

RESOLUCION DE ACOPLAMIENTO TERMOMECANICO EN FLUIDOS  
VISCOPLASTICOS POR LAGRANGIANOS AUMENTADOS

Gustavo C. Buscaglia  
Fernando G. Basombrio  
Centro Atómico Bariloche. Comisión Nacional de Energía  
Atómica. San Carlos de Bariloche. Argentina.

RESUMEN

Se presenta una aplicación de técnicas de Lagrangianos aumentados para fluidos viscoplásticos con elementos no conformes. Este nuevo método permite reducir significativamente el costo computacional del algoritmo, respecto de los elementos conformes propuestos originalmente por P. Le Tallec.

En lo que respecta al subproblema térmico, éste se trata por 'viscous splitting' con elementos no conformes. Se incluyen problemas típicos de convección-difusión por ser esta técnica poco estudiada en la literatura.

Se resuelve un problema de extrusión térmicamente acoplada para ilustrar el método propuesto.

ABSTRACT

An application of augmented Lagrangian techniques for viscoplastic fluids with non-conforming finite elements is presented. This new method allows significant reduction of computing cost, as compared to the conforming case originally proposed by P. Le Tallec.

Viscous splitting, also with non-conforming elements, is used for the thermal subproblem. As this technique has been scarcely studied in the literature, typical convection-diffusion tests are included.

A thermally coupled extrusion problem is solved to illustrate the proposed method.

## I-INTRODUCCION

La resolución de flujos viscoplásticos es de utilidad, principalmente, en la simulación de procesos de formado de metales y polímeros. Desde los primeros cálculos, resultó claro que no es realista asumir que el proceso se desarrolla isotérmicamente [1]. Esto se ve agravado por la fuerte dependencia que, en los rangos de trabajo, tienen las propiedades de los materiales modelados con la temperatura [1-5].

La generación de calor propia de la deformación plástica es, en las aplicaciones, una de las principales fuentes de cambios de temperatura. Resultan así problemas fuertemente acoplados.

El tratamiento con elementos finitos de este tipo de problemas se inició en 1978, con el trabajo de O.C. Zienkiewicz, P. Jain y E. Oñate [3], posteriormente generalizado en 1981 [1]. Los incesantes avances tanto en el tratamiento del caso isotérmico como en el de la ecuación de la energía hacen que las técnicas usadas para el acoplamiento se hallen en constante desarrollo.

El presente trabajo describe una experiencia que realizamos en la resolución de fluidos viscoplásticos térmicamente acoplados.

La novedad consiste en el uso de métodos muy recientes para los subproblemas térmico y dinámico, combinados como es usual según sustituciones sucesivas. En particular, implementamos con los elementos no conformes lineales de Crouzeix-Raviart el método de viscoplasticidad por Lagrangianos aumentados introducido por P. Le Tallec [6]. Estos elementos presentan ventajas por el menor llenado de las matrices y la facilidad de preconditionamiento (escaleo elemento a elemento) [14], siendo esta sin embargo la primera experiencia en nuestro conocimiento de usarlos en este contexto. La parte térmica la tratamos con un algoritmo de "viscous splitting" [22], combinando el método de las características con el Galerkin convencional. Este tipo de técnicas, emparentadas con las denominadas Lagrange-Galerkin, son objeto de intensivo estudio en la actualidad [20-22]. Para la temperatura usamos triángulos lineales no conformes [19], e incluimos los resultados de pruebas realizadas en tests habituales de convección-difusión. Consideramos esto último oportuno por lo escaso de la documentación al respecto en la literatura.

El plan de este artículo es el siguiente: En las secciones II y III presentamos, respectivamente, las técnicas que utilizamos para los subproblemas dinámico y térmico. La sección IV la dedicamos a resultados numéricos, tanto los mencionados en el párrafo anterior como los correspondientes a la simulación de un problema de extrusión. Por último, nos permitimos algunos comentarios finales a modo de conclusión.

## II-TRATAMIENTO DEL SUBPROBLEMA DINAMICO: LAGRANGIANOS AUMENTADOS

Cuando la temperatura es dato, si el potencial de disipación del fluido es convexo en todo punto y se despreja la inercia, los campos de velocidad ( $\vec{v}$ ), de tensión ( $\sigma$ ) y de presión ( $p$ , el fluido se asume incompresible) puede calcularse utilizando técnicas de Lagrangiano aumentado.

En efecto, si  $(\beta, H, \Lambda)$  es punto de ensilladura de

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_R(\vec{w}, \mathbf{G}, \mu) = & \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{G}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{B}f \cdot \vec{w} dx - \int_{\Gamma_2^d} \vec{f} \cdot \vec{w} d\Gamma + \\ & + \frac{1}{2}R \int_{\Omega} r |D \vec{w} - \mathbf{G}|^2 dx - \int_{\Omega} r \mu : (D\vec{w} - \mathbf{G}) dx \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathcal{F}_R: K \times Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2)$$

$$K = \left\{ \vec{w}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \vec{w} \text{ diferenciable, } \operatorname{div} \vec{w} = 0, \vec{w}|_{\Gamma_1^d} = \vec{u}_0 \right\} \quad (3)$$

$$Y = \left\{ \mathbf{G}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}, [\mathbf{G}(x)]^T = \mathbf{G}(x), \operatorname{tr} [\mathbf{G}(x)] = 0 \right\} \quad (4)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ : dominio.

$\Gamma_1^d \cup \Gamma_2^d$ : frontera de Dirichlet (Neumann) donde se conoce la velocidad  $\vec{u}_0$  (la fuerza  $\vec{f}$ ).

$f$ : fuerzas másicas.

$r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r(x) \geq \alpha > 0$ : campo escalar auxiliar.

$R > 0$ : parámetro auxiliar.

$D$ : operador gradiente simétrico.

se cumple

$$\vec{v} = \beta \quad (5)$$

$$Dv = H \quad (6)$$

$$\sigma + p \mathbf{1} = -r \mathbf{A} \quad (7)$$

El algoritmo resolutor que utilizamos, de tipo Uzawa con relajación por bloques, puede verse en Refs. 6 y 10.

La discretización por elementos finitos fue llevada a cabo con interpolantes lineales no conformes para la velocidad, mientras que los demás campos son aproximados por campos constantes en el interior de cada elemento [9]. Esta elección impide realizar las integrales de (1) que involucran a  $D\vec{w}$  sobre todo el dominio, por lo que dichos términos son integrados sólo sobre la unión de los interiores de los elementos, como es usual en aproximaciones no conformes.

En lo que hace a la elección de  $R$  y  $r$ , principal desventaja de la introducción del Lagrangiano aumentado, nos remitimos a ref.12 por una exposición del criterio utilizado.

### III-TRATAMIENTO DEL SUBPROBLEMA TERMICO: VISCOUS SPLITTING

En este caso no es posible despreciar los términos convectivos [1-5], por lo que es necesario resolver la ecuación de convección-difusión

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T - c \nabla^2 T = h \quad (8)$$

con adecuadas condiciones de contorno. En (8),  $c$  es la difusividad térmica y  $h$  las fuentes. Para ellos utilizamos el siguiente algoritmo de "viscous splitting" [22].

ALGORITMO: Con  $T^n(x) (=T(x, t_n))$  conocida, calcúlese  $T^{n+1}$  según

PRIMER PASO: Hallar  $\hat{T}(x, t)$  solución de

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \hat{T} = 0 \quad (9.a)$$

$$\hat{T}(x, t_n) = T^n(x) \quad (9.b)$$

SEGUNDO PASO: Hallar  $T^{n+1}(x)$  como  $T^*(x, t_{n+1})$ , con  $T^*$  que cumple

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} - c \nabla^2 T^* = h \quad (10.a)$$

$$T^*(x, t_n) = \hat{T}(x, t_{n+1}) \quad (10.b)$$

donde  $t_n, t_{n+1}$  pertenece a una discretización temporal arbitraria y, puesto que estamos interesados en el caso estacionario, el cálculo se corta si  $T^{n+1}$  es lo suficientemente próxima a  $T^n$  [21].

El segundo paso se discretiza y resuelve por el método de Galerkin usual (es un problema de difusión), con triángulos lineales no conformes como los usados para cada componente de la velocidad [19]. Para el primer paso, en cambio, utilizamos la aproximación (proveniente del método de las características)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \approx \frac{T(x, t_{n+1}) - T(\underline{x}, t_n)}{t_{n+1} - t_n} \quad (11)$$

donde  $\underline{x}$  es la posición ocupada, al tiempo  $t_n$ , por la partícula que al tiempo  $t_{n+1}$  está en  $x$ . De acuerdo a esto, la solución del primer paso en cada nodo  $P_i$  de la red (posición  $x_i$ ) es

$$\hat{T}(x_i, t_{n+1}) = \hat{T}(x_i, t_n) \quad (12)$$

Por último, la evaluación del punto  $\underline{x}$  en (11) y (12) se realiza según [17]

$$\underline{x} = x - \Delta t \vec{v}(x, t_{n+1}) \quad (13)$$

lo cual es aceptable si la velocidad no varía fuertemente en el dominio. Esta evaluación puede mejorarse usando un esquema de

Runge-Kutta de segundo orden [18], que no implementamos.

#### IV-RESULTADOS NUMERICOS

Los resultados que presentamos en esta sección pretenden demostrar el buen funcionamiento del método propuesto, tanto en el caso global del acoplamiento termomecánico como en el de cada uno de los subproblemas aislados. Por esto, presentamos cada caso en subsecciones separadas.

##### IV.a. Convección-difusión

Realizamos varias pruebas de la técnica propuesta (cf. sección III), las que nos permitieron concluir que se trata de un esquema suficientemente robusto y eficiente. Reproducimos a continuación dos tests habituales en este área.

En primer lugar, el problema conocido como "convección transversal a la red" [16], cuyo planteo se esquematiza en la Figura 1. Utilizamos una red de  $10 \times 10$  cuadrados iguales, partido cada uno en dos triángulos. Los resultados que mostramos en la Figura 2 ( $\theta = 22.5^\circ, 45^\circ$  y  $67.5^\circ$ ) son de precisión similar, por ejemplo, a los obtenidos con el método SUPG [16]. Cabe destacar que el pequeño sobrepico a la entrada se debe a la graficación de la solución sobre una red conforme auxiliar.

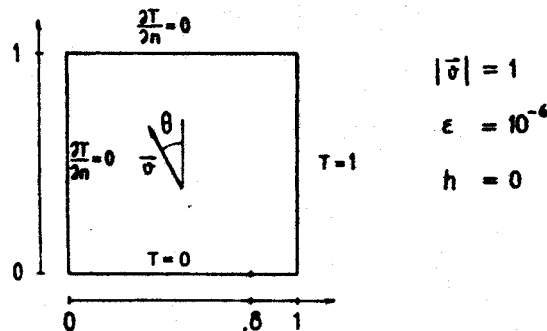


Fig. 1 Primer problema ejemplo de convección-difusión

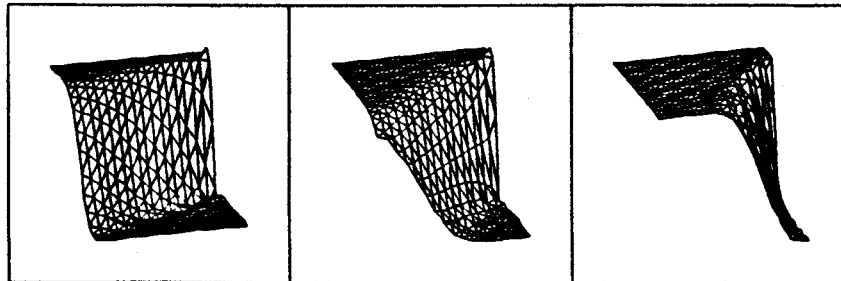


Fig. 2 Resultados obtenidos para el problema de Fig.1.

El segundo problema que presentamos puede verse también en Ref.10-12 y 23 resuelto por otros métodos. El campo de velocidad es uniforme y de módulo unitario en la dirección horizontal. Las condiciones de contorno son homogéneas de Dirichlet en toda la frontera. Otros parámetros son:  $\epsilon = 0.001$ ,  $h = 1$ . Los resultados que obtuvimos (ver Fig.3) son satisfactorios en comparación con los de las referencias antes citadas (una vez más, atribuimos las oscilaciones leves de las isoclinas a defectos de graficación). La red utilizada consta de 240 nodos, y está algo densificada sobre las capas límites.

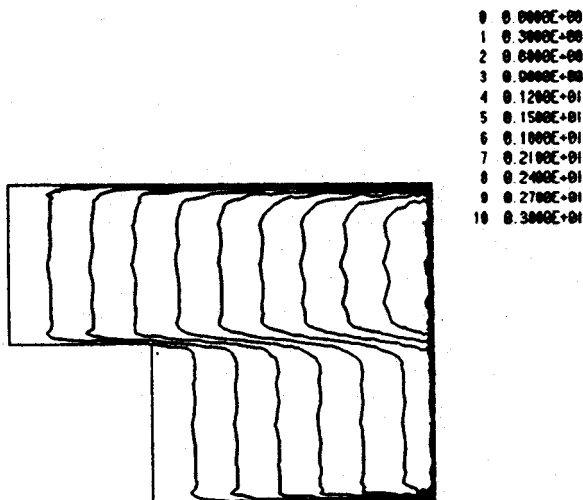


Fig. 3 Resultados del segundo test de convección-difusión

#### IV.b. Viscoplasticidad

De las pruebas que efectuamos a nuestro método de solución del subproblema dinámico, incluimos un caso de extrusión con parámetros similares a los correspondientes al conformado industrial de Zircaloy-4. La red y dimensiones pueden verse en la Figura 4. Fijamos la velocidad de entrada en 4 cm/seg, y asumimos un modelo viscoplástico de Norton-Hoff [7,15]

$$\varphi(\dot{G}) = \frac{1}{p} (k\sqrt{2})^p |\dot{G}:G|^{p/2} \quad (14)$$

con  $k = 400 \text{ (kgr/cm}^2\text{)}^{1/p} \text{ seg}$ ,  $p = 1.227$ .

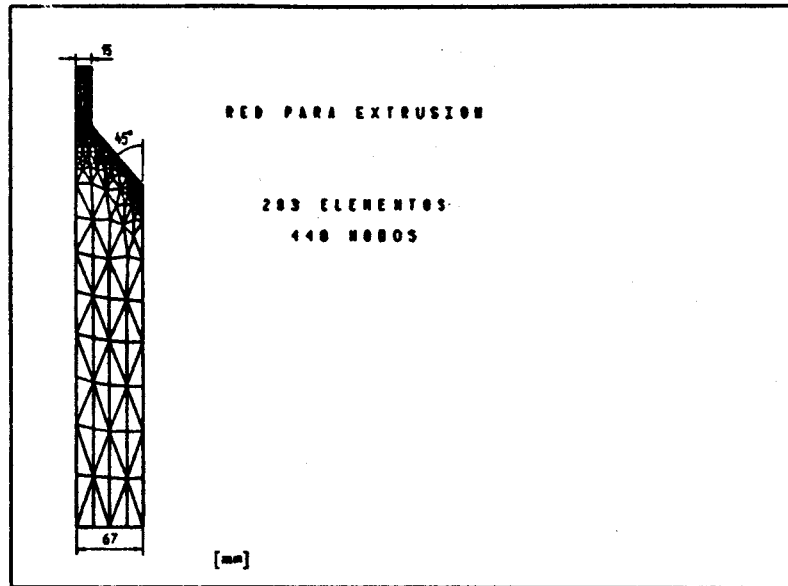


Fig. 4 Red y dimensiones del problema de extrusión

Al algoritmo de Uzawa requirió 350 iteraciones para alcanzar una tolerancia (en tensión) de  $3.0E-04$ . Los campos de presión y tensión equivalente obtenidos pueden verse en las Figuras 6.a y 7.a. Cabe destacar que la aparición de picos de presión y tensión en el ángulo derecho (que no ocurre en el caso newtoniano) concuerda con resultados obtenidos con una aproximación de sólidos en pequeñas deformaciones por S. Urquiza y F.G. Basombrio [13].

#### IV.c. Acoplamiento termomecánico

Finalmente, presentamos el caso de extrusión de IV.b resuelto con nuestro método bajo las siguientes hipótesis:

$$- k(T) = [400 - (T-1000^{\circ}K) \times 0.5/^{\circ}K] (\text{kg}/\text{cm}^2)^{1/p} \text{ seg} \quad (15)$$

$$- p = 1.227$$

- toda la energía de deformación se transforma en calor.

- temperatura de entrada :  $1000^{\circ}K$ .

- paredes adiabáticas.

- difusividad térmica :  $0.8 \text{ cm}^2/\text{seg}$ .

- densidad :  $6600 \text{ kg}/\text{m}^3$

- calor específico :  $370 \text{ J}/(\text{kg}^{\circ}K)$

Fueron necesarias sólo tres iteraciones del algoritmo global para la convergencia. Los campos de disipación y temperatura

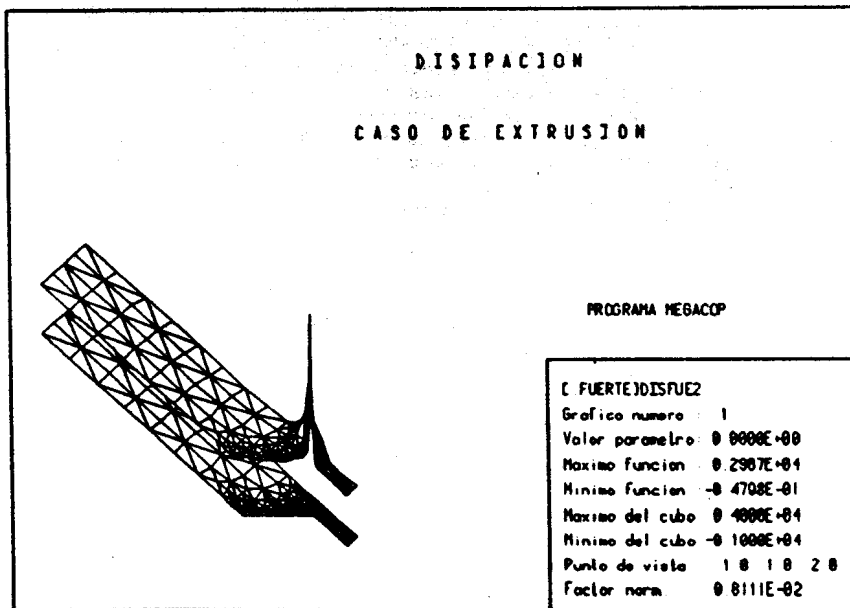
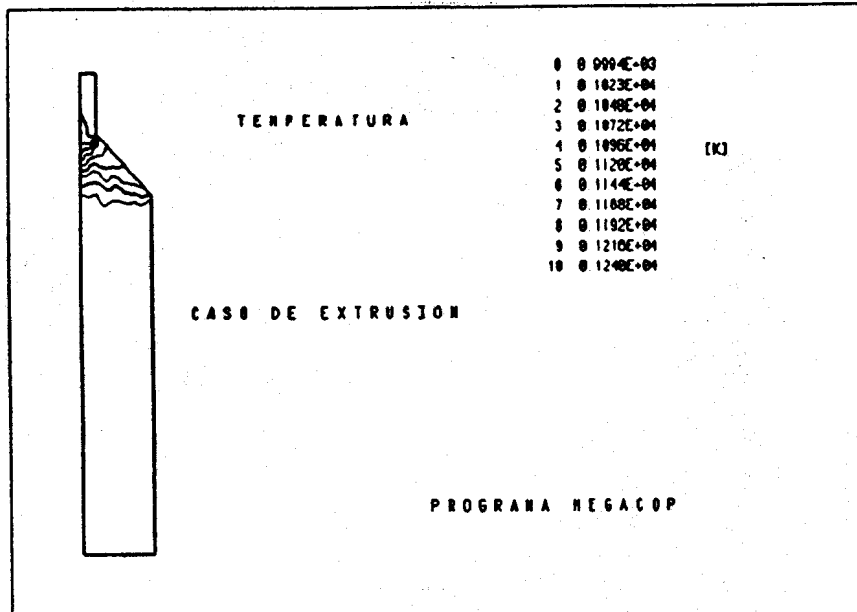


Figura 5



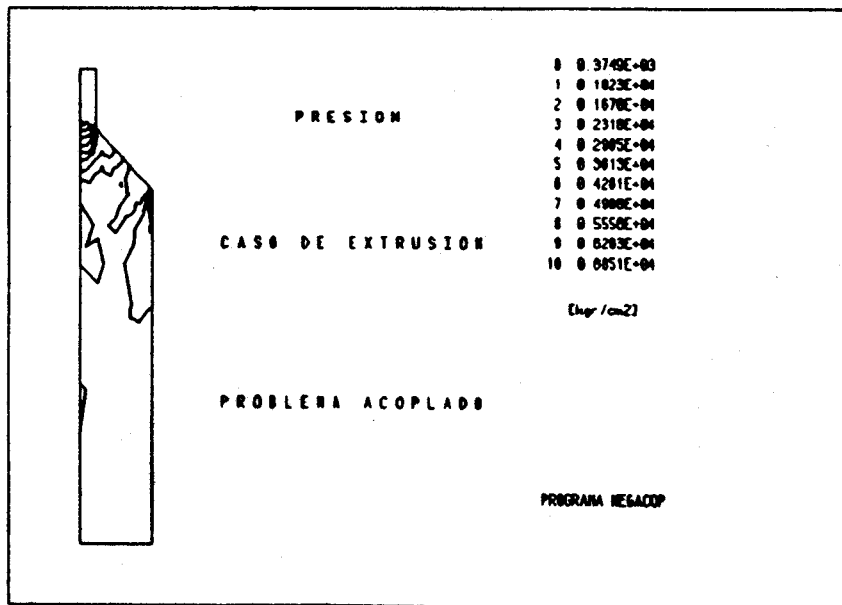
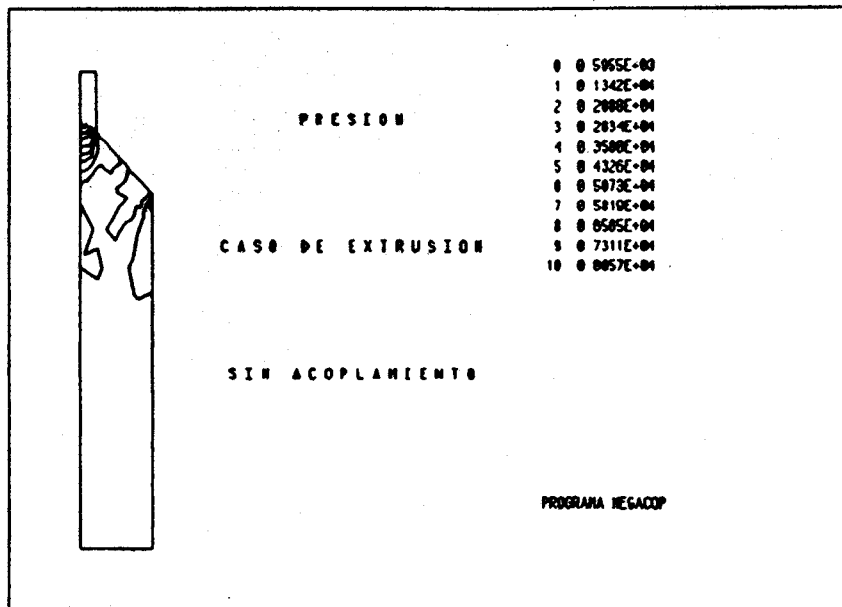


Figura 6

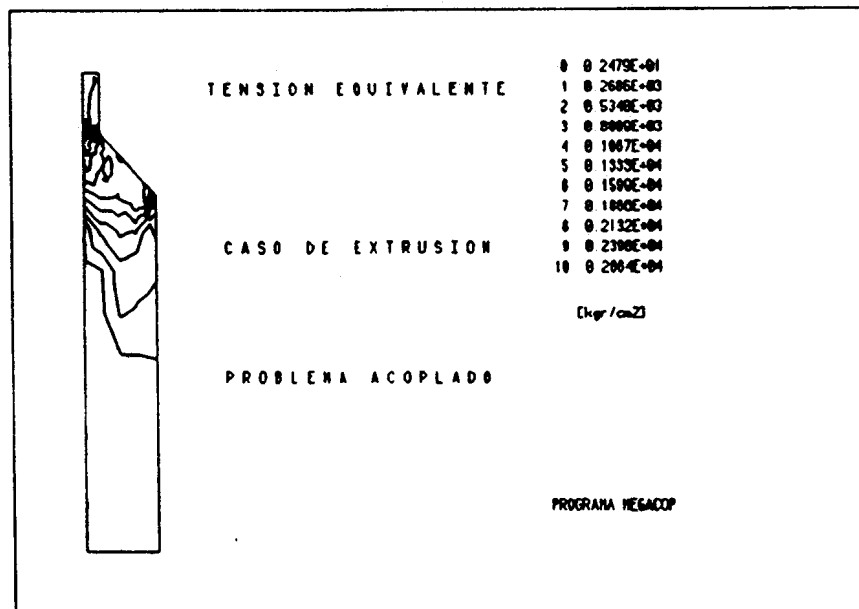
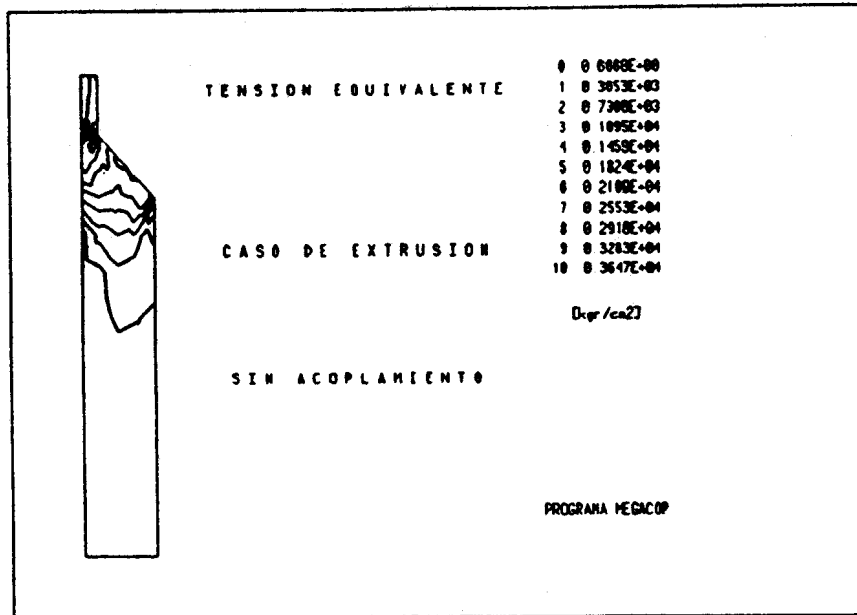


Figura 7

calculados pueden verse en la Figura 5. De este último, y de (15), resulta un "ablandamiento" del material que se refleja en los campos de presión y tensión equivalente obtenidos (Figuras 6.b y 7.b).

La significativa variación de, por ejemplo, la presión en el pistón ratifica las afirmaciones de otros autores [1-5] sobre la importancia del acoplamiento termomecánico en la práctica industrial.

#### V - CONCLUSIONES

Hemos descrito un nuevo método para la resolución de flujos viscoplásticos térmicamente acoplados, basado en aproximaciones no conformes para velocidad y temperatura, que combina técnicas recientes para el tratamiento de la viscoplasticidad (Lagrangianos aumentados) y de la convección-difusión (viscous splitting).

Como conclusión general, también en nuestro trabajo se ha puesto de manifiesto la importancia del acoplamiento termomecánico en este tipo de problemas de extrusión (ver también [1-5]). Se observan picos localizados de temperatura. En nuestro ejemplo dichos incrementos térmicos no son excesivamente agudos porque la difusividad utilizada es varias veces superior a la real, pero de otra manera la complejidad de los resultados impediría comprobar el buen funcionamiento del método.

Los elementos no conformes han permitido reducir sensiblemente el número total de iteraciones del sub-problema de Stokes, haciendo más eficiente al algoritmo. Resultan además atractivos por su extensión natural a situaciones tridimensionales. Como contrapartida, en nuestra experiencia hemos notado que su utilización es delicada: en ciertas circunstancias el comportamiento no es el esperado y, dada su naturaleza, el post-procesamiento de resultados se hace dificultoso por la necesidad de recurrir a promedios nodales de las magnitudes calculadas, hecho que ocasionalmente puede acarrear oscilaciones espúreas.

El gran número de iteraciones requeridas para la simulación numérica de la extrusión debido a la disparidad de valores de la viscosidad (zonas muy rígidas y zonas muy fluidas), hace que se esté frente a un severo problema del tipo "stiff". En tal sentido, resulta imprescindible destinar un significativo esfuerzo para mejorar la convergencia a través de técnicas de pre-condicionamiento (ver Ref.12 por técnicas adecuadas para elementos no conformes) y de una elección adecuada del campo  $r(x)$  (ver Ref.6).

#### REFERENCIAS

- [1] O.C. Zienkiewicz, E. Oñate and J.C. Heinrich, "A general formulation for coupled thermal flow of metals using finite elements", Int.J.Num.Meth.Engng. Vol. 17, 1981, págs. 1497-1514.
- [2] S. Nakazawa, J.F.T. Pittman and O.C. Zienkiewicz, "Numerical solution of flow and heat transfer in polymer melts", in Finite Elements in Fluids, Vol. 4, R.H. Gallagher, D.H. Norrie, J.T. Oden and O.C. Zienkiewicz (Eds.), 1982.

- Wiley, págs.251-284.
- [3] O.C. Zienkiewicz, P.C. Jain and E. Oñate, "Flow of solids during forming and extrusion. Some aspects of numerical solutions", Int. J. Solids Struct., Vol. 14, 1978, págs. 15-38.
  - [4] J.F.T. Pittman and S. Nakazawa, "Finite elements analysis of polymer processing operations", in 'Numerical Analysis of Forming Processes', J.F.T. Pittman, O.C. Zienkiewicz, R.D. Wood, J.M. Alexander (Eds.), Wiley, 1984, págs. 165-218
  - [5] H. Antúnez and S. Idelsohn, "Topics in numerical solution of isothermal and thermal-coupled forming processes", submitted to Latin American Applied Research, 1989.
  - [6] P. Le Tallec, "Numerical solution of viscoplastic flow problems by augmented Lagrangians", IMA J. of Num. Analysis Vol. 6, 1986, págs. 185-219.
  - [7] G. Surdon and J.L. Chenot, "Finite element calculation of three-dimensional hot forging", Int.J.Num.Meth.Engng., Vol. 24, 1987, págs. 2107-2117.
  - [8] A. Karagiannis, H. Mavridis, A.N. Hrymak and J. Vlachopoulos, "A finite element convergence study for shear-thinning flow problems", Int.J.Num.Meth. in Fluids, Vol. 8, 1988, págs. 123-138.
  - [9] M. Crouzeix and P.-A. Raviart, "Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I", R.A.I.R.O., R-3, 1973, págs. 33-76.
  - [10] R. Glowinski, 'Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems', Springer-Verlag, 1984, Chapters 2,6 and 7.
  - [11] F. Thomasset, 'Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations', Springer-Verlag, 1981, Chapters 3 and 4.
  - [12] G. Buscaglia, 'Elementos Finitos en Fluidos con Enfasis en Viscoplasticidad y Acoplamiento Termomecánico', Monografía presentada para optar al grado de Ingeniero Nuclear, Instituto Balseiro, Bariloche, 1989.
  - [13] S. Urquiza y F.G. Basombrio, "Simulación por elementos finitos de los primeros instantes de la extrusión de vainas de combustible para centrales nucleares", presentado en MECOM'88, IX Congreso Latinoamericano e Ibérico sobre Métodos Computacionales para Ingeniería, Córdoba, 1988.
  - [14] D. Pelletier, A. Fortin and R. Camarero, "Are FEM solutions of incompressible flows really incompressible? (or how simple flows can cause headaches!)", Int.J.Num.Meth. in Fluids Vol. 9, 1989, págs. 99-112.
  - [15] M. Frémond, "Le materiau viscoplastique de Norton-Hoff", II Escola de Matemática Aplicada, 'Métodos Variacionais em Mecânica dos Sólidos', Rio de Janeiro, Brasil, 1980.

- [16] T.J.R. Hughes and A. Brooks, "A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions", in R.H. Gallagher, D.H. Norrie, J.T. Oden and O.C. Zienkiewicz (Eds), *Finite Elements in Fluids*, Vol. 4, Wiley, 1982, págs. 47-65.
- [17] J. Douglas and T.F. Russell, "Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures", *SIAM J.Numer. Analysis*, Vol. 19, 1982, págs. 871-885.
- [18] M. Bercovier and O. Pironneau, 'Characteristics and the finite element method' in T. Kawal (Ed.), *Finite Element Flow Analysis*, North-Holland, 1982, págs. 67-74.
- [19] O. Pironneau, "Finite elements for flow problems", in 'Elementos Finitos e Aplicações a Mecânica dos Fluidos', V Escola de Matemática Aplicada, Rio de Janeiro, 1984.
- [20] K.W. Morton, A. Priestley and E. Suli, "Stability of the Lagrange-Galerkin method with non-exact integration", *Math.Modell. and Numer.Anal.*, Vol. 22, 1988, págs. 625-653.
- [21] A. Bermúdez and J. Durany, "La méthode des caractéristiques pour les problèmes de convection-diffusion stationnaires", *Math.Modell. and Numer.Anal.* Vol. 21, 1987, págs. 7-26.
- [22] W.G. Szymczak, "An analysis of viscous splitting and adaptivity for steady-state convection-diffusion problems", *Comp.Meth. Appl.Mech.Engng.* Vol. 67, 1988, págs. 311-154.
- [23] P. Caussignac and R. Touzani, 'Linear conforming and nonconforming upwind finite elements for the convection-diffusion equation', *IMA J.Numer.Anal.* Vol. 8, 1988, págs. 85-103.

