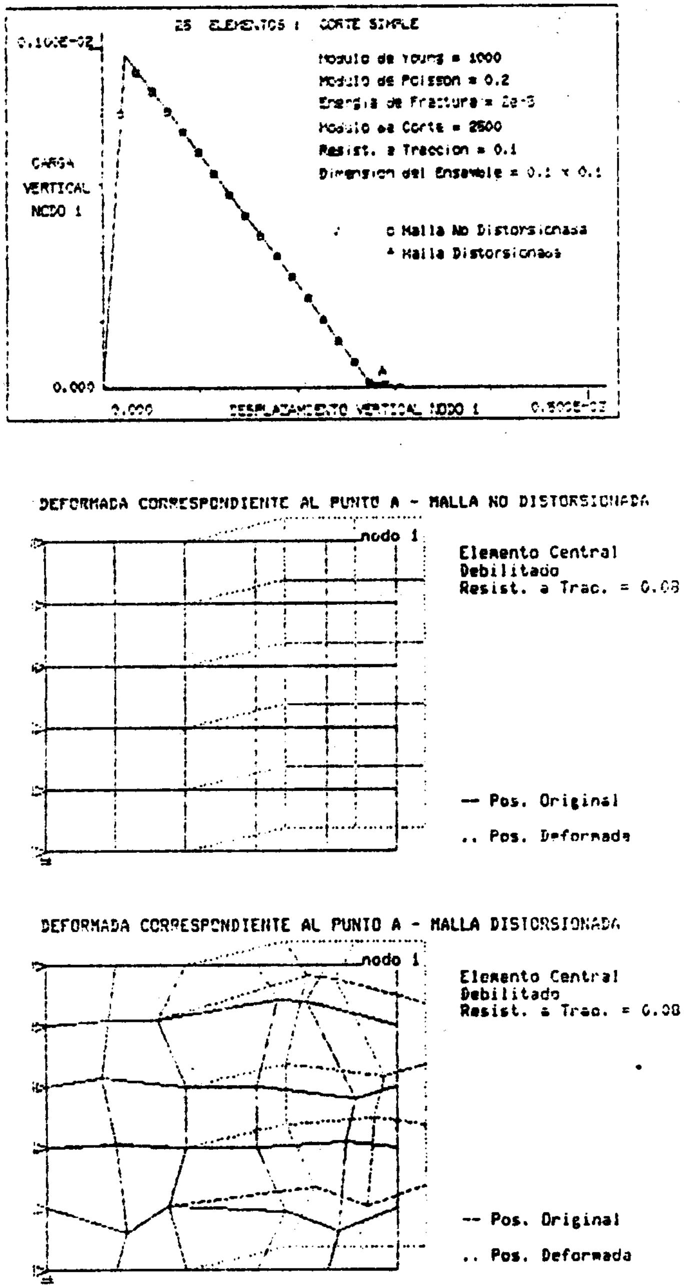


Figura 8 Ensayo de fractura a corte puro modelado con una malla de 25 elementos

SIG 1

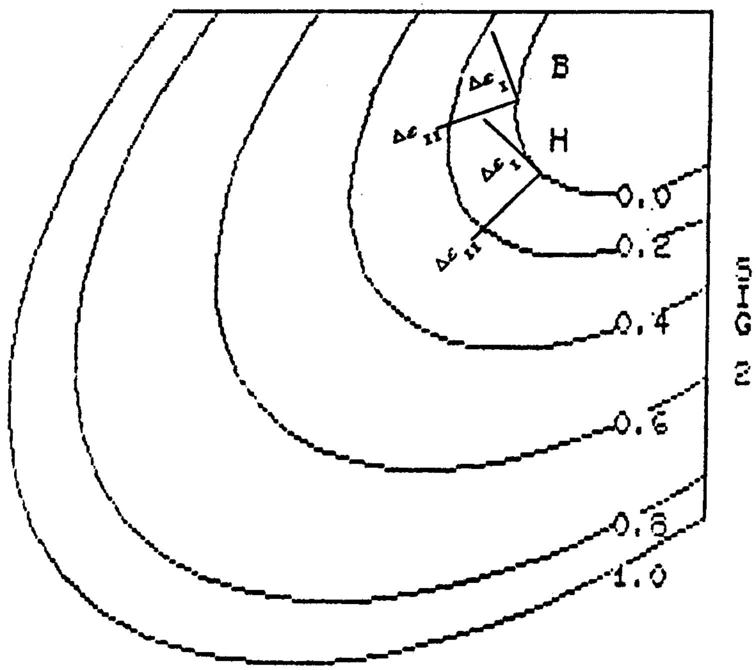


Figura 9. Mapas de iso-error correspondientes a nuestro algoritmo de integración de viscoplasticidad para dos puntos en estado plano de tensión.

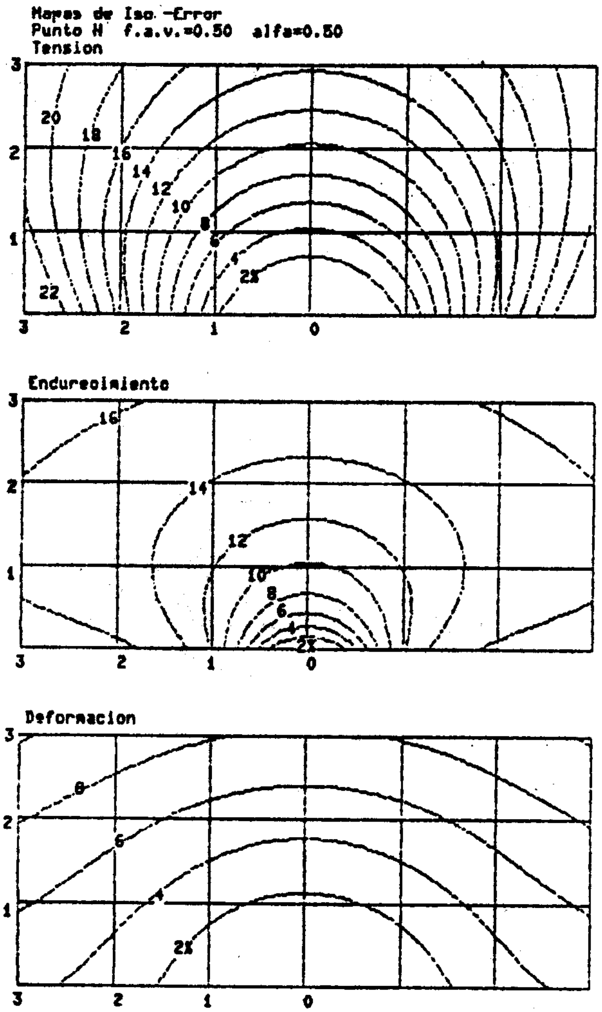


Figura 9. Continuación.

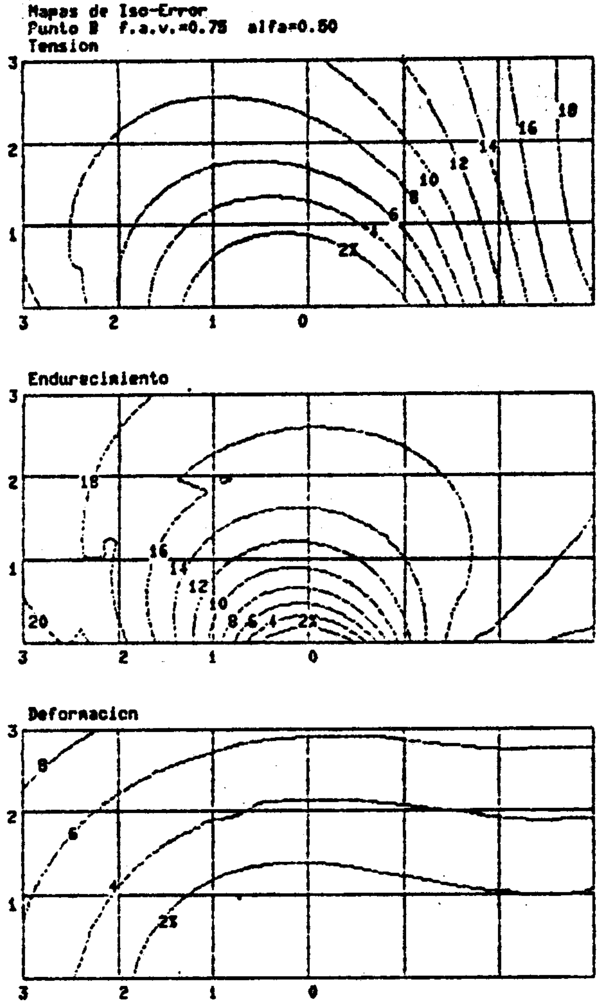


Figura 9. Continuación.

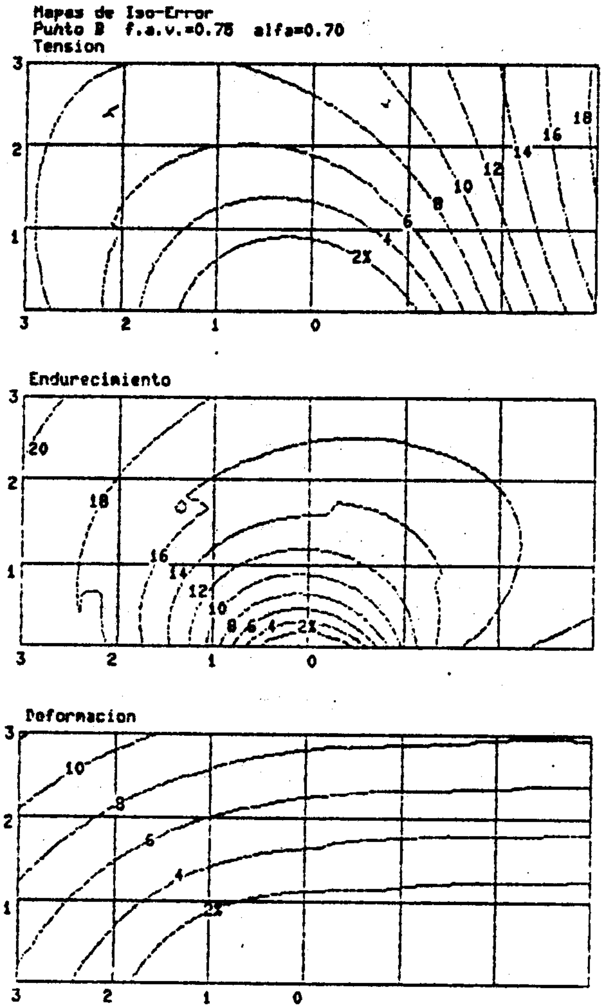


Figura 9. Continuación.

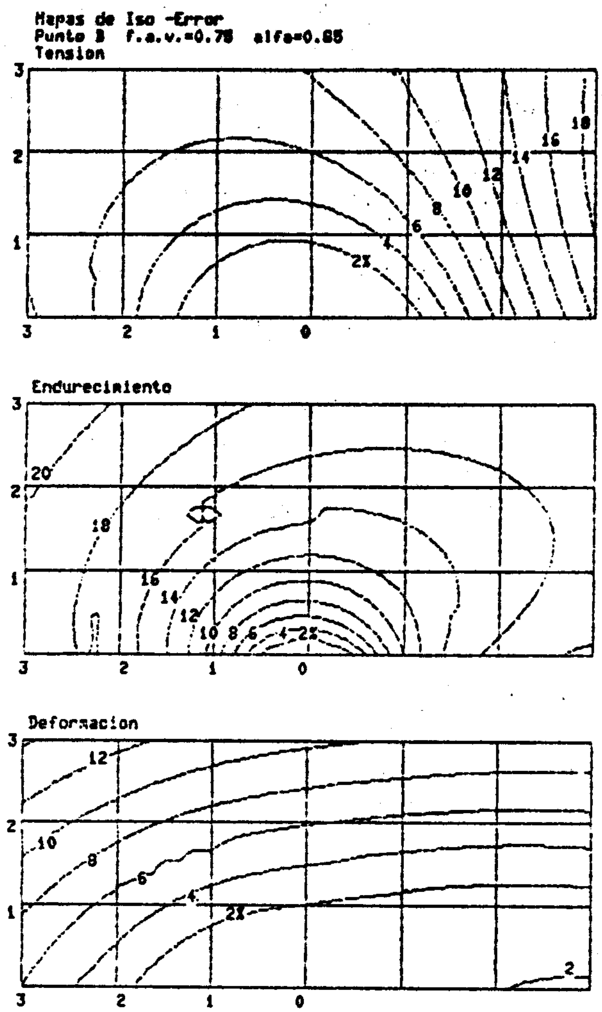


Figura 9. Continuación.

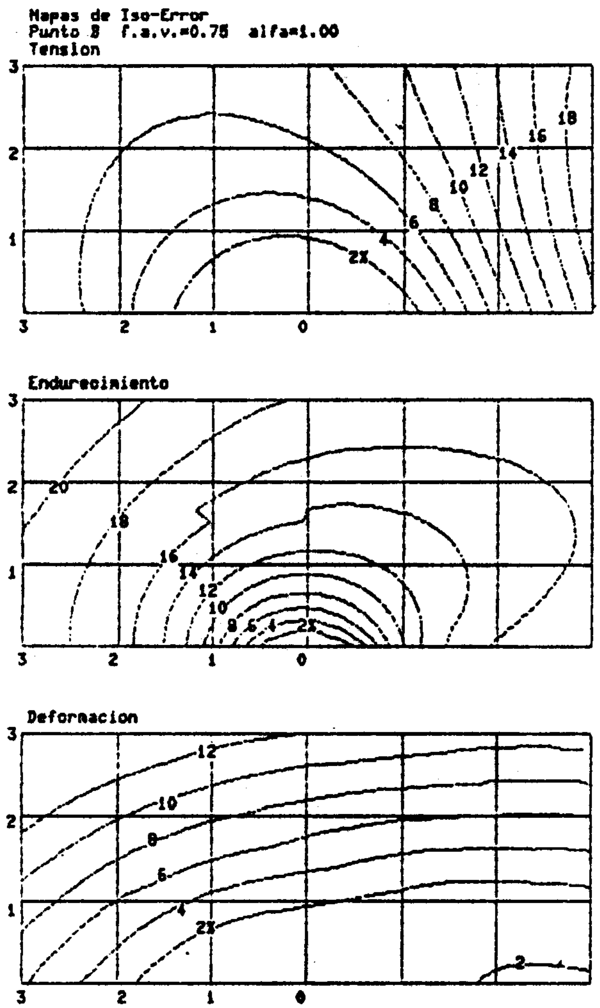


Figura 9. Continuación.