# MINIMIZAÇÃO DE BANDA EM SISTEMAS COMPUTACIONAIS BASEADOS NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Marcio A. Ramalho, Marcio R.S. Corrêa
Departamento de Estruturas , Escola de Eng. de S. Carlos - USP
Av. Carlos Botelho 1465 , São Carlos, SP, Brasil

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma técnica para a renumeração automática dos nós de uma estrutura, otimizando o tempo de processamento e permitindo a introdução dos dados da forma mais conveniente ao usuário. Inicialmente são apresentados breves comentários sobre os mais conhecidos e eficientes processos de renumeração já desenvolvidos. Em seguida, o trabalho mostra alguns detalhes a respeito de dois desses processos : a estratégia Cuthill-Mckee e a estratégia R.Collins. Logo após é apresentado um novo procedimento, desenvolvendo-se uma série de exemplos comparativos.

## ABSTRACT

This work shows a technique for automatic nodal renumbering to reach computation time otimization and to allow a data entry in most convenient form for practical users. At first, it gives a brief description about known and efficient renumbering processes. Then, the Cuthill-McKee and R. Collins strategies are discussed. In addition, the work presents an alternative strategy, with a series of comparative examples.

## INTRODUÇÃO

Existe um grande número de procedimentos para a minimização da banda de uma matriz de rigidez. Inicialmente a maioria dos pesquisadores que preocuparam-se com esse assunto propuseram processos que trabalhavam diretamente na matriz, realizando permutações de linhas e colunas. As referências [1], [2], [3] e [4] são trabalhos representativos dessa fase.

Entretanto, após um trabalho pioneiro de Cuthill e McKee [5], o desenvolvimento do tema deu-se por procedimentos baseados na teoria dos grafos. Isso porque realizar permutações de linhas e colunas de uma matriz, corresponde a renumerar os vértices de um grafo. Desse modo, o desenvolvimento dos processos de minimização passou a ter uma base teórica mais consistente, a teoria dos grafos, ao mesmo tempo que algoritmos mais eficientes foram gerados. Como exemplos desse desenvolvimento têm-se as referências [6], [7], [8], [9] e [10]. Neste trabalho em especial, quando se menciona a minimização de banda de uma matriz, se está pensando em processos baseados na teoria dos grafos.

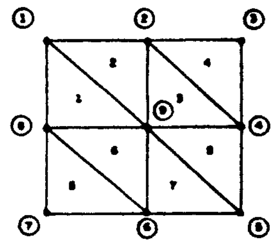
## A ESTRATÉGIA CUTHILL-MCKEE

Esta estratégia de minimização aparece originalmente concebida em [5]. Posteriormente sofreu algumas alterações, visando especificamente a minimização de perfís, [7]. Talvez seja a estratégia de minimização mais utilizada e testada desde que esses algoritmos passaram a ser desenvolvidos.

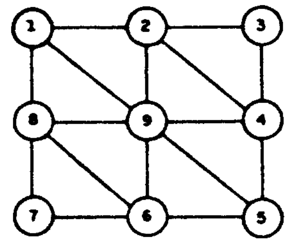
A estratégia de Cuthill-Mckee basea-se na teoria dos grafos. Em poucas palavras, consiste em determinar uma certa quantidade de nós que tenham boas condições de tornarem-se sementes de esquemas de numeração eficientes. Logo em seguida esses esquemas são gerados e o melhor dentre eles, seja para a obtenção da banda mínima ou perfil mínimo, utilizado para a definição dos números das equações.

Na presente estratégia, os nós a serem usados como sementes são aqueles que possuem a menor quantidade de nós da estrutura a igual distância. Isso quer dizer que são os nós de extremidades da estrutura, ou observando-se o grafo correspondente, aos vértices de extremidade.

Tomando-se o exemplo da figura 1 a), pode-se definir como grafo correspondente o apresentado na figura 1 b).



a) Estrutura



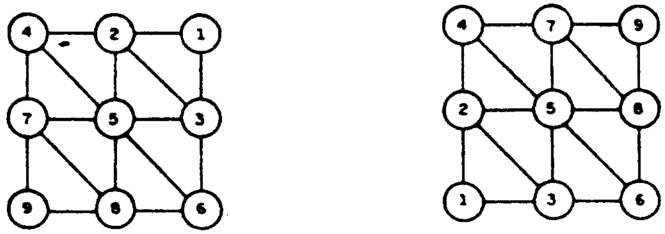
b) Grafo

Figura 1 - Estrutura Exemplo e Grafo Correspondente

Através da observação desse grafo, onde cada vertice é um nó da estrutura, pode-se definir a distância entre dois nós como sendo o menor número de segmentos entre vértices que ligam esses dois nós, ou os vértices correspondentes a esses nós. No caso a distância entre os nós 4 e 7 é três, pois três é o menor número de segmentos a serem percorridos para ir-se do nó, ou vértice, 4 ao nó, ou vértice, 7. Assim sendo, os nós que terão o menor número de nós à mesma distância serão os que se posicionam nas extremidades, no caso 3 e 7. Portanto, na situação considerada, as sementes para os esquemas a serem gerados serão os dois nós mencionados.

A geração dos esquemas de renumeração de nós da estrutura, ou vértices do grafo, é basicamente a mesma para qualquer algoritmo desse tipo. Trata-se de, adotado o nó ou vértice de partida, fazer uma numeração em sequência, de um nó para as sua conexões imediatas, até que todos os nós estejam numerados. No caso da estratégia Cuthill-Mckee, a sequência de conexões para um determinado nó é montada seguindo uma certa hierarquia : inicialmente são considerados os nós de menor grau de conexão, ou seja, os nós que tem menor número de ligações.

Considerando-se ainda o exemplo da figura 1, pode-se tentar explicar o algoritmo de geração mostrando-se os esquemas obtidos através da consideração das sementes 3 e 7. No caso, esses esquemas são apresentados na figura 2, a) para o nó 3 e b) para o nó 7. Em ambos os casos a maior diferença entre dois nós conectados foi de três. Assim sendo, qualquer dos dois esquemas pode ser utilizado para a renumeração dos nós da estrutura. Sobre esse esquema definido é que se daria a numeração das equações do problema.



a) Semente 3 b) Semente 7

Figura 2 - Esquemas de Renumeração Cuthill-McKee

O primeiro ponto negativo dessa estratégia de minimização é o grande trabalho computacional envolvido na determinação das sementes. Para que essa escolha seja realizada, é necessário que para cada nó da estrutura seja calculada a distância a todos os outros nós. A partir daí é que se pode definir o máximo número de nós a igual distância, sendo esse dado utilizado para a seleção do nó, ou dos nós, que possuem o menor número de nós a igual distância. Esses nós é que serão armazenados como as sementes dos esquemas a serem gerados.

Outro ponto negativo é que para cada semente é feita uma renumeração completa de todos os nós da estrutura. Após a geração de todos esses esquemas é que será escolhido o que melhor se adapta ao objetivo de gerar-se uma pequena banda na matriz de rigidez. Existem problemas para os quais podem ser selecionadas um grande número de sementes, causando um excessivo tempo de processamento.

Essas deficiências foram percebidas por alguns pesquisadores, que propuseram caminhos alternativos. Um exemplo disso é o trabalho de Gibbs, Poole e Stockmeyer [10]. Entretanto, mesmo que o tempo de processamento seja significativamente reduzido, sempre existe a possibilidade de uma falha na determinação das sementes, principalmente quando são consideradas algumas situações muito particulares. Desse modo, podem ser gerados esquemas que se afastem da banda mínima, tornado-se o algoritmo pouco eficiente.

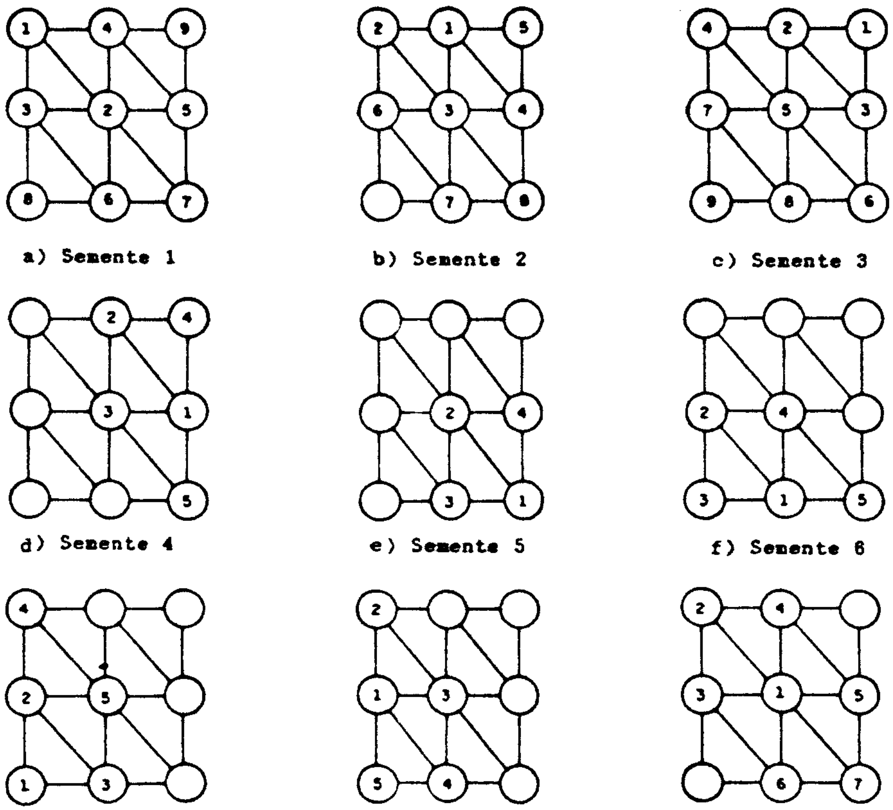
## ESTRATÉGIA R. COLLINS

A presente estratégia encontra-se explicada com maiores detalhes em [8]. O procedimento de trabalho é extremamente simples. Trata-se de iniciar a renumeração dos nós tomando como semente cada nó da estrutura. Entretanto, essas renumerações podem não chegar ao final pois o algoritmo prevê o cálculo da diferença nodal obtida passo a passo. Caso tenha sido obtida uma diferença maior que a maior diferença de uma renumeração já pronta, o esquema é abandonado, passando-se a uma outra semente.

Como pode-se perceber, a segurança do processo é bastante grande pois ao passar por todos os nós da estrutura, gerando esquemas de renumeração para cada um deles, o algoritmo garante a obtenção de um esquema de banda mínima, ou pelo menos muito próxima da mínima. Já o tempo de processamento, que à primeira vista deveria ser muito grande, revela-se bom em comparação com os obtidos por outros processos derivados da estratégia Cuthill-Mckee. Isso porque aquelas estratégias demandam um grande trabalho computacional para determinar as sementes, enquanto o presente algoritmo passa imediatamente a gerar esquemas sem essa preocupação. Além disso, o código necessário à implementação do algoritmo fica sensivelmente reduzido em relação ao procedimento Cuthill-McKee.

Para mostrar-se o procedimento da presente estratégia na geração de esquemas de renumeração, vai-se tomar a mesma estrutura já considerada no método anterior. Conforme foi mencionado, o algoritmo inicia renumerações para todos os nós da estrutura. Essas renumerações também seguem o procedimento básico já mencionado para o caso anterior. Adotado o nó de partida os novos números são colocados em sequência para as conexões do nó que se considera. Entretanto, ao contrário da estratégia Cuthill-Mckee, não existe uma hierarquia entre as conexões do nó, sendo a numeração realizada pela ordem em que elas vão naturalmente aparecendo.

Tomando-se o exemplo mencionado, para o nó número 1 o esquema de renumeração seria completado, obtendo-se o resultado mostrado na figura 3 a). A máxima diferença entre número de nós obtida para esse esquema seria DIF = 5. Para o nó 2, o esquema seria abandonado na situação mostrada pela figura 3 b), ao ser obtida também uma diferença de 5. Já para o nó 3, o esquema chegaria ao final da renumeração, obtendo-se DIF = 4, conforme mostra-se em 3 c). A partir daí, todos os esquemas seriam abandonados antes de serem completados pois as diferenças obtidas igualam ou ultrapassam o valor 4. Para um perfeito entendimento da questão os esquema parcialmente gerados para os nós 4, 5, 6, 7, 8 e 9 também encontram-se na figura 3, letras d), e), f), g), h) e i), respectivamente.



a) Semente 1 b) Semente 2 c) Semente 3

d) Semente 4 e) Semente 5 f) Semente 6

g) Semente 7 h) Semente 8 i) Semente 9

**Figura 3 - Esquemas de Renumeração R. Collins**

Um ponto negativo da presente estratégia de renumeração é o fato das conexões de um determinado nó serem consideradas sua ordem natural. Essa ordem obtida depende da numeração dos elementos que interligam os nós e portanto é aleatória. Assim sendo, o caminho de renumeração pode ser prejudicado, resultando em uma banda maior do que a que poderia ser obtida se as conexões fossem consideradas de acordo com algum procedimento lógico defensável.

## ESTRATÉGIA PROPOSTA POR ESTE TRABALHO

A partir da constatação da deficiência mencionada no item anterior, pode-se sugerir um procedimento alternativo. Trata-se de uma reorganização das conexões nodais, colocando-as em ordem crescente de grau. Assim sendo, inicialmente serão numerados os nós que possuem graus mais baixos, ou seja, que possuem um menor número de conexões. Essa providência é importante para melhorar o caminho da renumeração, tornando-o mais lógico e livre de condições aleatórias indesejáveis.

É relativamente simples justificar esse procedimento se considerar-se que o grau de um nó indica o número de nós que se ligam a ele. Portanto, em qualquer etapa do processo, serão inicialmente atribuídos números aos nós que se encontram nas extremidades do grafo. Assim sendo é provável que a renumeração caminhe de uma forma mais consistente com a própria teoria adotada, resultando em menores valores para a banda.

## COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Da leitura crítica da vasta bibliografia existente sobre o assunto de minimização da banda de uma matriz de rigidez, realmente pareceu que os dois métodos aqui apresentados podem ser considerados melhores. Nesse caso, a avaliação deve envolver parâmetros como simplicidade, eficiência e também a segurança de que o processo não apresente resultados absurdos para determinados problemas específicos.

Assim sendo, foram testados os algoritmos mencionados para uma variada gama de problemas existentes. Nesses testes foram controlados o tempo de processamento e a máxima diferença nodal obtida no processo. Não comparou-se diretamente a banda da matriz pois essa grandeza depende de alguns fatores que extrapolam a atuação dos minimizadores.

Os resultados obtidos estão organizados na tabela 2.8. São 23 estruturas bastantes variadas (elementos com dois, três e quatro nós, consideração de diafragmas rígidos, etc), que devem produzir um universo de análise bastante significativo. Nessa tabela são apresentados : o número de nós do problema (Nós); a máxima diferença entre nós conectados antes da atuação do minimizador (Dif Orig); e para os três processos testados, a diferença conseguida (Dif) e o tempo de execução em minutos e segundos (Tempo). Resta ressaltar que "Cuthill" indica a estratégia Cuthill-McKee."Collins 1" o algoritmo original desenvolvido por R. Collins. Já "Collins 2" indica o algoritmo de Collins, porém com as modificações propostas por este trabalho.

| Est | Nós | Dif Orig | Cuthill | | Collins 1 | | Collins 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Dif | Tempo | Dif | Tempo | Dif | Tempo |
| 1 | 40 | 37 | 33 | 00:03 | 36 | 00:01 | 33 | 00:01 |
| 2 | 44 | 41 | 37 | 00:03 | 40 | 00:01 | 37 | 00:01 |
| 3 | 34 | 15 | 11 | 00:01 | 14 | 00:01 | 11 | 00:01 |
| 4 | 42 | 39 | 31 | 00:01 | 32 | 00:01 | 30 | 00:01 |
| 5 | 90 | 87 | 82 | 00:24 | 86 | 00:06 | 82 | 00:07 |
| 6 | 56 | 53 | 48 | 00:07 | 52 | 00:02 | 48 | 00:02 |
| 7 | 379 | 116 | 20 | 00:24 | 21 | 00:17 | 20 | 00:16 |
| 8 | 379 | 365 | 24 | 00:29 | 24 | 00:20 | 24 | 00:20 |
| 9 | 413 | 386 | 27 | 00:37 | 27 | 00:26 | 27 | 00:26 |
| 10 | 483 | 440 | 22 | 00:38 | 23 | 00:26 | 22 | 00:25 |
| 11 | 515 | 436 | 28 | 00:57 | 30 | 00:45 | 28 | 00:44 |
| 12 | 546 | 507 | 32 | 00:56 | 33 | 00:43 | 32 | 00:44 |
| 13 | 577 | 391 | 28 | 00:53 | 29 | 00:39 | 28 | 00:39 |
| 14 | 592 | 501 | 26 | 01:35 | 27 | 00:41 | 26 | 00:42 |
| 15 | 696 | 524 | 37 | 01:56 | 37 | 01:16 | 37 | 01:16 |
| 16 | 726 | 622 | 32 | 01:29 | 32 | 01:02 | 32 | 01:02 |
| 17 | 753 | 658 | 23 | 02:07 | 22 | 01:17 | 22 | 01:20 |
| 18 | 933 | 720 | 40 | 02:48 | 39 | 02:11 | 39 | 02:08 |
| 19 | 1064 | 906 | 44 | 03.29 | 44 | 02:31 | 44 | 02:29 |
| 20 | 1115 | 1103 | 45 | 03:45 | 46 | 02:43 | 45 | 02:40 |
| 21 | 1172 | 1123 | 44 | 03:51 | 46 | 02:45 | 44 | 02:48 |
| 22 | 1179 | 652 | 43 | 04:46 | 46 | 02:48 | 43 | 02:35 |
| 23 | 1250 | 1079 | 54 | 05:56 | 54 | 04:05 | 53 | 04:10 |
| Soma total | | | 811 | 37:17 | 840 | 25:07 | 807 | 24:57 |

tabela 2.8

Pela observação dos resultados pode-se concluir que a diferença de nós obtida com os três processos apresenta poucas variações. Entretanto, a estratégia "Collins 2" apresentou em todos os exemplos processados a menor diferença, ora igualando-se a "Cuthill", na maior parte das vezes, ora igualando-se a "Collins 1", apenas duas vezes, ou mesmo conseguindo um valor inferior às duas, também duas vezes.

Quanto ao tempo de processamento, os valores verificados para "Collins 1" e "Collins 2" praticamente se equivalem. Entretanto, quando comparam-se esses valores com os obtidos para "Cuthill" verifica-se que a vantagem conseguida pelos primeiros é bastante significativa, situando-se em torno de 33 %.

## CONCLUSÕES

Pelos resultados obtidos pode-se concluir que o processo de renumeração obtido atende aos requisitos básicos de um procedimento desse tipo : segurança, simplicidade e eficiência. Segurança porque em nenhuma hipótese o resultado afasta-se da banda mínima. Simplicidade porque não se necessita de nenhum procedimento complexo e de difícil programação. Eficiência porque os resultados são realmente muito bons, em especial quando comparados aos obtidos por procedimentos já desenvolvidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Alway, G.G.; Martin, D.W.; "An Algorithm for Reducing the Bandwidth of a Matrix of Simetric Configuration"; Computer Journal; Vol 8; 1965.

[2] Akyus, F.A.; Utku, S.; "An Automatic Relabeling Scheme for Bandwidth Minimization of Stiffness Matrices"; Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics; Vol 6; 1968.

[3] Rosen, R.; "Matriz Bandwidth Minimization"; Proceedings of the 23rd National Conference Association for Computing Machinery; Brandon Systems Press; Princeton, NJ; 1968.

[4] Grooms, H.R.; "Algorithm for Matrix Bandwidth Reduction"; ASCE, J.

Structural Division; Vol 98; 1972.

[5] Cuthill, E.; McKee, J.; "Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices"; Proc. 24th National Conference of the Association for Computing Machinery, ; New York, 1969.

[6] King, I.P.; "An Automatic Reordering Scheme for Simultaneous Equations Derived from Network Systems"; International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 2; 1970.

[7] George, A.; "Computer Implementacion of the Finite Element Method"; STAN-CS-71_208, Computer Science Dept.; Stanford University; Stanford; 1971.

[8] Collins, R.J.; "Bandwidth Reduction by Automatic Renumbering"; International Journal for Numerical Methods in Engineering; Vol 6; 1973

[9] Roberts, E.; "Relabeling of Finite Element Meshes Using a Random Process"; TM X-2660, NASA ; Lewis Research Center; Cleveland; 1972

[10] Gibbs, N.; Poole, W.G.; Stockmeyer, P.K.; "An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix"; SIAM, J. Numer. Anal.; Vol 13; No. 2; 1976.