

DETERMINAÇÃO DE FATORES DE INTENSIFICAÇÃO DE TENSÕES MEDIANTE
O CÁLCULO DA INTEGRAL J USANDO UM PROCESSO ADAPTATIVO E

Carlos A. Cimini Jr., Estevan B. de Las Casas
Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais
Av. do Contorno 842, 2o. andar, Centro
30110, Belo Horizonte, MG, Brasil

Edgardo O. Taroco
Laboratório Nacional de Computação Científica / CNPq
Rua Lauro Müller, 455, Botafogo
22290, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

RESUMO

Neste trabalho, um processo adaptativo de minimização de erro através da relocação dos nós no domínio [1] é aplicado na análise via MEF e a influência da otimização do modelo discreto na determinação de fatores de intensificação de tensões mediante o cálculo da integral J é analisada para um disco em rotação e uma membrana fissurada. O estimador de erro descrito em [2] é utilizado como base para relocação dos nós e os resultados são discutidos.

ABSTRACT

In this paper, an adaptive process using remeshing [1] is applied to FEM analysis and the influence of discrete domain optimization in the evaluation of stress intensity factors by means of the J integral calculation is analysed for a cracked rotating disk and a cracked membrane. The error estimator proposed in [2] is used as a basis for the remeshing and the results are discussed.

INTRODUÇÃO

A falha por propagação de trinca é um fenômeno problemático no projeto e análise de materiais estruturais em muitos campos da Engenharia. A necessidade de obtenção de métodos que determinem de que maneira a presença de fissuras influi no comportamento do material levou ao desenvolvimento da Mecânica da Fratura. Um dos métodos usados na solução de problemas de fratura é a utilização da integral J que desde a sua introdução levou ao desenvolvimento de uma série de novos procedimentos.

O uso da integral J conjuntamente com o método dos elementos finitos na determinação de fatores de intensificação de tensões comprovou ser uma técnica simples e poderosa. Tal técnica permite, após a análise do equilíbrio, o estudo do problema através de uma integração em caminhos arbitrários envolvendo a ponta da fissura. Assim sendo, a singularidade pode ser excluída do procedimento facilitando o cálculo numérico

dos parâmetros relevantes. No entanto, a qualidade dos resultados numéricos continua condicionada ao modelo discreto utilizado na análise via Método dos Elementos Finitos.

Nesse sentido, a utilização de processos adaptativos de minimização de erro vem cumprir um papel de fundamental importância, uma vez que melhora sensivelmente a qualidade dos resultados da análise via MEF.

A INTEGRAL J

Proposta em 1968 por Rice [3], a integral J independente do caminho permite analisar a propagação de fissuras em lâminas planas submetidas a cargas de contorno na medida em que determina a força associada à esta propagação mediante uma integração de linha sobre um caminho envolvendo o vértice da fissura. Knowles e Sternberg [4] evidenciam o conceito de força em singularidades associadas a defeitos, introduzido por Eshelby [5] na análise de corpos elásticos. Esses trabalhos podem ser atualmente inseridos num contexto mais geral onde há grande interesse por parte dos investigadores em integrais independentes do caminho e leis de conservação. Um exemplo disso é a extensão dos conceitos mencionados ao tratamento de placas e cascas fissuradas, apresentado na Ref. [6].

Um grande ponto positivo da utilização da integral J no cálculo de fatigas de intensificação de tensões se deve ao fato de que basta conhecer o estado de tensões do corpo com uma fissura de comprimento estabelecido para se determinar o decréscimo de energia potencial. Não é mais necessária, portanto, uma nova análise do equilíbrio para a determinação de tal decréscimo. Agrega-se a este fato a independência do caminho da integral J, característica que permite efetuar o cálculo em regiões suficientemente afastadas do vértice da fissura e onde as grandezas relevantes podem ser determinadas com maior precisão em análises tanto teóricas como experimentais.

A integral J nada mais é do que o decréscimo da energia potencial armazenada no corpo com relação a um incremento infinitesimal da fissura e é dada pela relação (Fig. 1):

$$J = e_1 \cdot \int_{\Gamma} \Sigma_n d\Gamma = - \frac{\delta \Pi}{\delta a} \quad (1)$$

onde $\Sigma = \phi I - Vu^T \sigma$ é o tensor momento-energia e:

- Γ - contorno envolvendo o vértice da fissura;
- e_1 - base ortogonal (e_1 coincidente com a direção de propagação da fissura);
- ϕ - densidade de energia de deformação;
- Vu - tensor gradiente do deslocamento;
- σ - tensor de tensões;
- a - vetor normal exterior ao contorno Γ ;
- Π - energia potencial;
- a - comprimento da fissura.

Desta forma, conclui-se que J pode ser interpretada como o fluxo do tensor momento-energia ao longo do contorno Γ , na direção e_1 . O fato de o fluxo do tensor momento-energia se anular em torno de qualquer contorno fechado que não envolva singularidade [5] permite provar a independência do caminho de J.

Considerando que:

$$t = \sigma n \quad (2)$$

$$dx_2 = n \cdot e_1 d\Gamma \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = (\nabla u) e_1 \quad (4)$$

podemos reescrever a eq. (1) nas formas:

$$J = e_1 \cdot \int_{\Gamma} (\phi I - \nabla u^T \sigma) n d\Gamma \quad (5)$$

$$J = \int_{\Gamma} \left[\phi n \cdot e_1 - \sigma n \cdot (\nabla u) e_1 \right] d\Gamma \quad (6)$$

$$J = \int_{\Gamma} \left[\phi dx_2 - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} d\Gamma \right] \quad (7)$$

Esta última expressão coincide com aquela apresentada por Rice em [3].

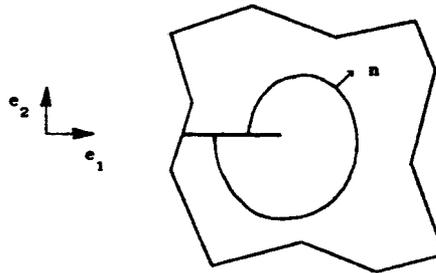


Figura 1 : Caminho envolvendo o vértice da fissura

Para estado plano de tensões, a relação entre o fator de intensificação de tensões K_1 e J é a seguinte [7]:

$$J = \frac{K_1^2}{E} \quad (8)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material.

REFINAMENTOS ADAPTATIVOS E IMPLEMENTAÇÃO

Os processos adaptativos de otimização da malha consistem em, basicamente, encontrar a distribuição dos erros no domínio mediante um estimador de erro e utilizar uma técnica especial para minimizá-los. Uma primeira idéia seria subdividir os elementos que tenham um erro considerado grande de maneira a obter uma melhor discretização do domínio. Esta aproximação é conhecida como o "método h " e se espera a convergência para a solução exata do problema matemático se o processo de refinamento continuar indefinidamente (desconsiderando arredondamentos).

Uma técnica diferente de refinamento da malha é o "método p", onde a ordem do polinômio de interpolação é aumentada em elementos para os quais o estimador de erro indica a necessidade de melhoria na solução de forma a garantir a precisão desejada. Outra alternativa, conhecida como "método r", consiste em melhorar uma dada malha através de mudanças na distribuição dos elementos mantendo o mesmo (ou aproximadamente o mesmo) número de nós e o mesmo tipo de elementos [8].

O modelo discreto definido será responsável pela introdução de um erro (de discretização) no valor numérico determinado para a integral J. Resultados para malhas distintas, mesmo considerando-se que os cálculos para determinação do fator de intensificação de tensões envolvem determinação de parâmetros fora da região de singularidade, são bastante sensíveis ao modelo adotado [9]. Uma forma de se obter uma melhora no resultado mantendo o número de nós da malha inicial é recorrer a um processo r ("remeshing") de redefinição adaptativa da localização dos graus de liberdade no domínio.

Para um dado número de graus de liberdade, a malha ótima é aquela em que o erro de discretização é igual em todos os elementos. O programa utilizado neste trabalho e descrito em [1] busca a equidistribuição do erro a partir do seguinte algoritmo:

- 1) Criar uma malha inicial e determinar as tensões via MEF;
- 2) Baseado nas tensões obtidas, obter uma estimativa do erro de discretização por elemento;
- 3) Se a distribuição dos erros estimados no passo 2 é uniforme ou se o limite de ciclos é alcançado, parar; do contrário continuar;
- 4) Utilizar os estimadores de erro para aumentar o diâmetro dos elementos com erro baixo e diminuir quando o erro for elevado;
- 5) Proceder uma nova análise pelo MEF e retornar ao passo 2.

O estimador de erro usado no algoritmo é o proposto por Zienkiewicz e Zhu [2], e o elemento é o triangular de 3 nós para problemas planos. A análise do equilíbrio pelo Método dos Elementos Finitos é feita utilizando-se o Sistema de Desenvolvimento de Programas [10] como ambiente de cálculo.

O passo 4 é realizado com cada nó tendo sua posição redefinida considerando o erro em todos os elementos que o contém. A nova distância do nó em relação ao centro de gravidade dos elementos é calculada levando em conta o erro estimado, cuja inversa funciona como um peso. Assim sendo, elementos com erro maior que a média terão seus diâmetros diminuídos e vice-versa.

Para se assegurar a integridade do domínio durante a relocação, pode-se restringir as novas coordenadas de um dado nó a uma curva (por exemplo, pode-se forçar o nó a ficar sempre em um arco de círculo definido por ele e dois vizinhos e que delimite parte do contorno). Uma outra opção é se eliminar alguns nós do processo de relocação (por exemplo, nós nos cantos).

A avaliação feita no passo 3 quanto à qualidade dos resultados é baseada em uma medida da dispersão dos erros locais. No programa utilizado, calcula-se um índice de performance, IP, que é dado por:

$$IP = \frac{\max e_i}{\min e_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

onde e_i é o erro estimado no passo 2 para os N elementos do modelo. Quando IP tende para a unidade, indica convergência do processo. Os critérios de parada são um limite para IP e um número máximo de ciclos (passo 3).

EXEMPLOS

Exemplo 1 - Disco em rotação com fissuras

Considerar o disco mostrado na Fig. 2 onde são dados:

$$\begin{array}{lll} t = 1 \text{ mm} & a = 9 \text{ mm} & p = 100 \text{ N/mm} \\ r_i = 45 \text{ mm} & E = 210000 \text{ N/mm}^2 & \\ r_o = 90 \text{ mm} & \nu = 0.3 & \end{array}$$

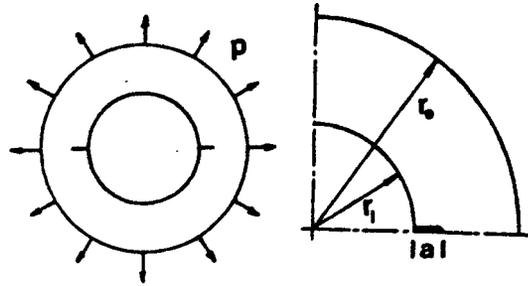


Figura 2 : Disco em rotação com fissuras

A simetria do problema permite modelar apenas a quarta parte do domínio. A partir da malha com 82 graus de liberdade mostrada na Fig. 3, o cálculo da integral J foi efetuado para os caminhos representados na Fig. 4.

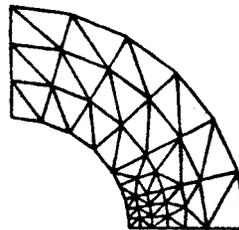


Figura 3 : Malha inicial (r0) - Disco

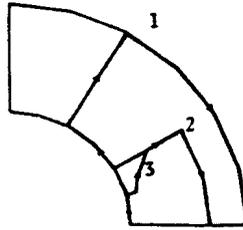


Figura 4 : Caminhos para cálculo da integral J - Disco

Em seguida, foram realizados 10 ciclos do processo adaptativo r com o cálculo da integral J para os ciclos 5 e 10 nos mesmos caminhos mostrados anteriormente. A Fig. 5 representa como a malha original se transformou após efetuados os 10 ciclos do processo adaptativo r .

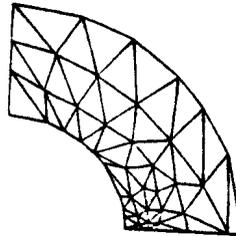


Figura 5 : Malha após 10 ciclos de r (r_{10}) - Disco

Os resultados são apresentados na Tab. 1 onde o valor para o fator de intensificação de tensões considerado como balizador para a obtenção do erro é $K_I = 1520$, de acordo com a Ref. [9].

| CAMINHO | r0 | | r5 | | r10 | |
|---------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| | K_I | Erro % | K_I | Erro % | K_I | Erro % |
| 1 | 1635. | 7.60 | 1615. | 6.26 | 1596. | 4.97 |
| 2 | 1466. | -3.55 | 1518. | -0.10 | 1491. | -1.94 |
| 3 | 1455. | -4.31 | 1488. | -2.12 | 1492. | -1.86 |

Tabela 1 : Resultados para disco em rotação com fissuras

Exemplo 2 - Membrana com fissura central submetida a tração

Considerar a membrana mostrada na Fig. 6 onde são dados:

$t = 1 \text{ mm}$
 $2W = 240 \text{ mm}$
 $L = 480 \text{ mm}$
 $2a = 20 \text{ mm}$
 $E = 210000 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0.3$
 $p = 100 \text{ N/mm}$

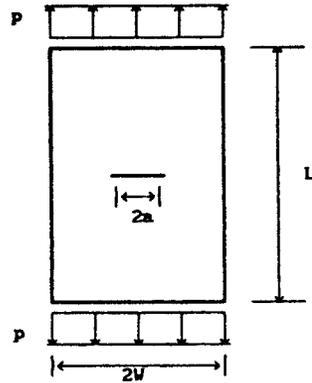


Figura 6 : Membrana com fissura central submetida a tração

Novamente a simetria do problema permite modelar apenas a quarta parte do domínio. Foram feitas duas malhas iniciais para estudar o efeito da discretização na utilização do processo adaptativo r. A primeira malha, ou Malha I (Fig. 7), discretiza pouco a região onde ocorre a singularidade enquanto que a segunda malha, ou Malha II (Fig. 8), privilegia esta região sob o ponto de vista da discretização. A integral J foi calculada nos caminhos representados na Fig. 8.

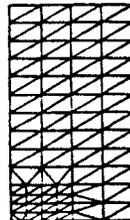


Figura 7 : Malha inicial I (r0) - Membrana

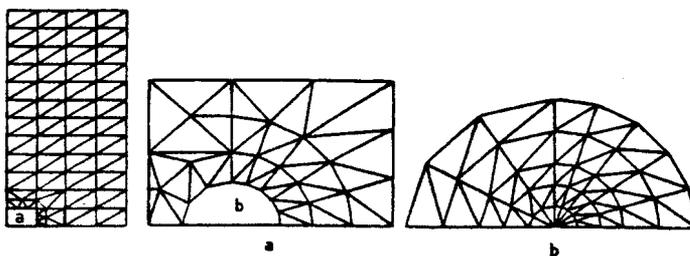


Figura 8 : Malha inicial II (r_0) - Membrana

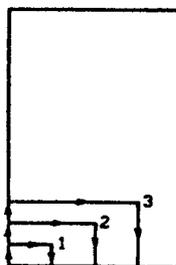


Figura 9 : Caminhos para cálculo da integral J - Membrana

Para a Malha I, que envolve 142 graus de liberdade, foram realizados 15 ciclos do processo adaptativo r com o cálculo da integral J para os ciclos 5, 10 e 15 nos mesmos caminhos mostrados anteriormente. Para a Malha II (247 graus de liberdade) foram realizados apenas 5 ciclos de refinamento, findos os quais efetuou-se o cálculo da integral J para os mesmos caminhos. As Figs. 10 e 11 representam o as malhas I e II, respectivamente após os ciclos 15 e 5.

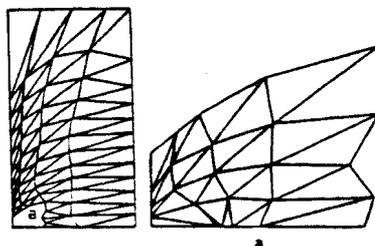


Figura 10 : Malha I após 15 ciclos de r (r_{15}) - Membrana

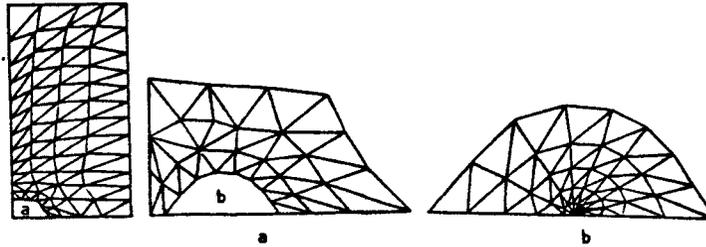


Figura 11 : Malha II após 5 ciclos de r (r5) - Membrana

Os resultados são apresentados nas Tabs. 2 e 3 onde o valor para o fator de intensificação de tensões considerado como balizador para a obtenção do erro é $K_I = 562.4$ de acordo com a Ref. [7].

| CAMINHO | r0 | | r5 | | r10 | | r15 | |
|---------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|
| | K_I | Erro % |
| 1 | 409.5 | -27.18 | 443.4 | -21.15 | 449.0 | -20.16 | 452.2 | -19.58 |
| 2 | 403.5 | -28.25 | 462.7 | -17.73 | 483.6 | -14.01 | 491.3 | -12.63 |
| 3 | 405.3 | -27.94 | 453.8 | -19.30 | 475.0 | -15.54 | 486.4 | -13.51 |

Tabela 2 : Resultados para membrana com fissura - Malha I

| CAMINHO | r0 | | r5 | |
|---------|-------|--------|-------|--------|
| | K_I | Erro % | K_I | Erro % |
| 1 | 536.6 | -4.59 | 549.4 | -2.31 |
| 2 | 535.8 | -4.73 | 544.7 | -3.14 |
| 3 | 534.3 | -4.99 | 541.4 | -3.74 |

Tabela 3 : Resultados para membrana com fissura - Malha II

CONCLUSÕES

Apesar de se ter empregado um elemento triangular plano de tensão constante que resulta bastante pobre na análise de casos com singularidades como os apresentados neste trabalho, os exemplos analisados e os resultados obtidos permitem extrair algumas conclusões. Apesar de não conseguir representar muito bem as tensões na região próxima ao extremo da fissura, os valores dos fatores de intensificação de tensões calculados mediante a integral J em caminhos escolhidos arbitrariamente não diferem muito dos valores exatos, especialmente para o Exemplo 1 e para a Malha II do Exemplo 2.

Todos os valores obtidos para a integral J tendem a se aproximar dos valores exatos na medida em que iniciamos o processo de relocação dos nós da malha original visando uniformizar a distribuição dos erros nos elementos. Com uma escolha adequada, como podem ser consideradas a malha do Exemplo 1 e a Malha II do Exemplo 2, o método possibilita melhorar os resultados da integral J e obter valores que pode-se considerar satisfatórios sob o ponto de vista de aplicações na Engenharia.

Deve ser observado que no caso de lâminas fissuradas a relação entre o comprimento da fissura e a dimensão do domínio na mesma direção (no Exemplo 1 a mencionada relação é de $1/5$ e no Exemplo 2 é de $1/12$) é um fator importante na definição de uma malha que permita obter bons resultados e que durante o processo r , os diversos caminhos considerados são alterados, aproximando-se, na maioria dos casos, da singularidade.

No Exemplo 1, com uma malha de 82 graus de liberdade, obtiveram-se valores para o fator de intensificação de tensões com erros de aproximadamente 3% e no Exemplo 2 somente com a Malha II, com 247 graus de liberdade, alcançou-se erros da mesma ordem. Na Malha I do Exemplo 2, com 142 graus de liberdade, os erros superaram 10%.

O anterior põe em evidência que a incerteza em se escolher uma malha inicial, que resulta mais crítica no caso de lâminas, ou escolher malhas com número de graus de liberdade insuficientes para o grau de aproximação desejado pode ser compensada pelo emprego conjunto de processos adaptativos r e h [11].

REFERÊNCIAS

1. Las Casas, E.B. and Ting, E.C., "An Adaptive R-H Mesh Improvement Method for Finite Elements", 20th Midwestern Mechanics Conference, Purdue, 1987, pp. 1404-1408.
2. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", IJNME, Vol. 24, 1987, pp. 337-357.
3. Rice, J.R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", J. Appl. Mech., Vol. 35, 1968, pp. 379-386.
4. Knowles, J.K. and Sternberg, E., "On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics", Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 44, 1972, pp. 187-211.
5. Eshelby, J.D., "The Elastic Energy-Momentum Tensor", Journal of Elasticity, Vol. 5, 1975, pp. 321-335.
6. Taroco, E.O., "Leyes de Conservacion e Integrales Independentes del Camino en Mecanica de la Fractura", Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento, LNCC/CNPq, No. 008/91, 1991.
7. Hellan, K., "Introduction to Fracture Mechanics", McGraw Hill, 1985.
8. Las Casas, E.B., "R-H Mesh Improvement Algorithms for Finite Element Method", Tese de Doutorado, Purdue Univ., EUA, 1985.
9. Cimini Jr., C.A., Taroco, E.O. e Las Casas, E.B., "A Integral J na Determinação de Fatores de Intensificação de Tensões para Discos Fissurados em Rotação", COBEM, São Paulo, Brasil, 1991.
10. Gouvea, J.P. e Feijóo, R.A., "Um Sistema para Desenvolvimento de Programas baseado no Método dos Elementos Finitos", MECOM, Argentina, 1985.
11. Figueiredo, A.M.G. e Las Casas, E.B., "Conjugação de Método Multi malha e Processo Adaptativo para Solução de Problemas de Elasticidade Plana via Elementos Finitos", MECOM, Argentina, 1991.