

**UN ANALISIS DEL METODO DE
LOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Miguel Benavente, Juan C. Belmonte, Enrique Pardo
Instituto de Inv. en Ciencia y Tecnología de Materiales
INTEMA, Fac.de Ingeniería, UNMDP
J.B.Justo 4302 - Mar del Plata

RESUMEN

En ciertos problemas ingenieriles se requiere hallar la solución numérica de la ecuación de Poisson en un número reducido de puntos. En tales situaciones, el Método de los Elementos de Contorno (MEC) aparece con ciertas ventajas con respecto a otras técnicas tradicionales.

Sin embargo, una efectiva reducción del número de grados de libertad supone la superación de ciertas dificultades inherentes al método.

En el presente trabajo se discuten dos aspectos de este problema. Uno de ellos es la integral singular que proviene de la solución fundamental de la ecuación tridimensional dando origen a los elementos diagonales del sistema de ecuaciones algebraicas. Se propone una técnica eficiente que permite la integración numérica en los bordes de elementos, por aplicación del teorema de la divergencia.

Asimismo, se define un criterio para una adecuada integración de los términos no diagonales, que muestra ser computacionalmente efectivo y suficientemente preciso.

ABSTRACT

In some engineering problems it is required to find numerical solutions of Poisson differential equation in a restricted number of points. In these situations the Boundary Element Method (BEM) seems advantageous with respect to more traditional techniques such as Finite Elements or Differences. However, an effective reduction of the computational effort requires the solution of a number of difficulties inherent to the methods.

In this work two aspects of the method are addressed. The first one is the singular integral originated in the fundamental solution, which gives rise to diagonal terms in the final system of equations. An efficient technique for numerical integration on element boundaries is defined, upon transformation by use of the divergence theorem.

Also, a simple criterion for accurate integration of non-diagonal terms is defined, which proves computationally efficient and sufficiently accurate.

INTRODUCCION

Si bien el Método de Elementos Finitos está firmemente establecido como herramienta de cálculo en Ciencias e Ingeniería, existen situaciones en que su costo computacional resulta excesivo en comparación con el volumen de información útil requerido por el analista.

Ante un requerimiento para determinar el "hot spot" en un convertidor de potencia, se consideró la conveniencia de la utilización del MEC para abordar dicho problema.

Como un estudio preliminar a la aplicación del MEC al problema citado, se hace una breve descripción del método, se plantea la conveniencia de su utilización y se proponen soluciones para superar las dificultades que se presentan.

DESARROLLO DEL METODO

En principio se deducirá la ecuación de partida del método para la ecuación de Poisson. Sea el siguiente problema de valor en la frontera:

$$\nabla^2 u = b(x, y, z, u) \quad u = g_1 \text{ sobre } S_1 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \text{ sobre } S_2 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h(u_f - u) / g_3$$

Planteando la formulación débil:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u v d\Omega = \int_{\Omega} b(x, y, z, u) v d\Omega \quad (2)$$

Si a la (2) se aplica segunda identidad de Green, esta se convierte en,

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u v d\Omega = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{\Omega} b(x, y, z, u) v d\Omega \quad (3)$$

Ahora, tomando como v una solución fundamental, y llamando q a las derivadas normales, obtenemos:

$$c_1 u_1 + \int_S u q^* ds = \int_S u^* q ds + \int_{\Omega} b(x, y, z, u) u^* d\Omega \quad (4)$$

donde $c_1 = 1$ en el interior del dominio,
 $c_1 = 1/2$ sobre un contorno suave,
 y u^* es una solución de la ecuación punto fuente.

Si se discretiza la frontera, descartando por el momento el

último término, y suponiendo elementos constantes, se obtiene:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (5)$$

donde

$$H_{ij} = \int_{s_j} q_j^* ds + \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \text{y} \quad G_{ij} = \int_{s_j} u_j^* ds$$

Esto conduce a un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, cuya solución son los valores incógnitas del problema sobre la frontera, que pueden corresponder tanto a la función como al flujo. Debido a esto, el método recibe el nombre de Formulación Mixta.

En este caso, para los valores interiores, hay que aplicar la ecuación (4) con $q_i = 1$ en una etapa posterior.

DISCRETIZACION CON ELEMENTOS LINEALES (2-D)

En este caso se tiene:

$$u(\xi) = \Phi_1 u_1 + \Phi_2 u_2 \quad \text{donde} \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

$$q(\xi) = \Phi_1 q_1 + \Phi_2 q_2 \quad \text{y} \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

En donde:

$$H_{ij}^1 = \int_{s_j} \Phi_1 q^* ds \quad \text{y} \quad H_{ij}^2 = \int_{s_j} \Phi_2 u^* ds$$

y fórmulas similares para la matriz G.

INTEGRALES SINGULARES

Como la solución fundamental es función de $1/r$, el coeficiente diagonal de G resulta de una integral singular. Esta integral debe ser calculada con métodos analíticos, semianalíticos o integrales numéricas con alto orden de integración. No sucede lo mismo, como veremos, con el término diagonal de H.

TRATAMIENTO DEL TERMINO FUENTE

Se propone para el término fuente una aproximación del tipo:

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (6)$$

donde L son los nodos interiores, y:

$$\nabla^2 \hat{u} = f_j$$

donde las u son soluciones particulares.

Con el mismo tratamiento para el segundo miembro, se arriba a la ecuación del método Recíproco Dual (DRM).

$$Hu - Gq = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (H\hat{u}_j - G\hat{q}_j) \quad (7)$$

Además, si se aplica (6) en los (N+L) DRM puntos obtenemos:

$$\alpha = F^{-1} b \quad (8)$$

(7) y (8) conducen nuevamente a un sistema de ecuaciones algebraicas.

INCORPORACION DE LA CONDICION DE CONTORNO DE TERCER TIPO.

Para introducir en la ecuación (1) una condición de tercer tipo, se subdivide la frontera, obteniendo:

$$c_i u_i + \int_S u q^* ds = \int_{S_{1,2}} q u^* ds + \int_{S_3} h u_f u^* ds - \int_{S_3} h u u^* ds \quad (9)$$

de donde se ve que la contribución de los nodos sobre S3 se divide entre el primero y el segundo miembro, no modificando sustancialmente la ecuación. Alternativamente, cuando se tratan problemas con no linealidades en las propiedades del material, esta condición de contorno se puede resolver iterativamente.

Del mismo modo, la introducción de los términos convectivos, como así también el tratamiento de los transitorios, no ofrece mayores dificultades teóricas.

Con el objeto de explorar el alcance de este método se realizaron programas en dos y tres dimensiones. Su aplicación a ejemplos

simples contrastando los resultados con soluciones analíticas se presentan a continuación.

En el caso bidimensional, el término diagonal de H no necesita ser calculado en ningún caso pues es el opuesto de la sumatoria de los elementos de la misma fila. Esto es fácil de ver aplicando a la ecuación de Laplace un potencial constante. Las especificaciones para este programa son las siguientes:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad f = 1 + \frac{1}{r} \quad \hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9}$$

Los términos diagonales de G son sencillos de calcular analíticamente, y resultan

$$G_1 = \frac{l}{4\pi} \left(\frac{3}{2} - \ln l \right) \quad G_2 = \frac{l}{4\pi} \left(\frac{1}{2} - \ln l \right)$$

donde l es el largo del elemento.

Integración de la singularidad en 3-D

Para el caso tridimensional se tiene:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad f = 1 + r \quad \hat{u} = \frac{r^2}{6} + \frac{r^3}{12}$$

La integración de la singularidad, ha recibido considerable atención de investigadores del MEC en los últimos años. Para elementos constantes y lineales en 2 y 3 dimensiones, existen soluciones analíticas. Para elementos más complejos se ha propuesto un número de métodos. Así, Rangoni [2], propone efectuar subdivisiones en partes triangulares. Otra posibilidad, muy explorada, es hacer transformaciones de coordenadas de acuerdo a polinomios prefijados [3-4]. También se han ensayado diversos esquemas de integración numérica para casos singulares [5], y expansiones del núcleo en series [6].

Sin embargo, existe la posibilidad de efectuar una integración numérica de gran exactitud con bajo orden de cuadratura en una clase muy general de elementos. En efecto, obsérvese que la singularidad del tipo $1/r$ puede expresarse como la divergencia de un vector. En dos dimensiones, resulta

$$\frac{1}{r} = \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (10)$$

De este modo, si el elemento es plano la integral singular puede transformarse al contorno del elemento, por aplicación del teorema de la divergencia,

$$\int_{\omega_s} \frac{1}{r} ds = \int_{\omega_s} \frac{\bar{r}}{r} ds = \int_{s_s} \frac{\bar{r} d\bar{l}}{r} \quad (11)$$

La integral (11) es ahora no singular. En el caso de elementos triangulares constantes existe solución analítica, que coincide, naturalmente, con la integral de área de la singularidad. Sin embargo, es computacionalmente más conveniente evaluarla en forma numérica sobre cada lado. El integrando varía suavemente y se puede obtener buena precisión con bajo orden de integración. La solución exacta, en cambio, requiere un considerable volumen de cálculo. Por otra parte, la transformación (10) es aplicable a cualquier elemento plano.

Evaluación de los elementos no diagonales

En la solución numérica por el MEC la mayor parte del tiempo de cómputo se invierte en la construcción del sistema de ecuaciones algebraicas. Esto proviene del alto orden de cuadratura necesario para ajustar adecuadamente algunos elementos de la matriz.

Sin embargo, está claro que no es necesario en principio usar el mismo orden de cuadratura en todas las integrales, dependiendo esto de la forma de variación de la solución fundamental y su flujo a través del elemento considerado. Esto a su vez depende del tamaño del elemento y de su distancia al punto fuente. Si bien la elección de una cuadratura óptima para cada integral puede resultar onerosa, es posible utilizar ventajosamente criterios para definir sólo dos órdenes apropiados de cuadratura. En efecto, si la variación relativa de r en el elemento es pequeña bastará con un bajo orden de integración. En caso contrario se hará necesario integrar con mayor precisión.

En el presente trabajo se implementó un criterio sencillo de decisión con un bajo costo computacional, que compara el tamaño del elemento con la distancia del centroide al punto fuente.

$$\epsilon = \frac{l}{r}$$

El tamaño l se estima como la raíz cuadrada del área elemental, que se halla disponible previo a la integración. Para valores de ϵ menores que cierto límite, se integra con siete puntos de Gauss. En caso contrario, el elemento se parcela en tres partes concurrentes en el centroide. El valor límite de ϵ se definió empíricamente.

Este esquema se aplicó a la solución de la ecuación

$$\nabla^2 u = -2$$

en un recinto cúbico de lado dos centrado en el origen. Este fue dividido en 48 elementos triangulares constantes, como ilustra

la figura 1.

En la tabla 1 se listan los valores nodales obtenidos con un esquema de integración con 7 puntos de Gauss en todos los elementos. Se contrasta con la solución analítica y se calcula el error cuadrático medio.

El mismo problema fue resuelto con el criterio de selección y parcelamiento propuesto. Con un pequeño incremento del tiempo de cómputo se logra una disminución del error cuadrático medio de un 50%, como ilustra la tabla II.

CONCLUSIONES

Si bien el Método de Elementos de Contorno reduce en principio las dimensiones del problema global, conduce a matrices llenas y no simétricas, con lo cual el costo computacional puede ser comparable al del Método de Elementos Finitos.

El presente trabajo muestra que una efectiva reducción del costo computacional puede obtenerse empleando mallas relativamente gruesas siempre que se utilice un alto orden de integración en elementos adecuadamente elegidos, para lo cual se propuso un sencillo criterio de selección. La técnica de subdividir los elementos para la integración, resultó ser una alternativa eficiente según muestran los resultados.

La transformación de las integrales singulares al contorno de los elementos, usando el teorema de la divergencia, permite efectuar una integración precisa con cuadraturas de muy bajo orden. El procedimiento es aplicable a elementos planos de lados curvos, y es ventajoso aún en casos en que existe solución analítica.

Finalmente, la credibilidad del método parece apoyarse firmemente en el ajuste del cálculo de la integral singular. De ahí que gran parte de los esfuerzos de los investigadores del MEC vayan dirigidos a su resolución en forma analítica o semianalítica.

REFERENCIAS

- [1] Partridge, P., Brebbia, C., Wrobel, L., The Dual Reciprocity Boundary Element Method. Ed. Elsevier Appl. Science, 1992.
- [2] Banerjee P.K., Butterfield R., Boundary Elemento Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, 1981.
- [3] Rangogni,R., Analytical Integration of the Fundamental Solution over Panel Boundary Element, Advances in BE, Vol.I, Springer-Verlag, 1989, pp.195-200.
- [4] Zhen, J., Cartwright,D., Numerical Integration of Kernel Shape Function Products for Singular Boundary Elements. Id. [3], pp.201-214.
- [5] Hayamy,K.,Brebbia, C., Quadrature Method for Singular and Nearly Singular Integrals in 3D. BEM X/88 Proc. of the X Int. Conf. on BEM, Southampton, UK, 1988, pp 237-264.

- [6] Telles, J.C.F, A Self Adaptive Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol 24., pp 959-973, 1987.
- [7] Aliabadi M.H., Hall W.S., Taylor Expansions for Singular Kernels in the Boundary Element Method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol 21, pp 2221-2236, 1985.

TABLA I: INTEGRACION CON SIETE PUNTOS DE GAUSS POR ELEMENTO

RESULTADOS DEL CALCULO

NODO	FUNCION	DERIVADA	SOL. ANALIT
1	-0.629630	-1.324427	-1.333333
2	-0.407407	-1.332456	-1.333333
3	-0.407407	-1.332453	-1.333333
4	-0.629630	-1.324425	-1.333333
5	-0.629630	-1.324426	-1.333333
6	-0.407407	-1.332452	-1.333333
7	-0.407407	-1.332453	-1.333333
8	-0.629630	-1.324426	-1.333333

RESULTADOS EN NODOS INTERIORES

NODO	FUNCION	SOL. ANALIT
49	-0.241611	-0.250000
50	-0.167873	-0.166667
51	-0.241610	-0.250000
52	-0.167875	-0.166667
53	-0.082842	-0.083333
54	-0.167874	-0.166667

ERROR RELATIVO = 0.474932E-02

TABLA II: SUBDIVISION DE ELEMENTOS PARA LA INTEGRACION

RESULTADOS DEL CALCULO

NODO	FUNCION	DERIVADA	SOL. ANALIT
1	-0.629630	-1.328282	-1.333333
2	-0.407407	-1.329742	-1.333333
3	-0.407407	-1.329746	-1.333333
4	-0.629630	-1.328282	-1.333333
5	-0.629630	-1.328282	-1.333333
6	-0.407407	-1.329747	-1.333333
7	-0.407407	-1.329742	-1.333333
8	-0.629630	-1.328288	-1.333333

RESULTADOS EN NODOS INTERIORES

NODO	FUNCION	SOL. ANALIT
49	-0.247087	-0.250000
50	-0.166942	-0.166667
51	-0.247085	-0.250000
52	-0.166943	-0.166667
53	-0.083418	-0.083333
54	-0.166943	-0.166667

ERROR RELATIVO = 0.328487E-02

