

ESTUDIO DE SISTEMAS VIBRANTES ACOPLADOS
MEDIANTE ANALISIS DE FOURIER

Daniel R. Avalos, Hilda A. Larrondo
Departamento de Física, Facultad de Ingeniería
Universidad de Mar del Plata, J.B. Justo 4302, 7600 Mar del Plata, Argentina

Patricio A. A. Laura
Instituto de Mecánica Aplicada
Gorriti 43, 8000 Bahía Blanca, Argentina

RESUMEN

El presente trabajo investiga la aplicación del análisis de Fourier al estudio de elementos estructurales que vibran transversalmente, sobre los cuales se han montado masas puntuales. Se muestra el método para los casos de una viga y una placa con una masa puntual acoplada mediante un montaje elástico.

Se estudian los problemas numéricos y se compara la precisión contrastando los resultados obtenidos, con los correspondientes a la solución exacta. Se discuten asimismo los problemas numéricos involucrados en la determinación de las frecuencias naturales exactas.

ABSTRACT

The present work deals with the application of Fourier Analysis to the study of structural elements executing transverse vibrations, over which concentrated masses have been mounted. The method is shown for the cases of a beam and a plate both with a concentrated mass elastically mounted.

Numerical problems are studied and the precision of the method is evaluated by comparison of the results with those of the exact solution. Finally numerical problems involved in the determination of the exact natural frequencies are discussed.

INTRODUCCIÓN

Excelentes libros, trabajos y reports tratan sobre el problema de vigas y placas vibrantes sobre las que se encuentran montadas masas concentradas rigidamente acopladas a los elementos estructurales [1,2]. El problema es tecnológicamente importante ya que aparece en una gran variedad de situaciones en la ingeniería: desde vigas y placas que soportan maquinarias hasta paneles de circuito impreso sobre los que se han montado delicados elementos electrónicos.

Por otra parte se dispone de un número muy limitado de estudios en los que la masa está conectada elásticamente a la estructura [3]. El presente estudio trata con la solución exacta del problema del título, en el caso de sistemas simplemente apoya-

dos. La influencia de la masa concentrada montada elásticamente se simula con una función delta de Dirac.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Consideremos el caso de una viga simplemente apoyada acoplada a una masa concentrada a través de un resorte elástico de característica lineal definida por el parámetro k , ver Figura 1.

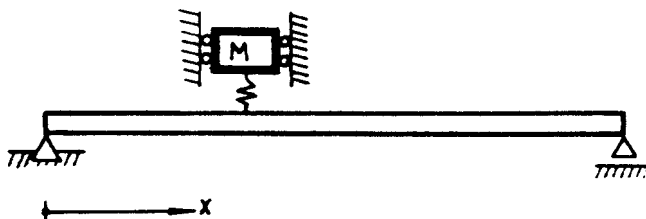


Figura 1: el sistema estructural

Usando la teoría clásica de Euler - Bernoulli de las vigas vibrantes se describe el fenómeno de las vibraciones de pequeña amplitud por medio de la bien conocida ecuación diferencial a derivadas parciales:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(t) \delta(x-x_0) \quad (1)$$

sujeto a las condiciones de contorno:

$$w(x,t)|_{x=0} = 0 = w(x,t)|_{x=L} \quad (2a)$$

y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L} \quad (2b)$$

Por otra parte el movimiento de la masa concentrada es la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = k [w(x_0, t) - z] = -F(t) \quad (3)$$

En el caso de modos normales de vibración resulta:

$$w(x,t) = W(x) e^{i\omega t} \quad (4a)$$

$$w(x_0, t) = W_0 e^{i\omega t} \quad (4b)$$

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t} \quad (4c)$$

Sustituyendo (4b) y (4c) en (3), determinando la solución particular en forma directa y sustituyendo en (1) se obtiene:

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} - \rho A \omega^2 W = \frac{\omega^2 m W_0}{1 - (\omega^2 m/k)} \delta(x - x_0) \quad (5)$$

donde se ha supuesto que:

$$\omega^2 = \frac{m}{k}$$

Expresando $W(x)$ en función de una suma infinita de modos normales de la estructura:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L} \quad (6)$$

y expandiendo la función delta de Dirac en términos de sus componentes de Fourier resulta:

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L} \quad (7)$$

donde $c_n = (2/L) \operatorname{sen}(n\pi x_0/L)$. Sustituyendo (6) y (7) en (5) y expresando los términos en forma adimensional se obtiene el siguiente sistema de infinitas ecuaciones lineales en los coeficientes incógnita b_n s.

$$(\pi^4 n^4 - \Omega^2) b_n = \frac{2 M \Omega^2}{1 - \delta^2 \Omega^2} \operatorname{sen} n\pi X_0 \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen} j\pi X_0 \quad (8)$$

donde se ha supuesto que $\Omega^2 = 1/\delta^2$. El significado de los parámetros adimensionales en (8) es:

$$M = m / (\rho A L)$$

$$K = k L^3 / (EI)$$

$$X_0 = x_0 / L$$

$$\Omega^2 = \rho A L^4 \omega^2 / (EI)$$

$$\delta^2 = M / K$$

DETERMINACIÓN DE LAS RAÍCES

La ecuación (8) conduce, a partir de la condición de no trivialidad de la solución, a una ecuación característica cuyas raíces constituyen los coeficientes de frecuencia del sistema acoplado en estudio.

Por supuesto para hacer tratable el problema, se aproxima la serie infinita de (8) por un sistema finito, reemplazando los límites superiores de las sumatorias por números enteros positivos J en la ecuación (8).

El algoritmo empleado consiste en variar Ω y obtener aquellos valores que anulan el determinante del sistema. Sin embargo, al hacer este barrido es posible que pasemos muy cerca del polo $\Omega \delta = 1$. Para evitar este inconveniente multiplicamos todas las filas del determinante por el factor $(1 - \Omega \delta^2)$. Como consecuencia hemos introducido en el determinante a calcular un cero ficticio de orden $N - 1$, siendo N el tamaño del determinante. Empleando ahora un código de detección de raíces del tipo "cruce por cero" estas raíces quedarán eliminadas para valores impares de N pues serán de orden par, lo que las hace indetectables.

Las tablas I a III, en las columnas marcadas "Fourier", muestran los modos más bajos de vibración para distintas posiciones de la masa, y para varios valores de M y K . Los valores fueron obtenidos para $N = 11$.

Tabla I - Frecuencias naturales del sistema mostrado en Figura 1, como función de M y K , para $X_0 = 1/2$. También son raíces las frecuencias $(n\pi^2)$ para n par.

M	K	$X_0 = 1/2$					
		Fourier	Exacta	Fourier	Exacta	Fourier	Exacta
0.2		8.31956	8.31952	66.04135	66.01364	110.00862	109.95367
1.0	1000	5.61860	5.61848	47.00801	46.97898	102.47824	102.44860
3.0		3.64592	3.64579	42.21175	42.18498	101.55944	101.53298
0.2		6.11676	6.11672	11.39224	11.39220	88.93990	88.93989
1.0	10	2.85474	2.85472	10.91646	10.91644	88.93932	88.93932
3.0		1.65685	1.65683	10.85941	10.85939	88.93923	88.93922
0.2		2.21196	2.21196	9.97568	9.97568	88.83771	88.83771
1.0	1	0.98964	0.98964	9.97140	9.97140	88.83770	88.83770
3.0		0.57141	0.57141	9.97072	9.97072	88.83770	88.83770

Tal como se indica en cada tabla, existen además modos de vibración en los que la masa permanece en reposo en tanto la viga oscila en uno de sus modos naturales. Las frecuencias de estos modos son de la forma $\Omega = n\pi^2$, con valores de n tales que la posición de alguno de los nodos en ese modo, coincida con la posición de la masa concentrada.

LA SOLUCIÓN EXACTA

El problema admite una solución exacta dada por:

$$W(X) = \begin{cases} W_1(X) & 0 \leq X \leq X_0 \\ W_2(X) & X_0 \leq X \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

Tabla II - Frecuencias naturales del sistema mostrado en Figura 1, como función de M y K, para $X_0 = 2/3$. También son raíces las frecuencias (ω^n) para n múltiplo de 3.

M	K	$X_0 = 2/3$					
		Fourier	Exacta	Fourier	Exacta	Fourier	Exacta
0.2	1000	8.62406	8.62165	34.84853	34.86689	86.41232	86.29373
1.0		6.09089	6.08674	29.03868	29.06984	66.12958	66.03426
3.0		4.02784	4.02434	26.78737	26.82151	62.65045	62.55957
0.2	10	6.27608	6.27478	11.05899	11.06143	39.67600	39.67505
1.0		2.91195	2.91148	10.66086	10.66289	39.67091	39.66996
3.0		1.68844	1.68818	10.61544	10.61719	39.67009	39.66917
0.2	1	2.21699	2.21695	9.94922	9.94941	39.49749	39.49740
1.0		0.99179	0.99178	9.94599	9.94617	39.49744	39.49735
3.0		0.57264	0.57263	9.94547	9.94566	39.49743	39.49734

Tabla III - Frecuencias naturales del sistema mostrado en Figura 1, como función de M y K, para $X_0 = 5/6$. También son raíces las frecuencias (ω^n) para n múltiplo de 6.

M	K	$X_0 = 5/6$					
		Fourier	Exacta	Fourier	Exacta	Fourier	Exacta
0.2	1000	9.39164	9.39017	33.65074	33.64187	67.70092	67.70089
1.0		7.84160	7.83681	23.69683	23.69306	55.24537	55.25772
3.0		5.74822	5.74231	19.56702	19.57087	53.18268	53.19685
0.2	10	6.71501	6.71402	10.32439	10.32571	39.67407	39.67449
1.0		3.05735	3.05704	10.14233	10.14319	39.66908	39.66949
3.0		1.76830	1.76813	10.12457	10.12539	39.66827	39.66868
0.2	1	2.22860	2.22858	9.89623	9.89632	39.49748	39.49752
1.0		0.99677	0.99676	9.89514	9.89522	39.49743	39.49747
3.0		0.57550	0.57549	9.89496	9.89505	39.49742	39.49746

con las condiciones de contorno dadas por:

$$W_1(0) = 0 \quad W_2(1) = 0 \quad (10a)$$

$$\left. \frac{d^2 W_1}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{d^2 W_2}{dx^2} \right|_{x=a} = 0 \quad (10b)$$

$$W_1(X_0) = W_2(X_0) \quad (10c)$$

$$\left. \frac{d W_1}{d x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{d W_2}{d x} \right|_{x=x_0} \quad (10d)$$

$$\left. \frac{d^2 W_1}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{d^2 W_2}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad (10e)$$

$$\left. \frac{d^3 W_1}{dx^3} \right|_{x=x_0} - \left. \frac{d^3 W_2}{dx^3} \right|_{x=x_0} = - \frac{\Omega^2 H W_1(X_0)}{1 - \delta^2 \Omega^2} \quad (10f)$$

La solución resulta ser:

$$W_1 = A \cos(\sqrt{\Omega} X) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\Omega} X) \quad (11a)$$

$$+ C \cosh(\sqrt{\Omega} X) + D \sinh(\sqrt{\Omega} X)$$

$$W_2 = E \cos(\sqrt{\Omega} X) + F \operatorname{sen}(\sqrt{\Omega} X) \quad (11b)$$

$$+ G \cosh(\sqrt{\Omega} X) + H \sinh(\sqrt{\Omega} X)$$

Al reemplazar las (11) en las condiciones de contorno (10) se obtiene un sistema homogéneo de ocho ecuaciones en los coeficientes A - F. La solución no trivial corresponde a los ceros del determinante del sistema.

En las tablas I a III, en las columnas marcadas "Exacta", se muestran los resultados obtenidos con la solución (11) a los fines de su comparación. Como puede verse se ha obtenido una excelente concordancia entre ambos valores.

Si bien la solución exacta permite obtener los modos de frecuencias bajas sin problemas, aparecen inconvenientes numéricos cuando se trata de obtener los modos más altos. Estos inconvenientes surgen del hecho que cuando Ω es grande las funciones hiperbólicas son prácticamente coincidentes. Como resultado, el determinante a calcular presenta dos filas (o columnas) que, dependiendo de la precisión numérica con que se trabaje, son iguales en la computadora, resultando indeterminada la posición de los verdaderos ceros. El método de Fourier en cambio permite obtener esas raíces sin inconvenientes y la precisión puede mejorarse aumentando el número de términos.

ANÁLISIS DE RAÍCES COINCIDENTES CON EL POLO

Es necesario estudiar por separado el caso en que la raíz $\Omega = 1/\delta$ es una raíz física

del problema. En efecto, en este caso no es posible arribar a la ecuación (8). En su lugar se ve que el problema está descripto por las ecuaciones:

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} - \rho A \omega^2 W = k Z_0 \delta(x-x_0)$$

y

$$W_0 = W(X_0) = 0$$

Para $N = 3$ dicha solución corresponde a un valor de $\Omega^2 = 41 \pi^4$. Al variar el número de términos, tomando por ejemplo 5 términos, el valor se modifica pero para $N \rightarrow \infty$ la secuencia de valores converge al valor $\Omega^2 \approx 39.006 \pi^4$. La presencia de este cero "real" en el mismo valor de Ω en el que se encuentran los ceros de orden par "ficticios" mencionados arriba no trae aparejados inconvenientes numéricos: ahora la raíz será de orden impar (cuando N sea impar) y podrá ser detectada sin problemas.

OTROS RESULTADOS DE INTERÉS

Empleando el mismo método de desarrollo en serie se resolvió el problema bidimensional de una placa sobre la que se encuentra montada una masa concentrada, mediante un montaje elástico de constante k .

La tabla IV muestra los resultados obtenidos para una placa cuadrada, con una masa puntual acoplada en su centro y para diferentes elecciones de los parámetros. El cálculo se efectuó con 25 términos de la serie obteniéndose una concordancia de 50 partes por millón.

En este caso, en el límite $k = 0$ existen raíces dobles correspondientes a los modos simétricos de vibración (modos degenerados). La degeneración es eliminada por acción del acoplamiento con la masa concentrada produciéndose un corrimiento de las frecuencias en función de la constante de acoplamiento elástica, (vease las columnas 3 y 4 en Tabla IV).

Tabla IV - Frecuencias naturales de la placa cuadrada con una masa en el centro como función de M y K . También son raíces las frecuencias $(n^2 + m^2)\pi^2$ con n ó m pares

M	K	(1)	(2)	(3)	(4)
0.1		1.41259	19.75956	98.69604	98.70415
1.0	0.2	0.44670	19.75947	98.69604	98.70415
5.0		0.19977	19.75946	98.69604	98.70415
0.1		3.14395	19.84277	98.69604	98.73661
1.0	1.0	1.00000	19.84041	98.69604	98.73657
5.0		0.44468	19.84020	98.69604	98.73657
0.1		16.59607	75.83576	98.69604	159.51249
1.0	"	8.49347	57.17458	98.69604	150.56977
5.0		4.06523	54.26250	98.69604	149.51823

Es de hacer notar la similitud de este comportamiento con el de otros sistemas físicos tales como el corrimiento de niveles de energía degenerados de un átomo por acoplamiento con un campo eléctrico externo. Esto, sin embargo, no debe sorprender dada la similitud del formalismo matemático de la teoría de vibraciones lineales con el de ciertos sistemas mecánico-cuánticos [4,5].

AGRADECIMIENTOS

La presente investigación ha sido financiada por CONICET / PID 3000500/88.

REFERENCIAS

1. Leissa, A.W., "Vibrations of Plates", NASA SP180, 1969.
2. Magrab, E.B., "Vibrations of elastic structural members", Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands, 1979.
3. Laura, P.A.A., Susemihl, E.A., Pombo, J.L., Luisoni, L.E. and Gelos, R., "On the dynamic behaviour of structural elements carrying elastically mounted concentrated masses", Applied Acoustics 10, 1977, págs. 121-145.
4. Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. and Lalöe, "Quantum Mechanics", Vol. 2, Herman and John Wiley and Sons, New York, 1977.
5. Merzbacher, E., "Quantum Mechanics", John Wiley and Sons, New York, 1970.