Mecánica Computacional Vol. 14, páginas 561-570
compilado por Sergio Idelsohn y Victorio Sonzogni
Editado por AMCA, Santa Fe, 1994

OPTIMIZACION DE MAQUINAS MULTIPRODUCTO CON DEMANDAS SECCIONALMENTE DETERMINISTICAS

Elina M. Mancinelli

Dpto. Matemática, E.C.E.N., Fac. Cs. Exactas, Ing. y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario, Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se estudia la optimización del programa de producción de una máquina multiproducto, donde las demandas de cada producto son variables aleatorias seccionalmente determinísticas. Las mismas toman un número finito de valores y los instantes de cambio están descriptos por procesos de Poisson. Se presenta la caracterización teórica de la solución del problema y un procedimiento de aproximación numérica basado en el método de los elementos finitos. Se establece la convergencia de las soluciones discretas hacia la solución del problema original.

ABSTRACT

In this work we study the optimization of a production system comprising a multi-item single machine with piecewise deterministic demands. They assume a finite number of values and the demand changes are described by Poisson processes. We present the theoretical characterization of the solution and a numerical procedure to solve it. We establish the convergence to the discrete procedure.

1. INTRODUCCION

En este trabajo se estudia la optimización del programa de producción de una máquina multiproducto, donde las demandas de cada producto son de carácter aleatorio. Las mismas toman un número finito de valores y las conmutaciones entre los mismos están descriptas por un proceso de Poisson (ver [3], [4], [17], [20]).

El objetivo es encontrar un programa de producción óptimo en realimentación que minimice un criterio $J_x^{dj}(\beta)$ que tiene en cuenta los costos conjuntos de almacenamiento, producción y de conmutación de políticas, es decir una política $\bar{\beta}$ tal que

$$J_x^{dj}(\bar{\beta}(.)) \equiv \inf\left\{ J_x^{dj}(\beta(\cdot)) \mid \beta(\cdot) \in \mathfrak{B}_x^{dj} \right\}, \tag{1}$$

donde con $\mathfrak{B}_x^{dj}$ simbolizamos el conjunto de políticas markovianas (ver [4], [9]).

Con el uso de técnicas de la programación dinámica es posible encontrar una política estacionaria optimal, resolviendo un sistema de inecuaciones cuasi-variacionales (QVI) integro-diferenciales de primer orden (llamado la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) del problema), cuya forma será descripta en §3. La resolución numérica de este sistema, se obtiene por discretización con el método de los elementos finitos siguiendo la metodología descripta en [10] – [13] y será expuesta en la sección §4, junto con resultados de convergencia.

2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

2.1. Descripción del sistema de producción

En cada instante la máquina está detenida o produciendo alguno de m artículos posibles.

Notamos con:

- $d=0$ el estado de no producción y con $d=1, \ldots, m$ cuando se produce el item d
- p^d producción instantánea del item d
- n^d cantidad de demandas posibles para el item d
- $\mathfrak{J}$ conjunto de demandas posibles $\mathfrak{J} = \prod_{d=1}^{m} \{1, \ldots, n^d\}$, $\mathfrak{I} = \mathrm{card}(\mathfrak{J}) = \prod_{d=1}^{m} n^d$ (2)
- Para cada índice $j = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathfrak{J}$ designamos con $r_j = (r^1_{j_1}, \ldots, r^d_{j_d}, \ldots, r^m_{j_m})$ el correspondiente vector de demandas.
- $\lambda_{i,j}$ densidad de probabilidades de conmutación del estado de demanda i al j
- M_d nivel máximo para el stock del producto d
- $f(x, d)$ función de costo instantáneo de almacenamiento y producción
- $q(d, \tilde{d})$ costos conmutación del estado d al $\tilde{d}$
- α factor de descuento o de actualización.

Suponemos válidas las siguientes condiciones

- los costos de conmutación son no negativos y verifican una desigualdad triangular, es decir

$$q(d, \tilde{d}) \geq 0 \quad \forall\, \tilde{d} \neq d\,, \quad q(d, d) = 0 \quad \forall\, d \in D \tag{3}$$

$$q(d, \hat{d}) \leq q(d, \tilde{d}) + q(\tilde{d}, \hat{d})\,, \qquad \forall\, d \neq \tilde{d} \neq \hat{d} \tag{4}$$

- las conmutaciones en lazos cerrados tienen costo total no nulo, i.e.

$$\sum_{i=0}^{p} q(d_i, d_{i+1}) \geq q_0 > 0 \tag{5}$$

para cualquier lazo cerrado $d_0, d_1, \ldots, d_p, d_{p+1}$, con $d_0 = d_{p+1}$.

- las conmutaciones son instantáneas
- condición de compatibilidad entre demanda y producción

$$\sum_{d=1}^{m} \frac{r_j^d}{p_d} < 1 \qquad \forall\, j \in \mathfrak{J}. \tag{6}$$

2.2 El conjunto Q de estados admisibles

Sea $y_d(t)$ el nivel de stock del item d en el tiempo t, con condición inicial $y_d(0) = x_d$. Por lo tanto en notación vectorial tenemos para el estado global "y" del sistema

$$y(t) \equiv (y_1(t), \ldots, y_m(t)), \qquad (y_1(0), \ldots, y_m(0)) = (x_1, \ldots, x_m). \tag{7}$$

Dado que no se permite backlogging ni sobrepasar el nivel de stock máximo de cada item y_d, se tiene

$$0 \leq y_d \leq M_d \qquad \forall\, d = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Dividimos los valores x_i en tres categorías: $x_i = 0$, $0 < x_i < M_i$, $x_i = M_i$ y definimos

$$\Gamma(a_1,\ldots,a_m) \equiv \left\{x \mid a(x) = (a_1,\ldots,a_m)\right\}, \tag{9}$$

siendo

$$\left| \begin{array}{ll} a_i = 0 & \text{si } x_i = 0 \\ a_i = 1 & \text{si } x_i \in (0, M_i) \\ a_i = 2 & \text{si } x_i = M_i. \end{array} \right. \tag{10}$$

El espacio de estados admisibles Q comprende sólo el conjunto de puntos con a lo sumo una componente igual a cero, ya que a partir de otros puntos que no verifiquen esta condición, la ruptura de stock es inevitable, es decir

$$Q = \bigcup_a \left\{\Gamma(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_m) \mid \text{a lo sumo un } a_i = 0\right\}. \tag{11}$$

Llamamos con ∂Q^+ a los puntos de Q no admisibles, i.e.

$$\partial Q^+ = \bigcup_a \left\{\Gamma(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_m) \mid \text{al menos dos } a_i = 0\right\}. \tag{12}$$

Si notamos con Ω el interior de Q, se tiene

$$\Omega \equiv \left\{x \mid 0 < x_i < M_i,\ i = 1,\ldots,m\right\} = \Gamma(1,\ldots,1). \tag{13}$$

2.3 La evolución del sistema

De la definición de r_j^d, p^d, surge que el vector de estado "y" verifica la ecuación de evolución

$$\frac{dy}{dt} = g(\beta(t), j), \tag{14}$$

siendo las componentes del vector g

$$g_d(\beta, j) = \left| \begin{array}{ll} -r_j^d & \text{si } \beta \neq d \\ & \\ p^d - r_j^d & \text{si } \beta = d. \end{array} \right. \tag{15}$$

La dinámica se modifica cuando cambia el vector de demanda, siendo ésta una variación aleatoria regida por un proceso de Poisson. Las densidades de transición están dadas por los parámetros $\lambda_{ij} \geq 0$, $i,j \in \mathfrak{J}$.

2.4 El conjunto $\mathfrak{B}_x^{d,j}$ de controles admisibles

Un programa de producción admisible está dado por una sucesión de tiempos de conmutación θ_i y de estados de producción d_i. Estas variables a su vez serán variables aleatorias adaptadas al proceso (ver [3], [4], [9] para la definición y uso de este concepto).

Dada una función $\tilde{\mathfrak{D}}$: $Q \times D \times \mathfrak{J} \to D$, que constituye un control en realimentación, la función de control $d(\cdot)$ (que constituye un control markoviano (ver [9])), se determina a través de la relación

$$d(t) = \tilde{\mathfrak{D}}(y(t), d(t-), j(t)). \tag{16}$$

El estado de producción $d(t)$ es la constante d_i en el intervalo $(\theta_i, \theta_{i+1}]$, donde

$$0 = \theta_0 \leq \theta_1 < \ldots < \theta_i < \theta_{i+1} < \ldots;\ d_i \in \{0, 1\};\ d_i \neq d_{i+1};\ i = 0, 1,\ldots \tag{17}$$

Nota 2.1: El control markoviano admisible $\tilde{\mathfrak{D}}$ debe respetar la condición adicional de que las trayectorias asociadas $y(t) \in Q\ \forall\ t \in [0, \infty)$.

2.5 La función de costo óptimo V

A cada política de control le asociamos el funcional J, el cual tiene en cuenta un costo continuo de almacenamiento y producción "f" y los costos de conmutación "q":

$$J_x^{d,j}(\beta) = E\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f(y(s), d_{i-1})\, e^{-\alpha s}\, ds + q(d_{i-1}, d_i)\, e^{-\alpha\theta_i}\Big)\Big\}. \tag{18}$$

Para $d \in D$, $x \in Q$ y $j \in \mathfrak{J}$ definimos la función de costo óptimo $V(x)$ ($V(x)$ es una matriz de componentes $V_{d,j}$)

$$V_{d,j}(x) \equiv \inf\Big\{J_x^{d,j}(\beta(\cdot)) \mid \beta(\cdot) \in \mathfrak{B}_x^{d,j}\Big\}. \tag{19}$$

Nuestro objetivo es encontrar un $\bar{\beta}(\cdot) \in \mathfrak{B}_x^{d,j}$ tal que

$$V_{d,j}(x) = J_x^{d,j}(\bar{\beta}(\cdot)). \tag{20}$$

2.6 Regularidad de la función costo óptimo

La función V tiene un comportamiento regular en gran parte del conjunto Q, excepto en la porción de la frontera que denominamos ∂Q^+, donde $V(x) \to +\infty$. Estrictamente, son válidos los siguientes resultados que pueden probarse siguiendo las técnicas utilizadas en [11].

Existen constantes C_1, C_2, C_3 positivas tales que

$$\left|V_{d,j}(x)\right| \le C_1\left(1 + \frac{1}{\lambda} - \log(d(x, \partial Q^+))\right), \tag{21}$$

$$\left|V_{d,j}(x)\right| \ge C_2\left(1 + \frac{1}{\lambda} - \log(d(x, \partial Q^+))\right), \tag{22}$$

$$\left|V_{d,j}(x) - V_{d,j}(\tilde{x})\right| \le C_3\Big(-\log\Big(\min(d(x, \partial Q^+); d(\tilde{x}, \partial Q^+))\Big)\Big)\|x - \tilde{x}\|. \tag{23}$$

2.7 Introducción de un problema equivalente

El problema original, al tener un comportamiento singular en ∂Q^+, presenta dificultades de tipo técnicas tanto para el tratamiento analítico como para la aproximación numérica, el estudio de la convergencia de los procedimientos de discretización, etc. Es por ello que introducimos un problema penalizado que representa a la formulación original del problema de optimización, con el agregado de que son permitidas compras externas de cada uno de los items producidos por el sistema. En ese caso, consideramos que se paga una penalización global A y el sistema pasa global e instantáneamente al punto de máximo stock. Las relaciones entre ambos problemas son las siguientes

- $V_{d,j}^A(x) \le V_{d,j}(x) \quad \forall\, x \in Q,$ (24)
- $V_{d,j}^A(x) \le V_{d,j}^{\tilde{A}}(x) \quad \forall\, x \in Q \quad \forall\, \tilde{A} \ge A,$ (25)
- $\forall\, K \subset Q$, K compacto, $\exists\, A(K) \mid V_{d,j}^{\tilde{A}}(x) = V_{d,j}(x) \quad \forall\, x \in K \quad \forall\, \tilde{A} \ge A(K).$ (26)

Nota 2.2: Desde el punto de vista práctico, dado que el comportamiento de $V(x)$ cuando $x \to \partial Q^+$ es de tipo $-\log\, (d(x, \partial Q^+))$, para todos los puntos $x \in K$ (compacto donde interesa computar V), la constante A es facilmente elegible, en particular puede tomarse

$$A = C\ (-\log\ (d(K, \partial Q^{+}))). \tag{27}$$

Nota 2.3: En lo sucesivo consideraremos solo el problema penalizado, donde para simplificar la notación seguiremos denotando con V a la función que en este párrafo hemos llamado V^{A}.

3. SOLUCION VIA LA PROGRAMACION DINAMICA

El Principio de la Programación Dinámica permite establecer en forma inmediata las ecuaciones de H-J-B para este problema, ya sea en forma integral o diferencial, y sus condiciones de frontera. La prueba utiliza técnicas ya clásicas y no será incluida aquí por razones de brevedad (ver [3], [4], [9], [18], [20]).

3.1 La ecuación de H-J-B en forma integral

Definición 3.1: Introducimos el siguiente operador S que es el operador que toma en cuenta los costos de conmutación en las condiciones de optimalidad del problema.

$$(SV)_{d,j}(x) = \min\Big(\min_{d' \neq d} \Big(V_{d',j}(x) + q(d,d')\Big),\ V_{d,j}(e) + A\Big), \tag{28}$$

siendo

$$e = (M_1, M_2, ..., M_m). \tag{29}$$

Definición 3.2: Definiciones de variables auxiliares

$$\tilde{\alpha}_j = \alpha + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji}, \tag{30}$$

$$\tau(x,\ d,\ j) = sup\,\{\,t \mid x + t\ g(d,j) \in \Omega\}, \tag{31}$$

Teorema 3.1: $\forall\ x \in \Omega$ *se verifican las siguientes condiciones*

a) $$V_{d,j}(x) \leq (SV)_{d,j}(x),\ \forall\ d \in D,\ \forall\ j \in \mathfrak{J}. \tag{32}$$

b) $$V_{d,j}(x) \leq \int_0^t e^{-\tilde{\alpha}_j s}(f(y(s), d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji}\ V_{d,i}(y(s)))\, ds + V_{d,j}(x + t\,g(d,j))\ e^{-\tilde{\alpha}_j t},$$
$$\forall\ t \leq \tau(x,\ d,\ j),\ siendo\ y(s) = x + g(d,j). \tag{33}$$

c) $\forall\ x \in \Omega$, *tal que en (a) vale la desigualdad estricta, existe* $t_{x,\,d,\,j} > 0$ *tal que*

$$V_{d,j}(x) = \int_0^t e^{-\tilde{\alpha}_j s}(f(y(s), d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji}\ V_{d,i}(y(s)))\, ds + V_{d,j}(x + t\,g(d,j))\ e^{-\tilde{\alpha}_j t},$$
$$\forall\ 0 \leq t \leq t_{x,\,d,\,j}. \tag{34}$$

3.2 Condiciones de frontera para la ecuación de H-J-B

Al estar el sistema restringido al conjunto Q aparecen sobre la frontera condiciones sobre los valores de la función V.

Teorema 3.2: *En* ∂Q *se verifican las siguientes condiciones de frontera*

$$V_{\tilde{d},j}(x) = (SV)_{\tilde{d},j}(x) \qquad \forall\ x \in \gamma_d^{-},\ \forall\ \tilde{d} \neq d, \tag{35}$$

$$V_{d,j}(x) = (SV)_{d,j}(x) \qquad \forall\ d \neq 0,\ \forall\ x \in \gamma_d^{+}, \tag{36}$$

donde

$$\gamma_d^+ = \bigcup_a \left\{ \Gamma(a_1, \ldots, a_d, \ldots, a_m) \mid a_d = 2 \right\}, \tag{37}$$

$$\gamma_d^- = \bigcup_a \left\{ \Gamma(a_1, \ldots, a_d, \ldots, a_m) \mid a_d = 0 \right\}. \tag{38}$$

3.3 Unicidad de la solución

Definiendo el operador

$$(\mathcal{P} V)_{d,j}(x) = \min_{\tau \leq \tau(x,d,j)} \left(\int_0^\tau e^{-\tilde{\alpha}_j s} (f(y(s), d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ji} V_{d,i}(y(s))) \, ds + (SV)_{d,j}(x + \tau g(d,j)) \, e^{-\tilde{\alpha}_j \tau} \right), \tag{39}$$

se tiene por el teorema 3.1 que la función $V_{d\,j}$ buscada es un punto fijo de ese operador. Puede considerarse la extensión natural del operador $\mathcal{P}$ al conjunto de las funciones borelianas y acotadas. Puede demostrarse, siguiendo las técnicas introducidas por Hanouzet-Joly en [16], que V es el único punto fijo del operador $\mathcal{P}$ en el espacio mencionado.

3.4 Construcción de políticas óptimas markovianas

Una vez que se conoce la función de costo óptimo V puede construirse una política óptima de la siguiente forma:

Dado un estado inicial generalizado (x, d, j), una política óptima en realimentación consiste en continuar la producción del ítem d hasta un tiempo de conmutación $\bar{\tau}$(x, d, j), donde

$$\bar{\tau}(x, d, j) = \inf\left\{ t \geq 0 \mid V_{d\,j}(y(t)) = (SV)_{d\,j(t)}(y(t)) \right\}. \tag{40}$$

Nota 3.1: $\bar{\tau}$ es un tiempo de detención no anticipativo bien definido (ver [3], [4] al respecto).

3.5 El sistema de inecuaciones cuasi-variacionales (QVI) de H-J-B en forma diferencial

3.5.1. La ecuación de H-J-B en sentido débil (c.t.p.)

Teorema 3.3: *Dados $d \in D$, $j \in \mathfrak{J}$ y utilizando la definición*

$$(\mathcal{L} V)_{d,j} = \frac{\partial V_{d,j}}{\partial x} g(d, j) + f(\cdot\,, d) - \alpha V_{d,j} + \sum_{i \neq j} \lambda_{j,i} (V_{d,i} - V_{d,j}), \tag{41}$$

se verifica la siguiente relación

$$\min\left((\mathcal{L} V)_{d,j}, (SV)_{d,j} - V_{d,j}\right) = 0 \text{ p.c.t. } x \in \Omega, \tag{42}$$

$$V_{\tilde{d},j}(x) = (SV)_{\tilde{d},j}(x), \; \forall \, \tilde{d} \neq d \quad si \; x \in \gamma_d^- \; (d \neq 0), \tag{43}$$

$$V_{d,j}(x) = (SV)_{d,j}(x), \quad si \; x \in \gamma_d^+ \quad (d \neq 0). \tag{44}$$

3.5.2. El sistema de inecuaciones cuasi-variacionales (QVI) en el sentido de la viscosidad

Definición del sistema QVI

Diremos que $v \in (C(Q))^{(m+1) \times \mathfrak{J}}$ es solución de viscosidad del sistema QVI si se satisfacen (45)-(52)

- $v_{d\,j}(x) \leq (Sv)_{d\,j}(x) \quad \forall \, x \in \Omega, \forall \, d \in D, \forall \, j \in \mathfrak{J}$ (45)

- $v_{\tilde{d},j}(x) = (Sv)_{\tilde{d},j}(x) \quad \forall\, x \in \gamma_{\tilde{d}}^{-},\ \forall\, \tilde{d} \neq d,\ \forall\, j \in \mathfrak{J}$ (46)
- $v_{d,j}(x) = (Sv)_{d,j}(x) \quad \forall\, x \in \gamma_{d}^{+},\ \forall\, d \neq 0,\ \forall\, j \in \mathfrak{J}$ (47)
- $(\mathcal{L}v)_{d,j} \geq 0$ (48)

en Ω en el sentido de viscosidad, es decir:

$\forall\, \psi \in C^1(\Omega)$, si $v_{d,j} - \psi$ tiene un máximo local en x_0, entonces

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0)\, g(d,j) + f(x_0, d) - \alpha\, V_{d,j}(x_0) + \sum_{i \neq j} \lambda_{j,i}\, (V_{d,i}(x_0) - V_{d,j}(x_0)) \geq 0 \tag{49}$$

- $(\mathcal{L}v)_{d,j} = 0$ (50)

en el sentido de viscosidad en el conjunto $C_v^{d,j} = \left\{x \in \Omega \mid v_{d,j}(x) < (Sv)_{d,j}(x)\right\}$, esto es:

$\forall\, \psi \in C^1(C_v^{d,j})$, si $v_{d,j} - \psi$ tiene un máximo local en x_0, entonces

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0)\, g(d,j) + f(x_0, d) - \alpha\, V_{d,j}(x_0) + \sum_{i \neq j} \lambda_{j,i}\, (V_{d,i}(x_0) - V_{d,j}(x_0)) \geq 0 \tag{51}$$

$\forall\, \psi \in C^1(C_v^{d,j})$, si $v_{d,j} - \psi$ tiene un mínimo local en x_0, entonces

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0)\, g(d,j) + f(x_0, d) - \alpha\, V_{d,j}(x_0) + \sum_{i \neq j} \lambda_{j,i}\, (V_{d,i}(x_0) - V_{d,j}(x_0)) \leq 0. \tag{52}$$

Propiedad de unicidad

Con esta generalización de la definición de solución de la ecuación diferencial de H-J-B asociado a este problema de optimización, puede probarse que la función de costo óptimo V es la única solución de viscosidad del sistema QVI (la demostración está contenida en [18] y utiliza las técnicas presentadas en [8]).

4. EL PROBLEMA DISCRETO

4.1 Elementos del problema discreto

Para definir el problema discreto es necesario introducir una aproximación que comprende la discretización del espacio $W^{1,\infty}(\Omega)$ y de las condiciones (42)–(44). Utilizamos para ello las técnicas analizadas en [5], [10], [11], [15] .

4.1.1 Aproximación del dominio Q

Trabajamos con un mallado uniforme especial $B^{j,k}$ del espacio $\Re^m$. El mismo está definido en términos de un parámetro h arbitrario, de la siguiente manera:

- $B^{j,k} = \left\{ \sum_{d=0}^{m} \zeta_d\, e_j^d \mid \zeta_d \text{ es entero} \right\}$ (53)
- $h_j^d = \dfrac{r_j^d}{p_d}\, h, \qquad h_j^0 = \left(1 - \sum_{d=1}^{m} \dfrac{r_j^d}{p_d} \right) h$ (54)
- $e_j^0 = (-r_j^1, \ldots, -r_j^i, \ldots, -r_j^m)\, h_j^0\,, \qquad e_j^d = (-r_j^1, \ldots, -r_j^{d-1}, p_d - r_j^d, -r_j^{d+1}, \ldots, -r_j^m)\, h_j^d.$ (55)

Para cada régimen de demandas j aproximamos Q con $Q_{j,k} = \bigcup_{\mu} S_{\mu}^{j,k}$, donde $\{S_{\mu}^{j,k}\}$ es una familia de elementos finitos cuadrangulares (dominios elementales).

Diremos que $S_{\mu}^{j,k}$ es un dominio elemental de $Q_{j,k}$ si es de la forma

$$S_{\mu}^{j,k} = x^{j,\mu} + \left\{ x = \sum_{d=1}^{m} \xi_d e_j^d \mid \xi_d \in [0,1] \right\},\ x^{j,\mu} \in B^{j,k} \text{ y } S_{\mu}^{j,k} \subset Q. \tag{56}$$

Definimos

$$k_j = \max_{\mu} (\text{diám } S_{\mu}^{j,k}). \tag{57}$$

Notaremos con $V^{j,k} = \{ x^{j,\mu}, \mu = 1, \ldots, N_j \}$ el conjunto de vértices de $Q_{j,k}$ (nodos de los dominios elementales $S_{\mu}^{j,k}$) y llamaremos N_j al cardinal de $V^{j,k}$.

4.1.2 Aproximación de la frontera

Definimos, $\forall\ d = 1, \ldots, m,\ \forall\ j \in \mathfrak{J}$

$$\gamma_{k,d,j}^{+} = \left\{ x^{j,\mu} \in V^{j,k} \mid x^{j,\mu} + h^d g(d,j) \notin \dot{Q}_{j,k} \right\}. \tag{58}$$

$$\gamma_{k,d,j}^{-} = \left\{ x^{j,\mu} \in V^{j,k} \mid x^{j,\mu} + h^{\tilde{d}} g(\tilde{d},j) \notin Q_{j,k},\ \forall\ \tilde{d} \neq d \right\}. \tag{59}$$

4.1.3 Definición del espacio de aproximaciones $\overline{F}_k$

Consideramos el conjunto $\overline{F}_k$ de funciones

$$w : (\prod_{j \in \mathfrak{J}} Q_{j,k}) \times D \rightarrow \Re,\quad w_{d,j}(\cdot) \in W^{1,\infty}(Q_{j,k}), \tag{60}$$

que en cada elemento $S_{\mu}^{j,k}$ es un polinomio de Q^1 (ver [7] para las correspondientes definiciones). Es obvio que $w \in \overline{F}_k$ está completamente caracterizada por los valores $w_{d,j}(x^{j,\mu})$, $x^{j,\mu} \in V^{j,k}$, $d \in D$, $j \in \mathfrak{J}$.

4.1.4 Discretización de las inecuaciones de H-J-B

Se empleará la siguiente discretización de las condiciones (42)-(44)

$$w_{d,j}(x^{j,\mu}) = \min\left((\mathfrak{L}w)_{d,j}^{k}(x^{j,\mu}),\ (Sw)_{d,j}(x^{j,\mu}) \right) \quad \forall\ x^{j,\mu} \in V^{j,k}. \tag{61}$$

Aquí, $(\mathfrak{L}w)_{d,j}^{k}(x^{j,\mu})$ está definido por

$$\left| \begin{aligned} (\mathfrak{L}w)_{d,j}^{k}(x^{j,\mu}) &= \frac{1}{1+\alpha\, h_j^d} \Big(w_{d,j}(x^{j,\mu} + h_j^d g(d,j)) + h_j^d \Big(f(x^{j,\mu}, d) + \sum_{i \neq j} \lambda_{j,i}\, w_{d,i}(x^{j,\mu}) \Big) \\ &\qquad \forall\ x^{j,\mu} \in \Big(V^{j,k} \cap \complement\gamma_{k,d,j}^{+} \cap \complement\Big(\bigcup_{r \neq d} \gamma_{k,r,j}^{-} \Big) \Big), & (62) \\ (\mathfrak{L}w)_{d,j}^{k}(x^{j,\mu}) &= +\infty \qquad \forall\ x^{j,\mu} \in \Big(\gamma_{k,d,j}^{+} \cup \Big(\bigcup_{r \neq d} \gamma_{k,r,j}^{-} \Big) \Big). & (63) \end{aligned} \right.$$

Nota 4.1: Puede observarse que la definición de $(\mathfrak{L}w)_{d,j}^{k}(x^{j,\mu})$, además de ser consistente con (41), es una discretización natural de las condiciones de frontera (43)-(44).

4.1.5 Definición del operador P_k y del problema discreto

Definimos el operador $P_k : \overline{F}_k \rightarrow \overline{F}_k$

$$(P_k w)_{d,j}(x^{j,\mu}) = \min\left((\mathfrak{L}w)_{d,j}^{k}(x^{j,\mu}),\ (Sw)_{d,j}(x^{j,\mu}) \right) \quad \forall\ x^{j,\mu} \in V^{j,k},\ \forall\ d \in D,\ \forall\ j \in \mathfrak{J}. \tag{64}$$

En relación con el problema original introducimos el problema discreto:

Problema $\mathfrak{P}^k$: ***Encontrar el punto fijo del operador*** P_k (65)

4.1.6 Existencia y unicidad de solución discreta

Usando básicamente las técnicas introducidas en [16], se puede probar el siguiente teorema, que establece la caracterización de la única solución U^k del problema $\mathfrak{P}^k$.

Teorema 4.1:

- *$\exists$ único punto fijo de P_k, U^k tal que*

$$U^k = P_k\, U^k \tag{66}$$

- *$\forall$ $U^o \in \bar{F}_k$ se tiene*

$$U^k = \lim_{\nu \to \infty} (P_k)^\nu U^o \tag{67}$$

- *es válida la siguiente estimación de la velocidad de convergencia*

$$\left\| P_k^\nu w - U^k \right\| \leq K(\rho)\, (1 - \mu(\rho))^\nu, \tag{68}$$

donde $0 < \mu(\rho) \leq 1$ y $K(\rho) > 0$, ρ dependiente de $\|w\|$.

Nota 4.2: El cálculo de U^k se hace en la práctica con algoritmos más eficientes que la iteración (67), realizando especiales adaptaciones de las técnicas descriptas en [14] (los detalles correspondientes están contenidos en [18]).

4.1.7 Convergencia de las discretizaciones

Teorema 4.2: *Definiendo*

$$\bar{w}_{d,j}(x) = \limsup_{\substack{k \to 0 \\ y \to x}} U^k_{d,j}(y) \qquad \underline{w}(x) = \liminf_{\substack{k \to 0 \\ y \to x}} U^k_{d,j}(y) \tag{69}$$

se tiene que

$$\bar{w}_{d,j} = \underline{w}_{d,j} = V_{d,j} \tag{70}$$

siendo $V_{d,j}$ la única solución de la QVI (42).

Estas propiedades provienen del hecho básico de que el esquema de discretización (61)–(63) empleado verifica las condiciones de estabilidad, monotonía y consistencia suficientes para garantizar la convergencia señalada de U^k hacia V (en [2] puede verse una de las presentaciones más breves y elegantes de este resultado, donde se resalta la importancia de este tipo de propiedades, ya señaladas en el clásico trabajo [6]).

CONCLUSIONES

Se analiza en este trabajo un programa de producción óptimo para una máquina multiproducto y se obtiene la solución en términos de la función de costo óptimo. Usando técnicas de programación dinámica, se caracteriza a la función costo óptimo como la única solución del sistema de inecuaciones cuasi-variacionales (QVI) asociado al problema. Se analiza aquí la estructura de este sistema y métodos numéricos para calcular su solución. Una versión simplificada de estos resultados fue presentada en [19], el estudio específico de algunos casos asintóticos está contenido en [1].

Se presenta un procedimiento de discretización para la solución numérica del sistema (QVI). Se muestra que la solución del sistema discreto se reduce a encontrar el único punto fijo de un operador no lineal $P^h: \Re^\eta \rightarrow \Re^\eta$ y se dan resultados de convergencia.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado parcialmente a través del subsidio PID BID-CONICET N° 213.

BIBLIOGRAFIA

[1] Aragone L.S., Mancinelli E.M., *Problemas asintóticos en la optimización de máquinas multiproductos*, Trabajo en preparación.

[2] Barles G., Souganidis P., *Convergence of Approximation Schemes for Fully Nonlinear Second Order Equations*, Asymptotic Analysis, Vol. 4, pp. 271-283, 1991.

[3] Bensoussan A., Lions J.L., *Applications des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique*, Dunod, Paris, 1978.

[4] Bensoussan A., Lions J.L., *Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi-Variationnelles*, Dunod, Paris, 1982.

[5] Capuzzo Dolcetta I., Ishii H., *Approximate Solution of the Bellman Equation of Deterministic Control Theory*, Applied Mathematics & Optimization, Vol. 11, pp. 161-181, 1984.

[6] Ciarlet P.G., *Discrete Maximum Principle for Finite-Difference Operators*, Aequationes Mathematicae, Vol. 4, N° 3, pp. 338-352, 1970.

[7] Ciarlet P.G., *Numerical Analysis for the Finite Element Methods*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1976.

[8] Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.L., *Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 282, pp. 487-502, 1984.

[9] Fleming W.H., Soner H.M., *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[10] González R.L.V., Muramatsu K., Rofman E., *Quasi-Variational Inequality Approach to Multi-Item Single Machine Lot Scheduling Problem*, In System Modeling and Optimization. Lecture Notes in Control and Information Sciences Vol. 180, pp. 885-893, Springer Verlag, New York, 1992.

[11] González R.L.V., Muramatsu K., Rofman E., *Quasi-variational Inequality Approach to Multi-Item Single Machine Lot Scheduling Problem*, Rapport de Recherche N° 2057, INRIA, 1993.

[12] González R.L.V., Rofman E., *Sur des Solutions non Bornées de l'Equation de Bellman Associée aux Problèmes de Commutation Optimale avec Contraints sur l'Etât*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie I, Tome 316, pp. 1193-1198, 1993.

[13] González R.L.V., Rofman E., *On Unbounded Solutions of Bellman's Equation Associated to Optimal Switching Control Problems with State Constraints*, Rapport de Recherche N°1823, INRIA, 1993, Applied Mathematics & Optimization, to appear.

[14] González R.L.V., Tidball M.M., *Fast Solution of General Nonlinear Fixed Point Problems*, In System Modeling and Optimization, Lecture Notes in Control and Information Sciences Vol. 180, pp. 35-44, Springer Verlag, New York, 1992.

[15] González R.L.V., Tidball M.M., *Sur l'ordre de convergence des solutions discrétisées en temps et en espace de l'equation de Hamilton–Jacobi*, Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, Tomo 314, Serie I, pp. 479–482, 1992.

[16] Hanouzet B., Joly J.L., *Convergence Uniforme des Iterés Definissant la Solution d'une Inéquation Quasi Variationnelle Abstraite*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie A, Tome 286, pp. 735-738, 1978.

[17] Lenhart S.M., *Viscosity Solutions Associated with Switching Control Problems for Piecewise-Deterministic Processes*, Houston Journal of Mathematics, Vol. 13, N°3, pp. 405-426, 1987.

[18] Mancinelli E.M., *Sobre la optimizacion de máquinas multiproducto modeladas con procesos seccionalmente determínisticos*, trabajo en preparación.

[19] Mancinelli E.M., Valenzuela M.A., *Optimización de un sistema de producción con demanda seccionalmente determinística*, Trabajo a presentar en 23 JAIIO, 1994.

[20] Soner H.M., *Optimal Control with State-Space Constraint II*, SIAM J. Control and Opt., Vol. 26, pp. 1110-1122, 1986.