

CONSIDERACIÓN DE LA INERCIA ROTATORIA DE UNA MASA RIGIDAMENTE ADOSADA A UNA VIGA: CASO GENERAL

Santiago Maíz^{*†}, Diana V. Bambill^{*†} y Carlos A. Rossit^{*†}

* Departamento de Ingeniería
Instituto de Mecánica Aplicada
Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253 (B8000CPB), Bahía Blanca, Argentina

† Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

e-mail: smaiz@uns.edu.ar , dbambill@criba.edu.ar , carossit@criba.edu.ar

Key words: Inercia Rotatoria, Masas, Vigas, Frecuencias Naturales, Vibraciones.

Abstract. *En el diseño racional de un elemento estructural el ingeniero de diseño necesita conocer, imperiosamente, los parámetros esenciales que definen el comportamiento dinámico de una estructura. En un enorme porcentaje de casos, vigas y placas o losas soportan máquinas o motores que ejercen esfuerzos dinámicos actuando a frecuencias a prima facie conocidas. Por otra parte, son los esfuerzos dinámicos aplicados transversalmente al elemento estructural los que poseen mayor influencia en el comportamiento dinámico del sistema acoplado estructura – máquina .*

En el caso de contar con información sobre elementos estructurales con masas adosadas comúnmente se trata de masas puntuales.

Es evidente que si bien la aproximación “puntual” es conveniente desde el punto de vista de su tratamiento físico – matemático, ello no condice con las condiciones reales del problema en cuestión. En primera instancia el lugar que ocupa el motor o máquina es pequeño en relación con las dimensiones de la estructura y la aproximación que corresponde a aplicarlo en “un punto” es razonablemente buena desde el punto de vista de la consideración del comportamiento traslacional del sistema acoplado pero la inercia rotacional del sistema electromecánico en operación puede ser considerable y esto afectará las frecuencias naturales y modos normales del sistema.

En virtud de ello, en el presente trabajo se halla la solución analítica del problema de vibraciones libres de una viga Bernoulli – Euler que soporta una masa de la que se tiene en cuenta su inercia rotatoria, considerándose condiciones generales de borde en sus extremos a través de vínculos elásticamente restringidos a rotación y traslación.

1 INTRODUCCIÓN

El problema de la determinación de las frecuencias naturales de vibración de vigas que contienen masas adosadas rígidamente, ha sido estudiado por renombrados investigadores como por ejemplo K. H. Low (2003)¹, M.J. Maurizi et al. (1996)². En estos casos se ha considerado la masa puntual despreciándose la inercia rotacional de la misma.

C. H. Chang (2000)³ ha tratado una viga tipo Rayleigh para el caso simplemente apoyada con una masa rígidamente adosada, teniendo en cuenta su inercia rotacional, aunque mantiene fija la posición de la masa en el centro de la viga.

P. A. A. Laura et al. (1986)⁴ realizaron aproximaciones por métodos analíticos y numéricos en vigas y placas que soportan masas adosadas rígidamente en las que se tiene en cuenta su inercia rotacional para distintas condiciones de vínculo del elemento como así también para distintas posiciones de las masas.

El presente trabajo es una reseña de un trabajo de los autores⁵ sometido a publicación en el que se estudia las frecuencias naturales de vibración de una viga Bernoulli – Euler con condiciones de vínculo generales en sus extremos, a la que se le ha adosado rígidamente una cantidad finita de masas en posiciones arbitrarias, teniendo en cuenta su inercia rotacional.

En una revisión de la literatura técnico-científica, los autores no han hallado trabajos que presenten tanta generalidad en su planteo.

Con todas estas variables en juego se puede representar una importante cantidad de casos particulares encontrados en la literatura científica y en manuales técnicos.

Se obtuvieron valores de las primeras cinco frecuencias naturales para diversas configuraciones particulares del modelo general, en las que se puede observar la influencia de la inercia rotacional de la masa.

El modelo compara en forma excelente con situaciones particulares disponibles en la literatura.

El modelo planteado puede utilizarse para determinar velocidades críticas de árboles rotantes en los que las masas modelan volantes de inercia o elementos de transmisión, ya que la ecuación que gobierna el sistema es la misma⁶.

2 MODELO EN CONSIDERACIÓN

Consideremos la viga de la Figura 1 con dos masas puntuales m_1 y m_2 , cuyas inercias rotacionales con respecto a un eje perpendicular al plano son I_1 y I_2 , adosadas en las posiciones x_1 y x_2 respectivamente. Dicha viga se encuentra vinculada elásticamente tanto a la rotación como a la traslación en sus extremos $x = 0$ y en $x = l$.

Los símbolos k_1 y k_2 representan las constantes de rigidez traslacional mientras que k_3 y k_4 representan los coeficientes de rigidez rotacional.

A es el área de la sección transversal de la viga, I su momento de inercia centroidal; E y ρ son el módulo de Young y la densidad del material de la viga.

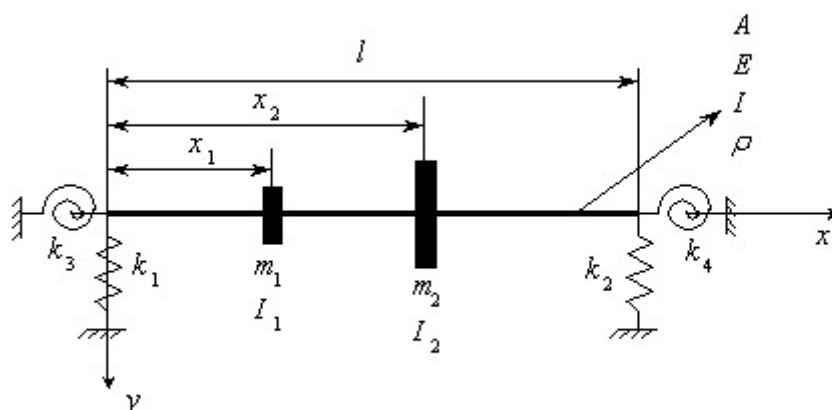


Figura 1: Modelo considerado

En primer lugar introducimos la siguiente variable adimensional:

$$\eta = \frac{x}{l} \quad \text{por lo tanto} \quad \eta_1 = \frac{x_1}{l} \quad \text{y} \quad \eta_2 = \frac{x_2}{l} \quad (1)$$

Cuando el sistema se encuentra vibrando en uno de sus modos naturales, la ecuación gobernante en cada tramo de la viga entre masas es:

$$\frac{d^4 V}{d\eta^4} - \beta^4 V = 0 \quad (2)$$

donde $\beta^4 = \frac{A\rho}{EI} \omega^2 l^4$ y ω es la frecuencia natural circular.

La solución general de la ecuación diferencial (2) para el sistema mostrado en la Figura 1 aplicada a cada tramo será:

$$\begin{aligned} V_1(\eta) &= A_1 \cosh \beta\eta + B_1 \sinh \beta\eta + C_1 \cos \beta\eta + D_1 \sin \beta\eta & \text{en} \quad 0 \leq \eta \leq \eta_1 \\ V_2(\eta) &= A_2 \cosh \beta\eta + B_2 \sinh \beta\eta + C_2 \cos \beta\eta + D_2 \sin \beta\eta & \text{en} \quad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \\ V_3(\eta) &= A_3 \cosh \beta\eta + B_3 \sinh \beta\eta + C_3 \cos \beta\eta + D_3 \sin \beta\eta & \text{en} \quad \eta_2 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

donde A_i , B_i , C_i y D_i son constantes a ser determinadas por las condiciones de borde en $\eta = 0$ y $\eta = 1$ y de continuidad en η_1 y η_2 .

3 CONDICIONES DE BORDE Y DE CONTINUIDAD

Las condiciones de borde en los extremos de la viga se expresan de la siguiente manera:

En $\eta = 0$ tenemos:

$$\left. \frac{d^3 V_1(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=0} = -K_1 V_1(\eta) \Big|_{\eta=0} \quad (4)$$

$$\left. \frac{d^2 V_1(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = K_3 \left. \frac{dV_1(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (5)$$

y para $\eta = 1$ tenemos

$$\left. \frac{d^3 V_3(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=1} = K_2 V_3(\eta) \Big|_{\eta=1} \quad (6)$$

$$\left. \frac{d^2 V_3(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=1} = -K_4 \left. \frac{dV_3(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=1} \quad (7)$$

Mientras que las ecuaciones de continuidad para las posición η_1 son:

$$V_1(\eta) \Big|_{\eta=\eta_1} = V_2(\eta) \Big|_{\eta=\eta_1} \quad (8)$$

$$\left. \frac{dV_1(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_1} = \left. \frac{dV_2(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_1} \quad (9)$$

$$\left. \frac{d^3 V_1(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=\eta_1} + M_1 \beta^4 V_1(\eta) \Big|_{\eta=\eta_1} = \left. \frac{d^3 V_2(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=\eta_1} \quad (10)$$

$$\left. \frac{d^2 V_1(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_1} - M_1 c_1^2 \beta^4 \left. \frac{dV_1(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_1} = \left. \frac{d^2 V_2(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_1} \quad (11)$$

La ecuaciones de continuidad para la posición η_2 son similares a las anteriores:

$$V_2(\eta) \Big|_{\eta=\eta_2} = V_3(\eta) \Big|_{\eta=\eta_2} \quad (12)$$

$$\left. \frac{dV_2(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_2} = \left. \frac{dV_3(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_2} \quad (13)$$

$$\left. \frac{d^3 V_2(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=\eta_2} + M_2 \beta^4 V_2(\eta) \Big|_{\eta=\eta_2} = \left. \frac{d^3 V_3(\eta)}{d\eta^3} \right|_{\eta=\eta_2} \quad (14)$$

$$\left. \frac{d^2 V_2(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_2} - M_2 c_2^2 \beta^4 \left. \frac{dV_2(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_2} = \left. \frac{d^2 V_3(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_2} \quad (15)$$

donde:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{k_1 l^3}{EI} \\
K_2 &= \frac{k_2 l^3}{EI} \\
K_3 &= \frac{k_3 l}{EI} \\
K_4 &= \frac{k_4 l}{EI} \\
M_i &= \frac{m_i}{\rho A l} \\
c_i &= \frac{r_i}{l} \\
r_i &= \sqrt{I_i / m_i}
\end{aligned} \tag{16}$$

Las ecuaciones (8), (9), (12) y (13) representan la continuidad en la deformación (condiciones esenciales) de la viga, las ecuaciones (8) y (12) representan igualdad de deflexión y las ecuaciones (9) y (13) igualdad de pendiente, mientras que las ecuaciones (10), (11), (14) y (15) constituyen las condiciones de equilibrio (condiciones naturales), las ecuaciones (10) y (14) son la igualdad de fuerzas en los puntos η_1 y η_2 respectivamente y las ecuaciones (11) y (15) son la igualdad de momentos en los puntos η_1 y η_2 respectivamente.

4 ECUACIÓN DE FRECUENCIAS

Reemplazando las expresiones (3) en las condiciones (4) a (15), se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo de la forma:

$$\begin{bmatrix}
 a_{1-1} & a_{1-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1-12} \\
 a_{2-1} & a_{2-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2-12} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & & \cdot & & & & & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & & & & \cdot & & & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & & & & & \cdot & & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & & & & & & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\
 a_{12-1} & a_{12-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{12-12}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 A_2 \\
 B_2 \\
 C_2 \\
 D_2 \\
 A_3 \\
 B_3 \\
 C_3 \\
 D_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \tag{17}$$

Por lo tanto para que el sistema no tenga una solución trivial, se deberá cumplir con:

$$\det(A) = 0 \tag{18}$$

Donde la ecuación (18) representa la ecuación de frecuencias del sistema.

Se debe notar que para una cantidad n de masas, la dimensión de la matriz A es $(4+4n) \times (4+4n)$, por lo tanto si el sistema planteado tiene una disposición simétrica, será conveniente representar la mitad de la viga y luego teniendo en cuenta la longitud de la viga, calcular los autovalores. Se debe tener en cuenta también que resultan modificados los parámetros M_i y c_i .

5 RESULTADOS

Se calcularon los valores de los cinco primeros coeficientes de frecuencia de vibración para disposiciones de vigas comúnmente encontradas en la literatura y para algunos casos especiales de vigas que pueden ser calculados con el presente trabajo.

5.1 Viga bi-empotrada

Este caso se consigue tomando una rigidez infinita en las constantes traslacionales y rotacionales:

$$K_1 \rightarrow \infty; K_2 \rightarrow \infty; K_3 \rightarrow \infty; K_4 \rightarrow \infty \tag{19}$$

de modo que no haya desplazamiento y giro en los extremos de la viga.

Los coeficientes de frecuencia se indican en la Tabla 1, para posiciones de las masas en forma simétrica y en la Tabla 2 para una posición no simétrica.

Tabla 1: primeros cinco coeficientes de frecuencia para una viga bi-empotrada

$\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.75$	$c_1 = c_2 = 0$	$c_1 = c_2 = 0.01$	$c_1 = c_2 = 0.05$	$c_1 = c_2 = 0.1$
	β_i	β_i	β_i	β_i
$M_1 = M_2 = 0$	4.730040745			
	7.853204624			
	10.995607838			
	14.137165491			
	17.278759657			
$M_1 = M_2 = 0.01$	4.712559121	4.712504947	4.711205194	4.707148685
	7.773182371	7.773146516	7.772283406	7.769553976
	10.895845698	10.895608305	10.889869199	10.871410259
	14.115009430	14.112503031	14.052046850	13.860192882
	17.255739372	17.251267122	17.142603883	16.790823720
$M_1 = M_2 = 0.1$	4.566751893	4.566296742	4.555401392	4.521714597
	7.191050372	7.190831541	7.185461208	7.167098271
	10.234633771	10.232539934	10.179579035	9.979519741
	13.971289844	13.947214961	13.352515760	11.754242806
	17.114823313	17.071514676	15.972016984	13.589470278
$M_1 = M_2 = 0.5$	4.097349904	4.096099691	4.066265208	3.975543014
	5.898365837	5.898020903	5.889304172	5.855538025
	9.145344887	9.135587581	8.871592391	7.980403342
	13.752676205	13.640076063	11.243655302	8.549967464
	16.925838603	16.717817913	12.994060753	10.837204265
$M_1 = M_2 = 1$	3.733467009	3.731957491	3.695925489	3.586769917
	5.174632630	5.174293910	5.165648790	5.130641945
	8.741809350	8.721977955	8.180047680	6.900950155
	13.679067443	13.457816057	9.868199387	7.268735938
	16.868112869	16.451415835	11.627832835	10.225647122
$M_1 = M_2 = 2$	3.305275348	3.303694212	3.265898809	3.151387859
	4.457367357	4.457057912	4.449108610	4.415951663
	8.466713346	8.426053966	7.384108034	5.882692611
	13.631209760	13.190090912	8.481905774	6.146000627
	16.831960052	15.986850435	10.633199518	9.868380074

Tabla 2: primeros cinco coeficientes de frecuencia para una viga bi-empotrada

$\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.5$	$c_1 = c_2 = 0$	$c_1 = c_2 = 0.01$	$c_1 = c_2 = 0.05$	$c_1 = c_2 = 0.1$
	β_i	β_i	β_i	β_i
$M_1 = M_2 = 0.01$	4.692139933	4.692113323	4.691474625	4.689478056
	7.812763401	7.812497738	7.806115751	7.786100009
	10.893190471	10.893074283	10.890253444	10.881020934
	14.126219252	14.123550929	14.059331967	13.857711600
	17.185888022	17.183621885	17.128655820	16.948639990
$M_1 = M_2 = 0.1$	4.405262961	4.405066501	4.400348659	4.385573346
	7.486048056	7.484070922	7.436134182	7.281777003
	10.222717200	10.221669087	10.193989215	10.065396330
	14.060397728	14.033629620	13.390422346	11.914928175
	16.670321742	16.647089839	16.037643269	13.782821555
$M_1 = M_2 = 0.5$	3.702655548	3.702237338	3.692186347	3.660640514
	6.481400739	6.477750467	6.385496382	6.057477308
	9.268275939	9.260604024	9.021797239	8.026924901
	13.969277843	13.831311289	11.390068307	9.441018464
	16.087574243	15.975543353	12.970338340	10.298228134
$M_1 = M_2 = 1$	3.277248263	3.276792161	3.265827197	3.231392812
	5.769307616	5.765826452	5.675518959	5.331186845
	9.000310553	8.982721200	8.375043646	6.911081370
	13.938756117	13.657313674	10.265161467	8.047489167
	15.924312435	15.706922819	11.319504947	9.878431108
$M_1 = M_2 = 2$	2.839855223	2.839408613	2.828669519	2.794932743
	5.007665446	5.004617566	4.924043216	4.599182423
	8.846307371	8.808363627	7.508588995	5.878962167
	13.918478676	13.348989710	9.075709092	6.801226235
	15.823880083	15.395729437	10.227576046	9.673653487

5.2 Viga simplemente apoyada

Aquí la rigidez traslacional se toma infinita en ambos extremos de modo que no haya desplazamiento transversal y las constantes de rigidez rotacional nulas:

$$K_1 \rightarrow \infty; K_2 \rightarrow \infty; K_3 = 0; K_4 = 0 \tag{20}$$

Los coeficientes de frecuencia se indican en las Tablas 3 y 4 para una disposición en forma simétrica y una no simétrica respectivamente.

Tabla 3: primeros cinco coeficientes de frecuencia para una viga simplemente apoyada

$\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.75$	$c_1 = c_2 = 0$	$c_1 = c_2 = 0.01$	$c_1 = c_2 = 0.05$	$c_1 = c_2 = 0.1$
	β_i	β_i	β_i	β_i
$M_1 = M_2 = 0$	3.141592654			
	6.283185307			
	9.424777961			
	12.566370614			
	15.707963268			
$M_1 = M_2 = 0.01$	3.126073684	3.126058579	3.125696124	3.124564295
	6.221844468	6.221844468	6.221844468	6.221844468
	9.378965342	9.378554414	9.368673860	9.337580233
	12.566370614	12.564386165	12.516737957	12.367914601
	15.632774734	15.630872323	15.584549471	15.432055766
$M_1 = M_2 = 0.1$	3.001302822	3.001180799	2.998256736	2.989174554
	5.774527570	5.774527570	5.774527570	5.774527570
	9.059548268	9.055915498	8.967423357	8.681952677
	12.566370614	12.546522268	12.074126088	10.822519000
	15.171258990	15.154134269	14.697871350	13.300712114
$M_1 = M_2 = 0.5$	2.639314331	2.639001245	2.631518079	2.608519007
	4.766381387	4.766381387	4.766381387	4.766381387
	8.474403824	8.459441635	8.089169067	7.112298278
	12.566370614	12.467089354	10.496300023	8.078415680
	14.561670309	14.484578400	12.074126088	10.830015489
$M_1 = M_2 = 1$	2.383190694	2.382819847	2.373965282	2.346870503
	4.191965562	4.191965562	4.191965562	4.191965562
	8.239441432	8.211355756	7.532783799	6.211427217
	12.566370614	12.367914601	9.327569192	6.895495872
	14.380161147	14.227856512	11.442337973	10.225284944
$M_1 = M_2 = 2$	2.095982781	2.095596880	2.086389289	2.058300757
	3.617129612	3.617129612	3.617129612	3.617129612
	8.073040922	8.018976033	6.839874809	5.328238079
	12.566370614	12.171153926	8.078415680	5.841932298
	14.267972169	13.959165412	10.569096257	9.868379792

Tabla 4: primeros cinco coeficientes de frecuencia para una viga simplemente apoyada.

$\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.5$	$c_1 = c_2 = 0$	$c_1 = c_2 = 0.01$	$c_1 = c_2 = 0.05$	$c_1 = c_2 = 0.1$
	β_i	β_i	β_i	β_i
$M_1 = M_2 = 0.01$	3.118451417	3.118443944	3.118264581	3.117704172
	6.252377462	6.252256598	6.249355664	6.240288092
	9.355825783	9.355628259	9.350858207	9.335580722
	12.566370614	12.564386194	12.516760070	12.368446476
	15.596096190	15.595116256	15.571421294	15.494992485
$M_1 = M_2 = 0.1$	2.941475485	2.941419529	2.940077054	2.935887757
	6.016060050	6.015074221	5.991407355	5.917523304
	8.864970186	8.863654066	8.830156423	8.698135132
	12.566370614	12.546514315	12.073503240	10.898574240
	14.952670513	14.942198370	14.671798624	13.441781153
$M_1 = M_2 = 0.5$	2.494641902	2.494518834	2.491567894	2.482380792
	5.342847141	5.340291925	5.278798596	5.088110393
	7.964349685	7.960417416	7.844054442	7.218281776
	12.566370614	12.466446018	10.515192880	8.818677442
	14.217054533	14.160970269	12.443146530	9.626174415
$M_1 = M_2 = 1$	2.216244990	2.216108747	2.212842628	2.202683907
	4.838381067	4.835465231	4.764901498	4.544470721
	7.631686030	7.623953827	7.371800223	6.310092476
	12.566370614	12.364874103	9.456226437	7.925711684
	14.021189964	13.907294199	10.896379294	8.558209875
$M_1 = M_2 = 2$	1.925555129	1.925420239	1.922187046	1.912137436
	4.255345719	4.252475566	4.182524619	3.960916432
	7.418047034	7.401884427	6.821194017	5.407040224
	12.566370614	12.159384234	8.453316975	6.760196992
	13.905018183	13.674378388	9.457064784	8.186296061

5.3 Viga en voladizo

Este caso tiene el extremo $\eta = 0$ empotrado y el extremo $\eta = 1$ libre, por lo que deberemos hacer:

$$K_1 \rightarrow \infty; K_2 = 0; K_3 \rightarrow \infty; K_4 = 0 \quad (21)$$

Los resultados se indican en las Tablas 5 y 6 para dos disposiciones distintas de las masas

Tabla 5: primeros cinco coeficientes de frecuencia para una viga en voladizo

$\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.75$	$c_1 = c_2 = 0$	$c_1 = c_2 = 0.01$	$c_1 = c_2 = 0.05$	$c_1 = c_2 = 0.1$
	β_1	β_1	β_1	β_1
$M_1 = M_2 = 0$	1.875104069			
	4.694091133			
	7.854757438			
	10.995540735			
	14.137168391			
$M_1 = M_2 = 0.01$	1.866904022	1.866899723	1.866796559	1.866474320
	4.685114258	4.685019511	4.682747706	4.675674408
	7.788742861	7.788669079	7.786895200	7.781313306
	10.904756349	10.904564620	10.899930714	10.885041156
	14.117148307	14.114748926	14.056894217	13.873520268
$M_1 = M_2 = 0.1$	1.800254231	1.800218538	1.799362753	1.796698961
	4.608267885	4.607397401	4.586678095	4.524039696
	7.319062070	7.318408100	7.302585645	7.251584025
	10.306657944	10.305032706	10.263880195	10.105219221
	13.986490857	13.963427202	13.395267460	11.880022410
$M_1 = M_2 = 0.5$	1.600015888	1.599917981	1.597575291	1.590340998
	4.319124230	4.316164017	4.246614640	4.049510498
	6.383645610	6.380025767	6.296143728	6.071528270
	9.338128695	9.331232879	9.137921043	8.231193429
	13.784061803	13.676101210	11.401473434	9.224305042
$M_1 = M_2 = 1$	1.452939014	1.452818840	1.449946256	1.441110858
	4.034295207	4.030508123	3.940785576	3.687353621
	5.979939215	5.971154110	5.779730731	5.385317137
	8.984320309	8.970913475	8.564574630	7.095994016
	13.714633483	13.502561656	10.152734199	8.511629802
$M_1 = M_2 = 2$	1.283836602	1.283707815	1.280631803	1.271200644
	3.635774417	3.631912270	3.538112010	3.263057920
	5.700947107	5.680329527	5.272359317	4.678303843
	8.743490879	8.716857875	7.839336601	6.030321674
	13.669105978	13.246646436	9.071193471	8.057188906

Tabla 6: primeros cinco coeficientes de frecuencia para una viga voladizo.

$\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.5$	$c_1 = c_2 = 0$	$c_1 = c_2 = 0.01$	$c_1 = c_2 = 0.05$	$c_1 = c_2 = 0.1$
	β_i	β_i	β_i	β_i
$M_1 = M_2 = 0.01$	1.872770728	1.872767218	1.872682996	1.872419909
	4.662663025	4.662638394	4.662047165	4.660198378
	7.814088775	7.813836397	7.807773830	7.788763079
	10.892511551	10.892395392	10.889575492	10.880348935
	14.126219264	14.123547476	14.059244134	13.857346238
$M_1 = M_2 = 0.1$	1.852271928	1.852238634	1.851440366	1.848955566
	4.427929896	4.427741995	4.423225218	4.409023867
	7.488498488	7.486642205	7.441663509	7.297116492
	10.215951580	10.214928223	10.187900858	10.062130990
	14.060335943	14.033522005	13.389116512	11.909026018
$M_1 = M_2 = 0.5$	1.771069843	1.770936224	1.767742830	1.757927180
	3.888020612	3.887537776	3.875866284	3.838424347
	6.505883316	6.502627426	6.420717023	6.132850723
	9.240390420	9.233128336	9.006937532	8.033298753
	13.968967299	13.830682687	11.380640159	9.442140270
$M_1 = M_2 = 1$	1.688061167	1.687851268	1.682848399	1.667631853
	3.598426937	3.597731949	3.580861472	3.526071617
	5.817902157	5.815050084	5.741778587	5.468685718
	8.961901834	8.945326211	8.370743294	6.923092299
	13.938315341	13.656179535	10.248419011	8.052521015
$M_1 = M_2 = 2$	1.563551921	1.563268159	1.556525179	1.536253550
	3.338512069	3.337387749	3.310072872	3.222086318
	5.096668846	5.094638486	5.042097000	4.840346736
	8.800695371	8.765053502	7.526833958	5.900376716
	13.917939448	13.347001806	9.069220261	6.809071081

5.4 Viga continua

Entre la cantidad de variables que ofrece este modelo, indicamos aquí una de los tantos problemas que pueden resolverse, ver Figura 2.

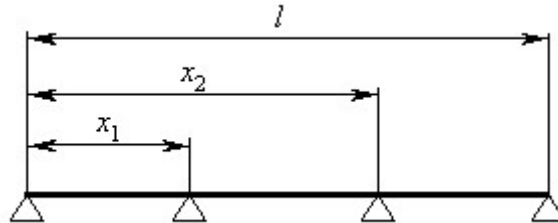


Figura 2: Viga continua

Para esto se deben tomar los siguientes parámetros:

$$K_1 \rightarrow \infty; K_2 \rightarrow \infty; K_3 = 0; K_4 = 0; M_1 \rightarrow \infty; M_2 \rightarrow \infty; c_1 = 0; c_2 = 0 \quad (23)$$

Los coeficientes de frecuencia se indican en las Tabla 9 para una disposición $\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.75$ y para $\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.5$.

Tabla 9: Viga continua

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.75$	7.853204624	12.566370614	14.137165491	15.706409440	20.420352923
$\eta_1=0.25$ y $\eta_2=0.5$	7.171064873	12.566370614	13.774082776	16.641867441	19.853948130

5.5 Viga de configuración simétrica con cuatro masas adosadas

Aprovechando la disposición simétrica en una viga, puede resolverse el caso de la Figura 3:

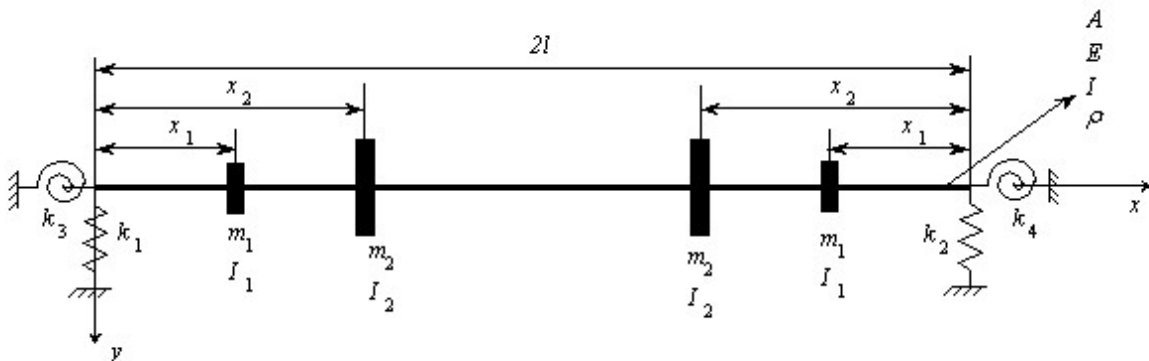


Figura 3: Viga con cuatro masas de configuración simétrica

Es sabido que los modos simétricos de vibración del sistema de la Figura 3, pueden calcularse con una configuración como la de la Figura 4

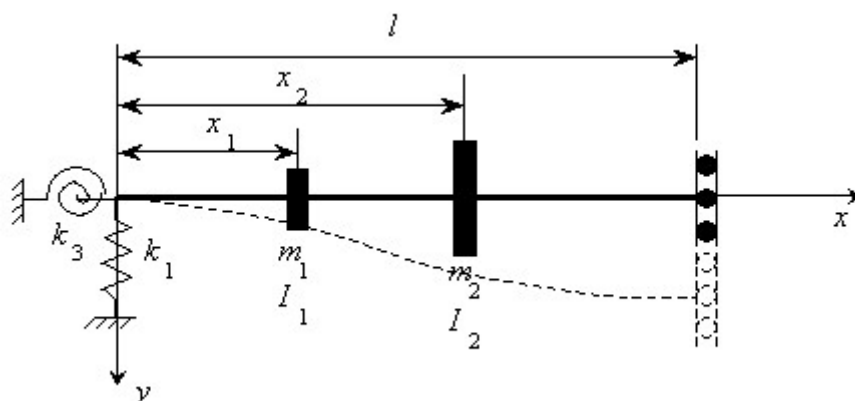


Figura 4: mitad de viga con cuatro masas de configuración simétrica

y los modos antisimétricos de vibración pueden ser calculados con una configuración como la de la Figura 5

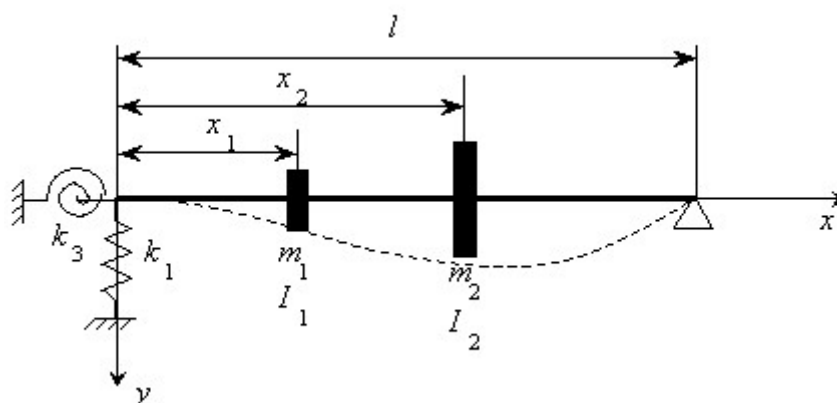


Figura 5: mitad de viga con cuatro masas de configuración antisimétrica

Para el caso de una viga bi-empotrada con cuatro masas se tomarán los siguientes valores de constantes elásticas:

$$K_1 \rightarrow \infty; K_3 \rightarrow \infty; \quad (24)$$

Correspondiendo para los modos simétricos (Figura 4):

$$K_2 = 0; K_4 \rightarrow \infty; \quad (25)$$

y para los antisimétricos (Figura 5):

$$K_2 \rightarrow \infty; K_4 = 0; \quad (26)$$

Los coeficientes de frecuencia para la viga completa se muestran en la Tabla 10 para una sola disposición simétrica de las masas.

Tabla 10: primeros cinco coeficientes de frecuencia para una viga de disposición simétrica con cuatro masas.

$\eta_1=0.125$ y $\eta_2=0.375$	$c_1 = c_2 = 0$	$c_1 = c_2 = 0.01$	$c_1 = c_2 = 0.05$	$c_1 = c_2 = 0.1$
	β_1	β_1	β_1	β_1
$M_1 = M_2 = 0$	4.730040745			
	7.853204624			
	10.995607838			
	14.137165491			
	17.278759657			
$M_1 = M_2 = 0.01$	4.684015868	4.683958073	4.682571700	4.678248040
	7.779642005	7.779242470	7.769664379	7.739869580
	10.932783629	10.930985137	10.887970018	10.755556413
	13.885702435	13.885105139	13.870643555	13.823891202
	17.044472626	17.040927381	16.955602604	16.687680165
$M_1 = M_2 = 0.1$	4.349056060	4.348659024	4.339165646	4.309936629
	7.235199870	7.232532374	7.168910877	6.976360644
	10.394359947	10.381859528	10.084753072	9.261609755
	12.309069171	12.305581617	12.217099908	11.891450317
	15.740562766	15.706331586	14.944783119	13.348293815
$M_1 = M_2 = 0.5$	3.594490379	3.593730638	3.575650661	3.521039799
	5.980054480	5.975292709	5.861683821	5.528499385
	8.776500718	8.756910554	8.249896955	6.964935963
	9.619531861	9.614167568	9.469840868	8.933924145
	14.375088436	14.186244215	11.562189458	9.538196574
$M_1 = M_2 = 1$	3.163348019	3.162548235	3.143545447	3.086518058
	5.259057989	5.254198931	5.137964803	4.799531728
	7.737479288	7.719369236	7.223213005	5.964923790
	8.326916761	8.321667251	8.177606722	7.652178347
	14.057459283	13.673566421	9.968334852	8.094136417
$M_1 = M_2 = 2$	2.730881948	2.730116514	2.711948678	2.657658350
	4.537046517	4.532499728	4.423468792	4.107175997
	6.677375285	6.661645895	6.212310013	5.063784990
	7.114517495	7.109729411	6.976590167	6.497545027
	13.882680856	13.131672938	10.208246193	6.838338583

6 CONCLUSIONES

Es usual en este tipo de análisis, considerar en el modelo solamente la inercia traslacional de la masa.

En estos casos, se observa que las frecuencias naturales de vibración del sistema disminuyen, salvo en ocasiones especiales, cuando las masas son ubicadas en las líneas nodales (ver Tablas 3 y 4, cuarto coeficiente de frecuencia).

En cambio, cuando en el modelo se tiene en cuenta la inercia rotacional de la masa adosada, se observa que todas las frecuencias de vibración disminuyen.

La influencia de la inercia rotacional de las masas tiene mayor efecto en las frecuencias mas altas.

El efecto inercial de traslación tiene máxima influencia sobre una frecuencia cuando la masa esta ubicada en un punto de máxima amplitud de su forma modal (antinodo). En esa situación la inercia rotacional no tiene efecto (Tabla 3, segundo coeficiente de frecuencias).

El efecto de la inercia rotacional de la masa es máximo cuando está ubicada en un nodo de la forma modal (véase el cuarto coeficiente de frecuencia natural en Tablas 3 y 4).

7 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido auspiciado por el CONICET (Proyecto PIP 02152) y la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Proyectos 24/J024 y 24/J038).

Los autores quieren agradecer al Dr. Patricio A. A. Laura por sus valiosas sugerencias.

8 REFERENCIAS

- [1] K. H. Low, *Natural frequencies of a beam-mass system in transverse vibration: Rayleigh estimation versus eigenanalysis solutions*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 45, pp 981-993, (2003).
- [2] M. A. De Rosa, C. Franciosi and M. J. Maurizi, *On the dynamic behaviour of slender beams with elastic ends carrying a concentrated mass*, Computers & Structures, Vol. 58 No. 6, pp 1145-1159, (1996).
- [3] C. H. Chang, *Free vibration of a simply supported beam carrying a rigid mass at the middle*, Journal of Sound and Vibration **237**, pp. 733-744, (2000)
- [4] P. A. A. Laura, C. P. Filipich and V. H. Cortinez, *Vibrations of beams and plates carrying concentrated masses*, Journal of Sound and Vibration **117**, pp. 459-465, (1987)
- [5] S. Maiz, D. V. Bambill, C. A. Rossit and P. A. A. Laura. *Frequencies of transverse vibrations of Bernoulli-Euler beams carrying point masses and taking into account their rotatory inertia*. Submitted to publication (2005).
- [6] C. A. Rossit, *Vibraciones longitudinales y transversales de barras. Desarrollos no armónicos de Fourier*. Tesis de Magíster en Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, pp. 68-69, (1995).