Mecánica Computacional Volúmen XIII
Compilado por M. Vénere
Bariloche, setiembre de 1992

SOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS DE CONTROL OPTIMO DE TIPO MIN-MAX

Silvia C. Di Marco

Departamento de Matemática - F. C. E. I. y A.

Universidad Nacional de Rosario

Av. Pellegrini 250 - 2000 Rosario - Argentina

RESUMEN

Consideramos en este trabajo la resolución numérica de la inecuación cuasivariacional de Bellman asociada al problema de minimizar el máximo de un funcional escalar sobre una trayectoria. Estudiamos específicamente, una solución aproximada por discretización en tiempo y en espacio y la velocidad de convergencia de estas aproximaciones a la función de costo óptimo del problema original. Dicha solución aproximada es obtenida resolviendo el problema resultante de discretizar la formulación del principio de programación dinámica asociado al problema original.

ABSTRACT

In this paper we consider the numerical solution of the quasi-variational inequality associated to the problem of minimizing the maximum of a scalar functional on a trajectory. We consider an approximated solution obtained by discretization on time and spatial variables and we study the rate of convergence of the discretized solutions to the optimal cost function of the original problem. This approximated solution is obtained by solving the problem resulting from the discretization of the principle of dynamic programming.

1. INTRODUCCION

1.1 Descripción del problema

Consideramos un sistema dinámico en el intervalo $[t, T]$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dy}{ds} = g(y(s), \alpha(s)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le t \le s \le T \\ y(t) = x \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \text{ con } \Omega \text{ abierto.} \end{array} \right. \tag{1}$$

El problema de control óptimo considerado consiste en minimizar el funcional:

$$\begin{array}{lll} J : [0,T] \times \Omega \times \mathfrak{U}(t,T) & \to \mathbb{R} & \\ \quad (t, x, \alpha(\cdot)) & \to J(t, x, \alpha(\cdot)) = \underset{t \le s \le T}{\text{sup es}} \; f(y(s), \alpha(s)) \end{array} \tag{2}$$

donde:

$$\mathfrak{U}(t,T) = \left\{ \alpha : [t,T] \to A \subset \mathbb{R}^m, \ \alpha(\cdot) \text{ medible} \right\}$$

Este problema aparece cuando se trata de minimizar la máxima desviación de una trayectoria con respecto a una deseable. Se difiere así de los problemas corrientemente considerados en la literatura, en los que se busca minimizar un costo acumulativo, lo cual no es siempre la mejor forma de representar el problema real bajo análisis.

El objetivo de este trabajo es aproximar numéricamente la función de costo óptimo:

$$\begin{aligned} u : [0,T]\times\Omega &\to \mathbb{R} \\ (t,x) &\to u(t,x) = \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{U}(t,T)} J(t,x,\alpha(\cdot)) \end{aligned} \tag{3}$$

1.2 Resultados obtenidos

En §1 damos una breve descripción de las hipótesis y resultados del problema continuo.

En §2 obtenemos una aproximación en tiempo discreto empleando un esquema de discretización por diferencias finitas.

En §3 calculamos la velocidad de convergencia de esta aproximación a la solución del problema original.

En §4 obtenemos, usando elementos finitos lineales, una aproximación totalmente discretizada convergente a la solución del problema original con velocidad $\sqrt{k}$.

En §5 presentamos una generalización del problema previo al caso en que el funcional de costo incluye un costo integral.

1.3 Consideraciones teóricas de la función costo óptimo

Sea BUC la clase de las funciones acotadas y uniformemente continuas sobre $\Omega\times A$.

Supondremos válidas las siguientes hipótesis sobre f y g a lo largo de todo el trabajo.

(a) $g : \Omega\times A \to \mathbb{R}^r$, $g \in BUC(\Omega\times A)$

$$\|g(x,a)\| \le M_g, \; \|g(x,a)-g(\tilde{x},a)\| \le L_g\|x-\tilde{x}\| \quad \forall\, x, \tilde{x} \in \Omega,\; a \in A \tag{4}$$

(b) $f : \Omega\times A \to \mathbb{R}$, $f \in BUC(\Omega\times A)$

$$|f(x,a)| \le M_f, \; |f(x,a)-f(\tilde{x},a)| \le L_f\|x-\tilde{x}\| \quad \forall\, x, \tilde{x} \in \Omega,\; a \in A \tag{5}$$

(c) A es compacto

(d) La trayectoria $y(\cdot)$ pertenece a Ω, para cualquier control perteneciente a $\mathcal{U}(t,T)$.

1.4 Propiedades

- $u \in BUC([0,T]\times\Omega)$, más aún, la función u es lipschitziana en su segunda variable con constante $L_u = L_f\exp(L_gT)$
- Se verifica el siguiente principio de programación dinámica:

  $\forall\, 0 \le t < s < T$

  $$u(t,x) = \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{U}(t,s)}\left\{\max\left(u(s,y(s)),\ \operatorname*{sup\,es}_{t\le\theta\le s} f(y(\theta),\alpha(\theta))\right)\right\} \tag{6}$$

  con condición final:

  $$u(T,x) = \min_{a\in A} f(x,a)$$
- La función u es la única solución de viscosidad de la siguiente inecuación cuasi-variacional:

  $\forall\, t \in [0,T),\ \forall\, x \in \Omega$

  $$\max\left\{u_t(t,x) + H(t,x,u(t,x),\nabla_x u(t,x)),\ \min_{\eta\in A} f(x,\eta) - u(t,x)\right\} = 0 \tag{7}$$

  donde:

  $$H(t,x,r,q) = \min\{q\cdot g(x,z);\ \forall z / f(x,z) \le r\} \tag{8}$$

Las propiedades anteriores han sido establecidas en [1].

2. DISCRETIZACION EN TIEMPO DEL PROBLEMA

2.1 Presentación del problema en tiempo discreto

Consideramos el intervalo $[0, T]$, y una partición del mismo en μ subintervalos de longitud h. Definimos, para todo $n = 0, \ldots, \mu-1$:

$$\mathfrak{U}^h(n, \mu) = \left\{ \alpha \in \mathfrak{U}(nh, T) : \alpha \text{ es constante en } [(n+k)h, (n+k+1)h),\ k=0, \ldots, \mu-n-1 \right\}$$

$$J^h(n, x, \alpha^h(\cdot)) = \max_{k=n,\ldots,\mu-1} f(y^h(k), \alpha^h(kh)) \tag{9}$$

$$u^h(n, x) = \min_{\alpha^h \in \mathfrak{U}^h(n,\mu)} J^h(n, x, \alpha^h(\cdot)) \tag{10}$$

con

$$\begin{cases} y^h(k+1) = y^h(k) + h\, g(y^h(k), \alpha^h(kh)) \\ \qquad\qquad k = 1, \ldots, \mu-2 \\ y^h(0) = x \end{cases} \tag{11}$$

Nota: En (10) estamos calculando realmente un mínimo pues para todo $n=0, \ldots, \mu-1$, $\mathfrak{U}^h(n, \mu)$ es compacto.

2.2 Propiedades de u^h

Lema 2. *Para todo $n = 0, \ldots, \mu-2$:*

$$u^h(n, x) = \min_{a \in A} \left\{ \max\left(f(x, a),\ u^h(n+1, x+hg(x, a)) \right) \right\}$$

con condición final: (12)

$$u^h(\mu-1, x) = \min_{a \in A} f(x, a)$$

Lema 3. *Para todo $n = 0, \ldots, \mu-1$:*

(a) u^h *es acotada* (13)

(b) $\| u^h(n, x) - u^h(n, \tilde{x}) \| \leq L_u \| x - \tilde{x} \|$ (14)

2.3 Aproximación de los controles

En (10) hemos visto que para calcular la función de costo óptimo discreta en tiempo, restringimos la optimización al conjunto de controles escalonados $\mathfrak{U}^h(0, \mu)$. Necesitamos pues, establecer alguna relación entre los controles de $\mathfrak{U}(0, T)$ y $\mathfrak{U}^h(0, \mu)$.

Dado $\alpha \in \mathfrak{U}(0, T)$ y una partición del $[0, T]$, $\{t_i = i\frac{T}{\mu_1},\ i = 0, \ldots, \mu_1\}$, $h_1 = \frac{T}{\mu_1}$, llamemos $I_i = [t_i, t_{i+1})$ para $i = 0, \ldots, \mu_1 - 1$.

Sea $\tilde{\alpha}$ tal que:

- $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s)$ en c.t.s $\in I_i$ (15)
- $\sup_{s \in I_i} \text{es } f(y(t_i), \alpha(s)) = \sup_{s \in I_i} f(y(t_i), \tilde{\alpha}(s))$ (16)

Sea $A(i) = \{\tilde{\alpha}(s) : s \in I_i\}$; $A(i) \subseteq A$. Como A es compacto por hipótesis, si llamamos $\Gamma_i = \overline{A(i)}$, Γ_i resulta compacto.

- Para todo $i = 0, \ldots, \mu_1 - 1$, existe una α_w escalonada en I_i, que toma a lo sumo $r+1$ valores constantes en Γ_i, tal que:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(y(t_i), \alpha(s))\, ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(y(t_i), \alpha_w(s))\, ds \tag{17}$$

Para la prueba de (17) cf [3].

Además resulta:

$$\max_{s \in I_i} f(y(t_i), \alpha_w(s)) \le \operatorname{sup\,es}_{s \in I_i} f(y(t_i), \alpha(s)) \tag{18}$$

En efecto:

Como $\alpha_w(t) \in \Gamma_i$, $\max\limits_{I_i} f(y(t_i), \alpha_w(t)) \le \max\limits_{\Gamma_i} f(y(t_i), \cdot) = \sup\limits_{\Gamma_i} f(y(t_i), \cdot)$ (19)

Pero, por ser $\Gamma_i = \overline{A(i)}$, tenemos, $\sup\limits_{\Gamma_i} f(y(t_i), \cdot) = \sup\limits_{A(i)} f(y(t_i), \cdot)$ (20)

Por la definición de $A(i)$, resulta, $\sup\limits_{A(i)} f(y(t_i), \cdot) = \sup\limits_{I_i} f(y(t_i), \tilde{\alpha}(t))$ (21)

De (19), (20), (21) y (16), queda probado (18).

Nota: Con el objeto de lograr simplicidad de notación, denotaremos con C, M y K a cualquier constante genérica cuyo valor depende del contexto donde aparece. Dichas constantes provienen de los datos del problema y salvo que se diga lo contrario son independientes de los parámetros de discretización.

El siguiente lema establece una estimación para la diferencia entre la trayectoria original del sistema y la respuesta correspondiente al control escalonado $\alpha_w(\cdot)$.

Lema 4. *Sea $y(\cdot)$ la respuesta al control $\alpha(\cdot)$ y $y_w(\cdot)$, la respuesta al control $\alpha_w(\cdot)$, entonces:*

$$\| y(t) - y_w(t) \| \le M h_1$$

2.4 Aproximación de los controles con funciones de paso uniforme

El control α_w es una función escalonada que tiene, a lo sumo, $r+1$ escalones en los intervalos de longitud h_1. Necesitamos pues, relacionarla con alguna función perteneciente a $\mathcal{U}^h(0, \mu)$. Para ello, introducimos un parámetro n_2 y definimos:

$$h = \frac{h_1}{n_2(r+1)} \tag{22}$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{2}{h L_g (r+1)}} \tag{23}$$

Para cada intervalo I_i, $t_i = (i-1)h_1$, sabemos que α_w toma a lo sumo $r+1$ valores diferentes que denotamos con α_{ij}, $i = 1, \ldots, \mu_1$, $j = 0, \ldots, r$. Denotamos con λ_{ij} a la longitud del subintervalo donde $\alpha_w = \alpha_{ij}$ y $n_{ij} = [\lambda_{ij}/h]$, con $[s]$ la parte entera de s.

Definimos:

$$\alpha_w^h(s) = \alpha_w(s) \quad \forall s \in [\tilde{t}_{ij}, \tilde{t}_{i,j+1}) \tag{24}$$

$t_{00} = t_0$

$t_{i0} = t_{i-1,r} + h$

$t_{ij} = t_i + \sum_{k=1}^{j} \lambda_{ik}$ para $j = 1, \ldots, r$

$\tilde{t}_{ij} = h[t_{ij}/h]$

Por lo tanto, $\alpha_w^h = \alpha_w$ en I_i salvo en a lo sumo $r+1$ intervalos de longitud η_{ij}, con $\eta_{ij} = t_{ij} - \tilde{t}_{ij} \leq h$

Luego, $\alpha_w^h = \alpha_w$ en I_i salvo en un conjunto de medida menor que:

$$\sum_{j=0}^{r} \eta_{ij} = (r+1)h \tag{25}$$

Por construcción de α_w^h, resulta:

$$\alpha_w^h \in \mathfrak{U}^h(0, \mu) \tag{26}$$

$$\{\alpha_w^h(s),\ s \in I_i\} = \{\alpha_w(s),\ s \in I_i\} \tag{27}$$

De (27) y (18), sigue:

$$\max_{s \in I_i} f(y(t_i), \alpha_w^h(s)) \leq \operatorname{sup\,es}_{s \in I_i} f(y(t_i), \alpha(s)) \tag{28}$$

El siguiente lema establece una estimación para la diferencia entre la trayectoria original del sistema y la respuesta correspondiente al control escalonado $\alpha_w^h(\cdot)$.

Lema 5. *Sea $y(\cdot)$ la respuesta al control $\alpha(\cdot)$ y $y_w^h(\cdot)$ la respuesta al control $\alpha_w^h(\cdot)$, entonces:*

$$\left\| y(t) - y_w^h(t) \right\| \leq K\sqrt{h}$$

3. VELOCIDAD DE CONVERGENCIA

Dada una política $\alpha \in \mathfrak{U}(0,T)$ y su respuesta $y(\cdot)$, hemos construído un control $\alpha_w^h \in \mathfrak{U}^h(0,\mu)$ y conseguido una cota para la diferencia entre las trayectorias correspondientes. Queremos ahora calcular el error que se comete cuando consideramos u^h en lugar de u, utilizando la construcción anterior para relacionar los conjuntos $\mathfrak{U}(0,T)$ y $\mathfrak{U}^h(0,\mu)$.

Definimos la siguiente función auxiliar: $\forall\ n = 0, \ldots, \mu - 1$

$$u^e(n, x) = \min_{\alpha^h(\cdot) \in \mathfrak{U}^h(n,\mu)} J(nh, x, \alpha^h(\cdot)) \tag{29}$$

Teorema 1: *$\forall\ n = 0, \ldots, \mu-1$, se verifica:*

$$\left| u(nh, x) - u^h(n, x) \right| \leq M\sqrt{h}$$

donde $u(\cdot)$ es el costo óptimo del problema original y $u^h(\cdot)$ está dado por (10).

Demostración:

$$\left| u(nh,x) - u^h(n,x) \right| \leq \left| u(nh,x) - u^e(n,x) \right| + \left| u^e(n,x) - u^h(n,x) \right| \tag{30}$$

Teniendo en cuenta que el error asociado al método de Euler de integración del sistema (1) es de orden h, es fácil ver que:

$$\left| u^e(n,x) - u^h(n,x) \right| \leq C\,h \tag{31}$$

Acotemos el primer término del lado derecho de (30):

- $u(nh, x) \leq u^e(n, x)$, ya que $\mathcal{U}^h(n, \mu) \subseteq \mathcal{U}(nh, T)$ (32)
- En el otro sentido:

Sea $\alpha \in \mathcal{U}(nh, T)$, $\alpha_w^h \in \mathcal{U}^h(n, \mu)$ el control asociado a α y $t \in I_i$.

Usando lema 5 y (28) se llega a:

$$J(nh, x, \alpha_w^h) \leq J(nh, x, \alpha) + M\sqrt{h} \tag{33}$$

Dado que
$$u^e(n, x) \leq J(nh, x, \alpha_w^h) \leq J(nh, x, \alpha) + M\sqrt{h} \tag{34}$$

Tomando el ínfimo en el miembro derecho de (34), queda:

$$u^e(n, x) \leq u(nh, x) + M\sqrt{h} \tag{35}$$

De (32) y (35):

$$| u^e(n, x) - u(nh, x) | \leq M\sqrt{h} \tag{36}$$

De (31) y (36), sigue que:

$$| u(nh, x) - u^h(n, x) | \leq C\sqrt{h} \tag{37}$$

$\square$

4. DISCRETIZACION EN EL ESPACIO

Hasta ahora tenemos una aproximación de u lograda discretizando el problema en el tiempo pero que no puede ser computada. Para obtener una aproximación computable, discretizamos el espacio Ω, del mismo modo que en [4].

a) Aproximación del dominio Ω

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^r$ y $\{S_j^k\}$ una familia de finita de simplex que aproximan a Ω en el sentido en que $\Omega_k = \bigcup_j S_j^k$ es un poliedro de $\mathbb{R}^r$ tal que, $\max_j(\text{diám}(S_j^k)) = k$, $\exists\ h_0 > 0$ para el que $x + hg(x, a) \in \Omega_k$, $\forall\ x \in \Omega_k$, $\forall\ a \in A$, $\forall\ h < h_0$.

Sea $V_k = \{x^i, i = 1, \ldots, N\}$ el conjunto de vértices de Ω_k, ordenados adecuadamente donde N es su cardinal. Todo $x \in \Omega_k$ es una combinación convexa de los nodos x^i que sean vértices del simplex al cual x pertenece. Por lo tanto existe una matriz NxN, con componentes $\gamma_j(x^i, a)$, tal que :

- $\gamma_j(x^i, a) \geq 0$, $\forall\ i, j = 1, \ldots, N$ (38)
- $\sum_{j=1}^{N} \gamma_j(x^i, a) = 1$, $\forall\ i = 1, \ldots, N$ (39)
- $x^i + hg(x^i, a) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j(x^i, a)\, x^j$, $\forall\ i = 1, \ldots, N$ (40)

b) Definición del espacio aproximante W_k

Consideramos el conjunto W_k de funciones $w : \Omega_k \to \mathbb{R}$, w continua en Ω_k, $\frac{\partial w}{\partial x}$ constante en el interior de cada simplex de Ω_k, esto es, las funciones w son elementos finitos lineales. Es obvio que todo $w \in W_k$ está caracterizado por sus valores en V_k.

Definimos $u_k^h \in W_k$ tal que, $\forall\ i = 1, \ldots, N$, $\forall\ n = 0, \ldots, \mu - 2$:

$$\begin{aligned} u_k^h(n, x^i) &= \min_{a \in A} \left\{ \max\left(f(x^i, a), \sum_{j=1}^{N} \gamma_j(x^i, a)\, u_k^h(n+1, x^j) \right) \right\} \\ u_k^h(\mu - 1, x^i) &= \min_{a \in A} f(x^i, a) \end{aligned} \tag{41}$$

Nota: A es un conjunto infinito, por lo que (41) no es aún un esquema totalmente discretizado. El paso final consiste en aproximar este conjunto compacto por un conjunto finito adecuado, lo cual no será explicitado en este trabajo para simplificar la notación. Por esta causa consideraremos de aquí en más que A es un conjunto finito. Al mismo tiempo supondremos para simplificar la demostración de los siguientes teoremas que $\Omega = \mathbb{R}^r$.
El siguiente teorema establece una estimación para la diferencia entre el costo optimal discreto en tiempo y el definido en (41).

Teorema 2: *Sea $x \in V_k$, $n = 0, \ldots, \mu-1$*

$$\left| u^h(n,x) - u^h_k(n,x) \right| \leq M\rho + T(L_u L_g \rho + L_u \frac{k^2}{\rho h})$$

Demostración: Resulta de aplicar las propiedades establecidas en los lemas siguientes

$$\text{Sea } u^h_\rho(n,x) = \int_{\mathbb{R}^r} u^h(n, x-y)\, \beta_\rho(y)\, dy\ ,\ \forall\ n = 0, \ldots, \mu-1 \tag{42}$$

$$\text{donde } \beta_\rho(x) = \frac{1}{\rho^r}\beta(\tfrac{x}{\rho})\ \forall\ \rho \in \mathbb{R}^+ \tag{43}$$

$$\beta(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^r),\ \beta(x) \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^r,\ \mathrm{sop}(\beta) \subseteq B(0,1),\ \int_{\mathbb{R}^r} \beta(x)\, dx = 1 \tag{44}$$

Por las propiedades de convolución, es válido que:

$$\left| u^h_\rho(n,x) - u^h(n,x) \right| \leq L_u \rho \tag{45}$$

Lema 6. *Sea $x \in V_k$, $n = 0, \ldots, \mu-2$, entonces u^h_ρ es subsolución del problema:*

$$v_\rho(n,x) = \min_{a \in A} \left\{ \max\Big(f_\rho(x,a),\ v_\rho(n+1, x + hg(x,a)) + hL_u L_g \rho \Big) \right\}$$

$$v_\rho(\mu-1, x) = \min_{a \in A} f_\rho(x,a)$$

donde $f_\rho(x,a) = f(x,a) + K\rho$, con $K = L_f + L_u(2 + L_g h)$

Definimos $\forall\ n = 0, \ldots, \mu-1$, $u^h_{\rho,k}$ la función linealizada de u^h_ρ. Esto es, la función de W_k, tal que:

$$u^h_{\rho,k}(n,x) = u^h_\rho(n,x) \quad \forall\ x \in V_k \tag{46}$$

En [5], se prueba:

$$\left| u^h_{\rho,k}(n,x) - u^h_\rho(n,x) \right| \leq L_u \frac{k^2}{\rho} \quad \forall\ x \in \Omega_k \tag{47}$$

Lema 7. *Sea $x \in V_k$, $n = 0, \ldots, \mu-2$, entonces $u^h_{\rho,k}$ es subsolución de:*

$$v_{\rho,k}(n,x) = \min_{a \in A} \left\{ \max\Big(f_\rho(x,a),\ v_{\rho,k}(n+1, x + hg(x,a)) + hL_u L_g \rho + L_u \frac{k^2}{\rho} \Big) \right\}$$

$$v_{\rho,k}(\mu-1, x) = \min_{a \in A} f_\rho(x,a)$$

Lema 8. *Para todo $x \in V_k$, $n = 0,\dots,\mu-1$, se verifica:*

$$u_k^h(n,x) \leq v_{\rho,k}(n,x) \leq u_k^h(n,x) + K\rho + T(L_u L_g \rho + L_u \frac{k^2}{\rho h})$$

Lema 9. *Si $\{\tilde{a}_n\}$ es la política óptima para x_0, esto es la que produce el mínimo en (10) con $y^h(0) = x_0$ en (11), definimos el problema de stopping time maximizante:*

$$z(n,x) = max\Big(f(x,\tilde{a}_n),\ z(n+1,x+hg(x,\tilde{a}_n))\Big)$$

$$z(\mu-1,x) = f(x,\tilde{a}_{\mu-1})$$

Entonces, $\forall\ n = 0,\dots,\mu-1$, se cumple:

$$z(n,y_{x_0}^h(n)) = u^h(n,y_{x_0}^h(n))$$

Sea z_ρ definida de manera análoga a (42).

Lema 10. *Sea $x \in V_k$, $n = 0,\dots,\mu-2$, entonces z_ρ es supersolución del problema:*

$$\phi_\rho(n,x) = max\Big(\tilde{f}_\rho(x,\tilde{a}_n),\ \phi_\rho(n+1,x+hg(x,\tilde{a}_n)) - hL_u L_g \rho\Big)$$

$$\phi_\rho(\mu-1,x) = \tilde{f}_\rho(x,\tilde{a}_{\mu-1})$$

donde $\tilde{f}_\rho(x,\tilde{a}_n) = f(x,\tilde{a}_n) - K\rho$, con $K = L_f + L_u(2+L_g h)$

Sea $z_{\rho,k}$ la linealizada de z_ρ, definida como en (46)

Lema 11. *Sea $x \in V_k$, $n = 0,\dots,\mu-2$, entonces $z_{\rho,k}$ es supersolución del siguiente problema:*

$$\sigma_{\rho,k}(n,x) = max\Big(\tilde{f}_\rho(x,\tilde{a}_n),\ \sigma_{\rho,k}(n+1,x+hg(x,\tilde{a}_n)) - hL_u L_g \rho - L_u \frac{k^2}{\rho}\Big)$$

$$\sigma_{\rho,k}(\mu-1,x) = \tilde{f}_\rho(x,\tilde{a}_{\mu-1})$$

Lema 12. *Sea $x \in V_k$, $n = 0,\dots,\mu-2$. Para el problema:*

$$z_k(n,x) = max\Big(f(x,\tilde{a}_n),\ z_k(n+1,x+hg(x,\tilde{a}_n))\Big)$$

$$z_k(\mu-1,x) = f(x,\tilde{a}_{\mu-1})$$

se tiene que:

$$z_k(n,x) \geq u_k^h(n,x)$$

Lema 13. *Para todo $x \in V_k$, $n = 0,\dots,\mu-1$, se verifica:*

$$\sigma_{\rho,k}(n,x) \geq z_k(n,x) - K\rho - T(L_u L_g \rho + L_u \frac{k^2}{\rho h})$$

El siguiente teorema establece una estimación para la diferencia entre el costo optimal continuo y el definido en (41).

Teorema 3: *Para todo $x \in V_k$, $n = 0,\dots,\mu-1$, se verifica:*

$$\Big| u(nh,x) - u_k^h(n,x) \Big| \leq C\sqrt{k}$$

Demostración: Reuniendo los resultados de teorema 1 y teorema 2, se obtiene:

$$\left| u(nh, x) - u_k^h(n, x) \right| \leq C\sqrt{h} + M\rho + T(L_u L_g \rho + L_u \frac{k^2}{\rho h}) \tag{48}$$

La cota obtenida en (48) asume su valor mínimo en $\rho = C\frac{k}{\sqrt{h}}$, por lo que:

$$\left| u(nh, x) - u_k^h(n, x) \right| \leq C\left(\sqrt{h} + \frac{k}{\sqrt{h}}\right) \tag{49}$$

Tomando h = k:

$$\left| u(nk, x) - u_k^h(n, x) \right| \leq C\sqrt{k}$$

□

5. GENERALIZACION

De manera similar y sólo con una ligera variación en la elección de α_w puede tratarse el problema generalizado de minimizar un funcional que incluye un costo integral:

$$J : [0,T] \times \Omega \times \mathfrak{U}(t, T) \quad \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, \alpha(\cdot)) \quad \rightarrow J(t, x, \alpha(\cdot)) = \underset{t \leq s \leq T}{\operatorname{sup\ es}} \left(\int_t^s b(y(\theta), \alpha(\theta))\, d\theta + f(y(s), \alpha(s)) \right) \tag{50}$$

donde $y(\cdot)$ es la solución del sistema dinámico (1) y la función b satisface:

$b : \Omega \times A \rightarrow \mathbb{R}^r$, $b \in BUC(\Omega \times A)$

$$\| b(x, a) \| \leq M_b, \; \| b(x, a) - b(\tilde{x}, a) \| \leq L_b \| x - \tilde{x} \| \quad \forall\, x, \tilde{x} \in \Omega,\ a \in A \tag{51}$$

La función u está definida como en (3) y satisface:

- $u \in BUC([0, T] \times \Omega)$, más aún, se verifica el siguiente principio de programación dinámica:

$\forall\, 0 \leq t < s < T$

$$u(t, x) = \inf_{\alpha(\cdot) \in \mathfrak{U}(t,s)} \left\{ \max\left(u(s, y(s)) + \int_t^s b(y(\theta), \alpha(\theta))\, d\theta \,,\ \underset{t \leq \kappa \leq s}{\operatorname{sup\ es}} \int_t^\kappa b(y(\theta), \alpha(\theta))\, d\theta + f(y(\kappa), \alpha(\kappa)) \right) \right\}$$

con condición final: (52)

$$u(T, x) = \min_{a \in A} f(x, a)$$

Las propiedades anteriores han sido establecidas en [1].

El funcional asociado a la discretización en tiempo es el siguiente:

$$J^h(n, x, \alpha^h(\cdot)) = \max_{k = n, \ldots, \mu - 1} \left(\sum_{j=n}^{k} h\, b(y^h(j), \alpha^h(jh)) + f(y^h(k), \alpha^h(kh)) \right) \tag{53}$$

La función u^h está definida como en (3), y satisface, $\forall\, n = 0, \ldots, \mu - 2$:

$$u^h(n, x) = \min_{a \in A} \left\{ \max\left(f(x, a),\ u^h(n + 1, x + hg(x, a)) + hb(x, a) \right) \right\}$$

con condición final: (54)

$$u^h(\mu - 1, x) = \min_{a \in A} \left(f(x, a) + h\, b(x, a) \right)$$

CONCLUSIONES

Para el problema de optimización min-max analizado en el marco continuo por Barron-Ishii se ha desarrollado aquí un procedimiento totalmente discretizado para su resolución numérica. Las soluciones numéricas que se obtienen convergen a la solución del problema original, siendo posible acotar el error en la forma $\left\| u - u_h^k \right\| \leq C\sqrt{k}$.

Por un simple cambio de variables es posible abarcar los problemas de control óptimo con minimización de un criterio integral (como los analizados en [4]), en el marco del problema de optimización analizado en este trabajo. El procedimiento de discretización aquí presentado coincide con la metodología tratada en [4]. Dado que allí se demostró que la acotación del error en la forma $\sqrt{k}$ es crítica, queda así establecido que éste es también el límite de precisión para el procedimiento numérico aquí desarrollado.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barron E. N., Ishii H.: The Bellman equation for minimizing the maximum cost. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 13, N°9, pp. 1067-1090, 1989.

[2] Capuzzo Dolcetta I., Ishii H.: Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optim.*, Vol. 11, pp. 161-181, 1984.

[3] Gonzáles R., Tidball M.: On a Discrete Time Approximation of the Hamilton-Jacobi Equation of Dynamic Programming, *Rapport de Recherche* N°1375, INRIA, 1990.

[4] Gonzáles R., Tidball M.: On the rate of convergence of fully discrete solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Rapport de Recherche* , N° 1376, INRIA, 1991.

[5] Strang G., Fix G.: An Analysis of the Finite Element Method. (Prentice-hall,Englewood Cliffs, NJ 1973)