

ENRUGAMENTO DE MEMBRANAS ANULARES

Djenane C. Pamplona
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
22453 - Rio de Janeiro - RJ - BRASIL

RESUMO

No presente trabalho estuda-se a estabilidade de membranas axissimétricas homogêneas, isotrópicas e incompressíveis, sujeitas à deformações finitas. Nestas membranas inicialmente planas, atuam cargas axiais distribuídas \vec{f} e \vec{m} . As equações de equilíbrio e condições de contorno são obtidas através do princípio da energia potencial estacionária. Considera-se o material da membrana como sendo neo-Hookeano. Através da teoria de pequenas perturbações fez-se o estudo da estabilidade da membrana, comprovando-se com um modelo experimental rudimentar.

ABSTRACT

The present work studies the stability of homogeneous, isotropic, incompressible membranes, subjected to finite deformations. In those initially flat membranes, vertical and moment loads \vec{f} and \vec{m} , acts. The general equilibrium equations and boundary conditions were established through the principle of stationary potential energy. The material was considered as being neo-Hookean. Through small perturbations theory the stability was studied and checked with a simple experimental model.

INTRODUÇÃO

O estudo de membranas sujeitas a grandes deformações fez-se cada dia mais necessário. Seu emprego é imprescindível no estudo de balões meteorológicos, na bioengenharia estudando cartilagens e artérias, só para citar algumas das inúmeras aplicações.

A referência clássica na teoria não linear de membranas é Green e Adkins [1]. Porém, atualmente existem muitos trabalhos envolvendo membranas em grandes deformações. Enquanto muitos pesquisadores estão preocupados com as equações de equilíbrio das referidas membranas, este trabalho enfoca a instabilidade e o estudo pós-crítico.

O presente trabalho estuda membranas anulares de material homogêneo, isotrópico do tipo neo-Hookeano. Estas membranas estão sujeitas a cargas transversais axissimétricas do tipo força e momento, estando as configurações de equilíbrio obtidas, em [2].

A carga momento ao agir, provoca uma distorção e conseqüente mudança das direções principais. Devido à hipótese de membrana, esta não apresenta resistência à compressão, o que provocará o aparecimento de rugas na membrana deformada.

Através da teoria de pequenas perturbações elásticas [3], pode-se obter o número de rugas que ocorrerá na membrana após a bifurcação.

Um trabalho experimental qualitativamente comprova os resultados obtidos numericamente.

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Como os materiais geralmente utilizados em grandes deformações são elastômeros, assume-se o material isotrópico, elástico e incompressível do tipo Neo-Hookeano, cuja função densidade de energia W é:

$$W = C_1 (I_1 - 3) \quad (1)$$

Sendo o primeiro invariante de deformação, I_1 :

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2)$$

onde λ_i são as extensões principais.

Como assume-se uma completa simetria, elástica e geométrica da membrana deformada e indeformada. A superfície média será tomada como superfície de referência.

Considerando-se o sistema de coordenadas (ρ^*, θ) fixo no espaço, as coordenadas de um ponto genérico, P_0 , da superfície indeformada são:

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad (3)$$

$$x_2 = \rho \sin \theta. \quad (4)$$

Após a deformação, provocada pelos esforços \vec{f} e \vec{m} , as coordenadas do ponto genérico da superfície média da membrana deformada, P , são:

$$X^1 = r \cos (\theta + \beta), \quad (5)$$

$$X^2 = r \sin (\theta + \beta), \quad (6)$$

$$X^3 = z, \quad (7)$$

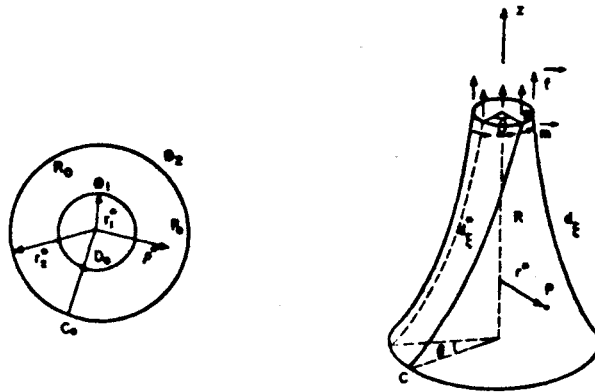


Figura 1: superfície média da membrana

sendo:

$$r = r(\rho), \quad \beta = \beta(\rho) \quad \text{e} \quad z = z(\rho),$$

grandezas estas que quando é o caso foram adimensionalizadas, através de sua divisão pelo menor raio da membrana r_1^* .

Utilizando-se os tensores métricos como em [4], é possível obter o primeiro invariante de deformação,

$$I_1 = r'^2 + r^2 \beta'^2 + z'^2 + \frac{r^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{r^2(r'^2 + z'^2)}, \quad (8)$$

onde foi levada em consideração a incompressibilidade do material e

sendo:

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\rho}. \quad (9)$$

A energia elástica de deformação, E , é a integral volumétrica de função W em R_0 , isto é:

$$E = \iiint_{h_0} r_1^{*3} \rho h_0 W d\rho d\theta \quad (10)$$

onde $h_0 = h_0(\rho)$ é a espessura.

O termo referente ao trabalho realizado, T_r , pelos esforços \vec{f} e \vec{n} é:

$$T_r = \int_{\phi_1} r_1^* f z ds + \int_{\phi_1} n B ds \quad (11)$$

sendo: $ds = r_1^* d\theta$.

A energia potencial total, \mathcal{V} , definida como a diferença entre a energia elástica, E , e o trabalho realizado, $Tr.$, pode ser escrita

$$\mathcal{V} = E - Tr. \quad (12)$$

como \mathcal{V} é estacionária, utilizando-se o teorema da divergência de Gauss e o lema fundamental do cálculo variacional obtêm-se:

Equações de Equilíbrio:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[- \frac{r' T^*}{z} \right] = 2\rho \left\{ r \beta'^2 + \frac{r}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{r^3 (r'^2 + z'^2)} \right\} \quad (13)$$

$$z' = \frac{T^*}{2\rho \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{r^2 (r'^2 + z'^2)} \right\}} \quad (14)$$

$$\beta' = - \frac{K^*}{2 r^2 \rho} \quad (15)$$

Condições de contorno:

$$r(1) = 1$$

$$r(r_2) = r_2 \quad (16)$$

$$z(r_2) = 0$$

$$\beta(r_2) = 0$$

sendo:

$$T^* = \frac{F}{2^{\frac{1}{2}} r_1^{\frac{1}{2}} C_1 h_0} \text{ e } K^* = \frac{M}{2^{\frac{1}{2}} r_1^{\frac{3}{2}} C_1 h_0}$$

O problema foi solucionado através de métodos numéricos, utilizando o método de Runge Kutta de quarta-ordem, método do tiro e das aproximações sucessivas, exaustivamente comentado em [4].

INSTABILIDADE

Diz-se que há estabilidade elástica na membrana se em todos os pontos da mesma, a menor tensão principal σ , for maior que ϵ , sendo ϵ positivo e tão pequeno quanto se desejar. A partir de então um acréscimo na carga momento K^* , provocará o aparecimento de rugas, já que pela hipótese de membrana esta não apresenta resistência à compressão.

Em [4] foi observado que até uma determinada carga momento, \bar{K}^* , a tensão σ_{\min} ocorre no bordo externo $\rho = r_2$, a partir desta carga surge um ponto de mínimo relativo, ρ , próximo ao menor bordo, $r = 1$.

A base da teoria de perturbações elásticas é que qualquer parâmetro, v , pode ser escrito como a soma da solução conhecida, v , com o parâmetro perturbado \tilde{v} . Obtém-se então novas equações para \tilde{v} , que podem ser mais fáceis de solucionar que a equação original.

Neste estudo utiliza-se teoria de perturbações linearizadas, sendo \tilde{v} muito pequena os termos das equações que contiveram potências das quantidades perturbadas serão ignorados.

Com o aparecimento das rugas o problema deixa de ser axissimétrico. Sendo necessário determinar as equações de equilíbrio para o novo problema.

Utilizando-se a mesma formulação variacional do item anterior, onde:

$$I_1 = r_\rho^2 + r_\beta^2 + z_\rho^2 + \frac{r_\theta^2 + r^2(1+\beta_\theta)^2 + z_\theta^2}{\rho^2} + I_3 \quad (17)$$

sendo:

$$(\)_\rho = \frac{\partial(\)}{\partial \rho} \quad \text{e} \quad (\)_\theta = \frac{\partial(\)}{\partial \theta}, \quad \text{obtem-se}$$

$$W = W(r, r_\theta, r_\rho, \beta, \beta_\theta, \beta_\rho, z, z_\theta, z_\rho, \rho, \theta), \quad (18)$$

e a energia potencial total pode ser escrita.

$$\mathcal{V} = \iint_{R_0} r_1^* \rho h_0 W d\rho d\theta - \int_{\phi_1} f z ds - \int_{\phi_1} m s ds. \quad (19)$$

Por ser \mathcal{V} estacionária, obtém-se:

Equações de equilíbrio:

$$\rho W_r - \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho W_{r_\rho}] - \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho W_{r_\theta}] = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho W_{z_\rho}] - \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho W_{z_\theta}] = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho W_{\beta_\rho}] - \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho W_{\beta_\theta}] = 0 \quad (22)$$

Condições de contorno:

$$z(r_2) = \beta(r_2) = 0 \quad (23)$$

$$r(1) = 1 \quad r(r_2) = r_2 \quad (24)$$

$$\rho W_{\beta_\rho} + \rho W_{\beta_\theta} - M = 0 \quad \text{em } C_2 \quad (25)$$

$$\rho W_{z_\rho} + \rho W_{z_\theta} - F = 0 \quad (26)$$

Considerando-se as perturbações

$$r = \bar{r} + \tilde{r} \quad (27)$$

$$z = \bar{z} + \tilde{z} \quad (28)$$

$$\beta = \bar{\beta} + \tilde{\beta} \quad (29)$$

e desprezando-se as potências de ordem superior das grandezas perturbadas, obtêm-se:

Equações diferenciais

$$\rho^2 \tilde{r}_{\rho\rho} + \rho \tilde{r}_{\rho} + \tilde{r}_{\theta\theta} - \tilde{r}(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 1) - 2\tilde{r} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{\beta} - 2\tilde{r} \tilde{\beta}_{\theta} = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho^2 \tilde{\beta}_{\rho\rho} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{\beta}_{\theta\theta} + \tilde{\beta}_{\rho}(\rho \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\tilde{r}r \rho^2) + 2\tilde{\beta}_{\rho}(\tilde{r}r \rho^2 + \rho \tilde{r}_{\rho} + \tilde{r}r \rho^2) + 2\tilde{r}r \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \\ + 2\tilde{r}r \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{\beta}_{\rho\rho} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

condições de contorno:

$$\tilde{r}(1) = \tilde{r}(r_2) = 0 \quad (32)$$

$$\tilde{\beta}(r_2) = 0 \quad \tilde{\beta}_{\rho} = -\tilde{\beta}_{\theta} \text{ em } \rho = 1 \quad (33)$$

Supondo-se as perturbações da forma:

$$\tilde{\beta} = V^* \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \frac{(\rho - \bar{\rho})}{(\bar{\rho} - 1)} \right] \cos n(\theta - T) \quad e \quad (34)$$

$$\tilde{r} = V \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \frac{(\rho - \bar{\rho})}{(\bar{\rho} - 1)} \right] \text{sen } n(\theta - T). \quad (35)$$

onde

$$T = - \frac{[\rho^2 + \frac{T^*2}{4}]}{\rho} + \ln(\rho + [\rho^2 + \frac{T^*2}{4}]^{1/2}) + Cte \quad e$$

$\bar{\rho}$ é a coordenada do mínimo relativo da menor tensão principal, referido anteriormente.

Utilizando-se o método de Galerkin, nas equações diferenciais (30) e (31) com a substituição de (34) e (35). Obtêm-se após a integração, uma equação relacionando a carga momento \bar{K}^* e o número de rugas n , supondo-se a existência de uma solução não trivial para o problema.

Denominaremos de carga crítica \bar{K}^* a menor carga momento das acima obtidas, e com isso torna-se possível obter o número de rugas \bar{n} que ocorrerá na membrana deformada.

RESULTADOS

Com a formulação matemática até aqui desenvolvida, torna-se possível obter o número de rugas para a membrana de borracha, com as seguintes dimensões:

$$r_2 = 5,20 \text{ cm}$$

$$r_1 = 1,08 \text{ cm}$$

$$h_0 = 0,10 \text{ cm}$$

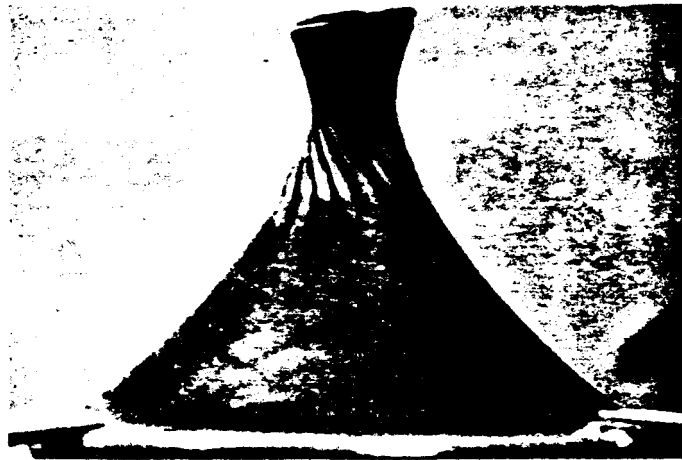
em que foi aplicada uma força T^* de 10.387, obtendo-se para deslocamento máximo $z = 7.78$ cm.

Através da metodologia descrita, obtém-se a tabela abaixo:

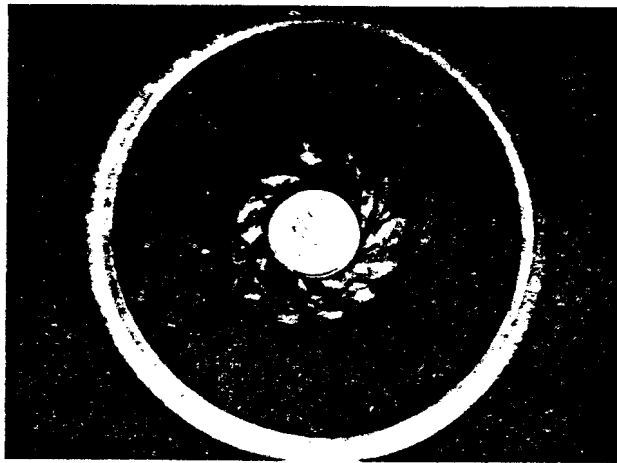
K^*	3.67	3.57	3.56	3.54	3.62	3.70	3.80
n	7	8	9	10	11	12	13

Tabela 1 - Relação entre rotação e número de rugas

indicando a carga momento crítica, $\bar{K}^* = 3.54$, que corresponde à formação de 10 rugas. Rugas estas que podem ser visualizadas na Fotografia 1 e 2.



Fotografia 1 - Membrana deformada



Fotografia 2 - Membrana deformada com rugas imprimidas

CONCLUSÕES

Nos exemplos rodados observou-se uma total concordância entre os resultados obtidos para carga momento crítica e os resultados obtidos em [4], onde utilizou-se o critério da menor tensão principal.

A pequena discrepância entre o número de rugas obtido experimentalmente e numericamente deve-se à diversos fatores, sendo os dois mais importantes, a modelagem do material como sendo neo-Hookeano, o que foi feito devido a simplicidade das equações em detrimento do pequeno "necking" observado na membrana, típico dos materiais de Mooney-Rivlin e a precariedade do trabalho experimental, que tinha como objetivo somente uma análise qualitativa do problema.

Em futuro próximo pretende-se incorporar ao problema matemático, maior não linearidade do material e fazer um estudo experimental cuidadoso do problema aqui estudado.

REFERÊNCIAS

1. Green, A.E. e Adkins, J.E. - "Large Deformations on Non-linear Continuum Mechanics" Oxford Press, 1960.
- 2 - Pamplona, D.C. e Bevilacqua L. - "Large Deformations Under Axial Force and Moment Loads of Initially Flat Annular Membranes". International J. Non-linear Mech. - a aparecer.
- 3 - Ratner A.M., "Tensile Stability of Cylindrical Membranes" - Int. J. Non-linear Mech., vol. 18, 1983, págs. 133-147.
- 4 - Pamplona, D.C. - "Análise do Comportamento e Instabilidade de Membranas Anulares Inicialmente Planas sob a Ação de Cargas de Bordo Axissimétricas - Tese de Doutorado - PUC-Rio - Rio de Janeiro - 1988.