

MODELOS DE TURBULENCIA Y SU IMPLEMENTACION EN EL CODIGO DE ELEMENTOS FINITOS FANTOM

Marcela B. Goldschmit y Miguel A. Cavaliere
Centro de Investigación Industrial, FUDETEC
Córdoba 320, (1054) Buenos Aires, Argentina

RESUMEN

En este trabajo analizamos los modelos de turbulencia para flujo incompresible y aplicamos el método de elementos finitos a tres modelos distintos: el modelo l (donde l es la longitud de mezclado de Prandtl), el modelo $k-L$ (donde k es la energía cinética turbulenta) y el modelo $k-\epsilon$ (donde ϵ es la velocidad de disipación de energía cinética turbulenta). Usamos nuestro esquema iterativo $(k-L)$ -predictor y (ϵ) -corrector para superar las dificultades numéricas del modelo $k-\epsilon$. Presentamos resultados computacionales para algunos problemas de flujo turbulento.

ABSTRACT

In the present paper we analyze turbulence models for incompressible flow and we applied the finite element method of three models: the l model (where l is Prandtl's mixing length), the $k-L$ model (where k is the turbulent kinetic energy) and the $k-\epsilon$ model (where ϵ is the turbulent energy dissipation rate). We use our $(k-L)$ -predictor / (ϵ) -corrector iterative scheme to overcome the numerical difficulties of $k-\epsilon$ model. We analyze computational results for a variety of turbulence flow problems.

INTRODUCCION

El flujo turbulento es el tipo de flujo viscoso que se encuentra con mayor frecuencia en los procesos industriales, se caracteriza por presentar fluctuaciones en las variables (velocidad, presión, densidad, etc.) para un punto dado, originadas por la continua generación y desplazamiento de torbellinos. Un movimiento de fluido es descripto como turbulento si es *rotacional, intermitente, altamente desordenado, difusivo y disipativo* [1-3].

El modelado matemático del flujo turbulento por medio de las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas en el tiempo y el concepto de viscosidad de remolino fueron bien establecidos por Jones, Launder y Spalding [4-6]. La principal dificultad de estos modelos es determinar la viscosidad turbulenta lo que hace necesario emplear modelos de turbulencia. En este trabajo describimos tres modelos de turbulencia: l , $k-L$ y $k-\epsilon$.

El más simple y a su vez de aplicación muy reducida es el modelo de la longitud de mezclado de Prandtl (modelo l) en el cual se usan fórmulas empíricas para el cálculo de la longitud l .

La aplicación de los modelos de turbulencia a geometrías complejas dió origen a modelos en los que se transporta alguna cantidad turbulenta. Uno de ellos es el modelo $k-L$ que utiliza una ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta (k), pero sigue necesitando una distribución de escala de longitudes L .

En aplicaciones industriales que involucran contornos irregulares el modelo $k-\epsilon$ [6] es el más usado. Este modelo requiere la solución de dos ecuaciones diferenciales parciales adicionales a las de Navier-Stokes para la energía cinética turbulenta (k) y su velocidad de disipación (ϵ).

Los modelos de turbulencia $k-L$ y $k-\epsilon$ son válidos en las regiones de flujo totalmente turbulento y no representan bien los efectos viscosos que se encuentran en las cercanías de los contornos sólidos. Para superar este inconveniente sin usar un modelo ad-hoc y una excesiva discretización en la subcapa laminar adoptamos el método de las funciones de pared [6].

Implementamos los modelos de turbulencia en el código de elementos finitos para flujo de fluidos viscosos incompresible, FANTOM [7-8] y analizamos resultados computacionales.

ECUACIONES DE TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Reynolds define al movimiento turbulento como aquel en que las magnitudes de flujo presentan una variación al azar alrededor de sus valores medios y descompone cualquier propiedad instantánea, ϕ , en un valor medio o alisado de la propiedad, $\bar{\phi}$, y un valor fluctuante de la propiedad, ϕ' ,

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad , \quad \bar{\phi} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} \phi dt \quad (1)$$

Aplicando la descomposición a las ecuaciones que representan un flujo viscoso incompresible homogéneo, de densidad (ρ) y viscosidad (μ) constantes, con ausencia de fuerzas externas y en estado estacionario obtenemos las siguientes expresiones,

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} = -\nabla \bar{p} - \nabla \cdot \bar{\underline{\underline{\sigma}}} - \nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}) \quad (3)$$

$$\bar{\underline{\underline{\sigma}}} = -2 \mu \bar{\underline{\underline{S}}} \quad ; \quad \bar{\underline{\underline{S}}} = \frac{1}{2} (\nabla \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\mathbf{v}}^T) \quad (4)$$

donde, $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad promedio y \bar{p} es la presión promedio.

Observamos que se necesita conocer el término $\nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'})$ con valores de la fluctuación de la velocidad. Por analogía con el flujo laminar [3] este término es aproximado por la densidad de flujo turbulento de cantidad de movimiento, $\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^t$, donde $\underline{\underline{\sigma}}^t$ es denominado *tensor de tensiones medio turbulento* o *tensor de tensiones de Reynolds* y es el responsable del intercambio de momento entre la turbulencia y el flujo medio, modelado según Boussinesq como,

$$\underline{\underline{\sigma}}^t = -2 \mu^t \bar{\underline{\underline{S}}} + \frac{2}{3} k \underline{\underline{I}} \quad (5)$$

donde,

μ^t *viscosidad de remolino* o *viscosidad turbulenta*, no es una propiedad del fluido (como lo es la viscosidad molecular μ), sino que depende fuertemente del estado de turbulencia, por lo tanto, es una propiedad de flujo. Por analogía con la viscosidad molecular, donde μ es proporcional a la velocidad media y al camino libre medio de las moléculas, se supone que la viscosidad turbulenta es proporcional a la velocidad característica del movimiento turbulento (\bar{V}) y a una longitud típica de este movimiento (L), $\mu^t = \rho \bar{V} L$.

k energía cinética turbulenta, $k = \frac{\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}}{2}$.

El segundo término a la derecha de la ec.(5) es debido a que la suma de las tensiones turbulentas normales deben ser el doble de la energía cinética turbulenta. De manera que k puede ser interpretada como una presión. Si reemplazamos la expresión de las tensiones de Reynolds en la ecuación de cantidad de movimiento y reemplazamos la incógnita presión estática por $P = \bar{p} + \frac{2}{3} k$, llegamos a:

$$\rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} = -\nabla P + \nabla \cdot [(\mu + \mu^t) \nabla \bar{\mathbf{v}}] \quad (6)$$

MODELOS DE TURBULENCIA

La turbulencia es un fenómeno tridimensional, transitorio, no lineal cuyas características de flujo tienen lugar en escalas de longitudes pequeñas, del orden de 10^{-3} veces menor que el dominio de flujo [1]. Podríamos aplicar las ecuaciones de Navier-Stokes en variables instantáneas en esta escala, pero necesitaríamos computadoras de gran tamaño para modelar numéricamente un problema industrial (sistemas de aproximadamente 10^9 nodos a modelar). Por ello, necesitamos emplear *modelos de turbulencia* basados en usar la ecuación de Navier-Stokes promediada en el tiempo, Ecs. (2) y (6), y un conjunto de ecuaciones o relaciones que nos permitan representar la viscosidad de remolino. Como define W. Rodi [1]: *"Un modelo de turbulencia es definido como un conjunto de ecuaciones (algebraicas o diferenciales) las cuales determinan los términos de transporte turbulento en las ecuaciones de flujo medio y así cierran el sistema de ecuaciones a modelar. El modelo de turbulencia no simula los detalles del movimiento turbulento sino el efecto de la turbulencia sobre el comportamiento del flujo medio"*.

Existen varios modelos de turbulencia en la literatura entre ellos en este trabajo describiremos el comportamiento de: un modelo ad-hoc o modelo de la ecuación cero (modelo l), un modelo de una ecuación (modelo $k-L$) y un modelo de dos ecuaciones (modelo $k-\epsilon$). Esta clasificación de los modelos depende de las ecuaciones de transporte (ninguna, una o dos) a resolver en conjunto con las ecuaciones (2) y (6).

MODELO DE LA ECUACION CERO. Modelo l

Este modelo relaciona el tensor de tensiones de Reynolds únicamente con la distribución del flujo medio en cada punto. Es decir, implícitamente asume que la turbulencia es disipada donde se genera y no existe transporte de turbulencia. Considerando flujo de corte con una sola tensión turbulenta ($\overline{v'_x v'_y}$) y una sola componente del gradiente de velocidad ($\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}$) significativa, Prandtl postuló que la velocidad característica del movimiento fluctuante (V) es igual al gradiente de la velocidad media por la longitud de mezclado del movimiento (l), por lo tanto, modelamos la viscosidad de remolino por:

$$\mu^t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right| \quad (7)$$

Podemos aplicar este modelo con éxito a flujos simples donde la longitud de mezclado l puede ser calculada con fórmulas empíricas.

MODELO DE UNA ECUACION. Modelo $k-L$

Fueron pensados para superar las deficiencias de la hipótesis de la longitud de mezclado. Un paso importante en el desarrollo fue abandonar la relación directa entre la escala de velocidad del movimiento fluctuante y los gradientes de velocidad media y en su lugar determinar esta escala a partir de una ecuación de transporte. La energía cinética turbulenta (k), es una medida de la intensidad de turbulencia y \sqrt{k} es una cantidad que puede caracterizar la escala de velocidades del flujo turbulento. Por ello, Kolmogorov, Prandtl y Emmons propusieron independientemente la siguiente relación para la viscosidad de remolino,

$$\mu^t = C_\mu \rho \sqrt{k} L \quad (8)$$

Podemos deducir la ecuación de transporte de k desde las ecuaciones de Navier-Stokes, obteniendo

$$\rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu^t}{\sigma_k} + \mu \right) \nabla k \right] + 2 \mu^t \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\nabla \bar{\mathbf{v}}}} - \rho \frac{C_\mu k^2}{\mu^t \rho} \quad (9)$$

Como caso particular en flujo de corte podemos recuperar el modelo de longitud de mezclado, despreciando los términos convectivo y difusivo en la ec. (9), de manera que en un punto dado la producción sea igual a la destrucción de energía cinética turbulenta,

$$\mu^t \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2 = \rho \frac{C_\mu k^2}{\mu^t \rho} \quad ; \quad \mu^t = \rho [C_\mu^3]^{\frac{1}{2}} L^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right| \quad (10)$$

que es la fórmula de la viscosidad de remolino para el modelo de longitud de mezclado. Las escalas de longitud quedan relacionadas por, $l = [C_\mu^3]^{\frac{1}{2}} L$.

La mayor deficiencia del modelo de energía cinética turbulenta ($k-L$) es que necesitamos proponer una distribución de escala de longitudes (L) como en los modelos "ad-hoc".

MODELO DE DOS ECUACIONES. Modelo $k-\varepsilon$

La tendencia en flujo turbulento fue desarrollar modelos donde además de transportar la escala de velocidades del movimiento fluctuante también se determine la escala de longitudes a partir de una ecuación de transporte, siempre dentro de la hipótesis de Prandtl de viscosidad de remolino. Se comprenderá que no es necesario que la ecuación de transporte tenga como variable dependiente a la escala de longitudes L propiamente dicha. Cualquier relación de la forma $z = k^m L^n$ podría ser adoptada como variable independiente, ya que k es conocida al resolver su propia ecuación. La variable z preferida normalmente es la *velocidad de disipación de energía cinética turbulenta* (ε), quien realmente es la velocidad de transferencia de energía turbulenta desde remolinos grandes a remolinos pequeños [2], $\varepsilon = \frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{v}' : \nabla \mathbf{v}'$.

En el modelo $k-\varepsilon$ modelamos la viscosidad de remolino como,

$$\mu^t = \rho \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon} \quad (11)$$

tenemos que resolver la ecuación de transporte de k (Ec. (9)) y la ecuación de transporte de ε que puede ser deducida a partir de la ecuación de Navier-Stokes,

$$\rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \varepsilon = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu^t}{\sigma_\varepsilon} + \mu \right) \nabla \varepsilon \right] + \rho 2 C_\mu C_1 k \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \nabla \bar{\mathbf{v}} - \rho \frac{C_2 \varepsilon^2}{k} \quad (12)$$

Los valores de las constantes empíricas que aparecen en las ecuaciones fueron obtenidas por Launder y Spalding [6], $C_1 = 1.44$; $C_2 = 1.92$; $C_\mu = 0.09$; $\sigma_k = 1.0$; $\sigma_\varepsilon = 1.3$.

METODO DE LAS FUNCIONES DE PARED

Generalmente, los modelos de turbulencia no representan bien el comportamiento del flujo en las cercanías de los bordes sólidos (subcapa laminar) donde el transporte molecular (efectos viscosos) es importante. En este trabajo adoptamos usar el *método de las funciones de pared* [6] donde no es necesario integrar las ecuaciones del modelo turbulento en la zona de la subcapa laminar, y desplazamos el contorno de la malla una distancia pequeña (Δ) dentro del fluido a una zona donde podemos asumir el flujo totalmente turbulento, Fig. 1, [6,9-13]. La región de la subcapa viscosa ($0 \leq y \leq \Delta$) está en equilibrio local, tal que la tensión de corte (τ_w) es constante y la velocidad tangencial (paralela a la pared) (U_p) en un punto P está relacionada a la velocidad de fricción (U_*) por las leyes logarítmicas en la pared,

$$\frac{U_p}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{E U_* \Delta}{\nu} + C \quad (13)$$

donde,

E : es una función de la rugosidad de la pared.

Generalmente, $E = 9$ para paredes suaves.

κ : es la constante de von Karman, $\kappa = 0.4$

C : es una constante, $C = 5.5$

U_* : es la velocidad de fricción, $U_* = \left| \frac{\tau_w}{\rho} \right|^{\frac{1}{2}}$

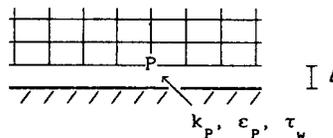


Fig. 1 - Detalle cerca de los bordes sólidos

Con la velocidad en el punto P calculamos iterativamente por el método de Newton Raphson la velocidad de fricción, y aplicamos como condición de contorno en el nodo más cercano a la pared (punto P):

$$\tau_w = \rho U_*^2 \quad ; \quad k_p = \frac{U_*^2}{\sqrt{C_D}} \quad ; \quad \epsilon_p = \frac{U_*^3}{\kappa \Delta} \quad (14)$$

METODO DE ELEMENTOS FINITOS

Integramos las ecuaciones diferenciales en el dominio a modelar por el método de elementos finitos de Galerkin standard [14-15] y linealizamos cada ecuación por un esquema de Newton-Raphson. Reemplazamos la presión P de la ec. (6) por una penalización de la condición de incompresibilidad (ec. (2)), [15-18]. Discretizamos el término convectivo de la forma de un operador trilineal el cual cumple con las condiciones de existencia y unicidad, [8,19]. Debido a que la expresión de la viscosidad de remolino en el modelo l es una función explícita de la velocidad, al término difusivo en dicho modelo lo hemos linealizado completamente para acelerar la convergencia.

Por la definición de la energía cinética turbulenta y su disipación los valores de k y ϵ son cantidades estrictamente positivas [11,20]. Algunas veces en el proceso iterativo nos han aparecido valores de k o ϵ negativos hemos evitado este problema con un buen conjunto de condiciones iniciales para las variables \bar{v} , k , ϵ , estrategias similares han sido usadas ampliamente en la bibliografía, [10-11,21-22].

RESULTADOS NUMERICOS

Flujo totalmente desarrollado entre placas paralelas

El primer ejemplo analizado es para flujo totalmente desarrollado entre dos placas paralelas (flujo de corte), ver Fig. 2, [4,10-11,13,23-28].

Partiendo del concepto de viscosidad de remolino y de la hipótesis de longitud de mezclado de Prandtl se derivan las llamadas leyes universales de velocidades y de fricción, [29].

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.25 \ln (Re \sqrt{\lambda}) - 1.25 \ln 4 + 1.5 \quad ; \quad Re = \frac{\rho v_m h}{\mu} \quad (15)$$

De la ley de fricción calculamos el gradiente de presiones a aplicar como condición de contorno para un número de Reynolds dato,

$$\tau_w = \lambda \frac{\rho v_m^2}{4} \quad ; \quad \frac{P_2 - P_1}{L} = \frac{2 \tau_w}{h} \quad ; \quad \Delta = \frac{h}{\sqrt{Re}} \quad (16)$$

donde v_m es la velocidad media del flujo turbulento.

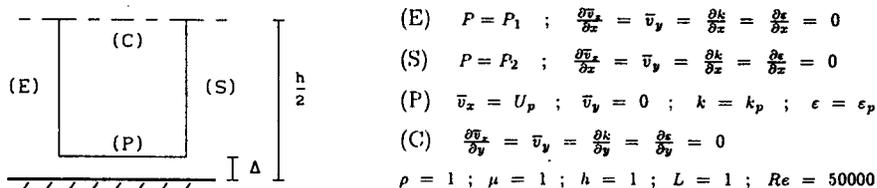


Fig. 2 - Geometría y condiciones de borde.

Aproximamos la longitud de mezclado, l , para flujo desarrollado en canales y cañerías con las fórmulas de J. Nikuradse, [1,29],

$$l = \frac{h}{2} \left[0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{y}{h/2} \right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{h/2} \right)^4 \right] \quad (17)$$

En la Tabla 1 mostramos algunos detalles de los resultados de los tres modelos de turbulencia, para elementos lineales y cuadráticos. Notar que como resultado obtenemos un flujo paralelo a las paredes del canal, pues $\frac{|\bar{v}_{y_{max}}|}{\bar{v}_{x.c.c.}} < 6.5E-6$.

Modelo	Condicion inicial	Elementos	Iteraciones	\bar{v}_x c. c.	$ \bar{v}_{y_{max}} $	k c.c.	ϵ c.c.
l	$\bar{v} = 0$	lineales	12	56840.56	0.30		
l	$\bar{v} = 0$	cuadráticos	12	57140.85	0.36		
$k-L$	$\bar{v} = 0 ; k = 1$	lineales	13	56398.13	0.004	0.424E+7	
$k-L$	$\bar{v} = 0 ; k = 1$	cuadráticos	9	55967.12	0.25	0.437E+7	
$k-\epsilon$	resultados de $k-L$	lineales	40	53744.13	0.012	0.552E+7	0.197E11
$k-\epsilon$	resultados de $k-L$	cuadráticos	44	55028.02	0.25	0.511E+7	0.196E11

TABLA 1 - Resultados para flujo desarrollado, test 2D

En la Fig. 3 mostramos los resultados de velocidades y viscosidad turbulenta para los modelos l ; $k-L$; $k-\epsilon$ cuando usamos elementos cuadráticos.

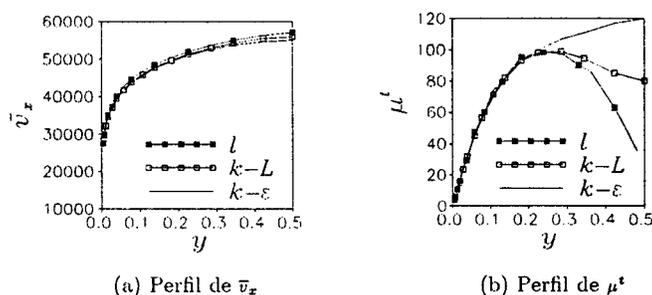


Fig. 3 - Flujo desarrollado entre placas paralelas

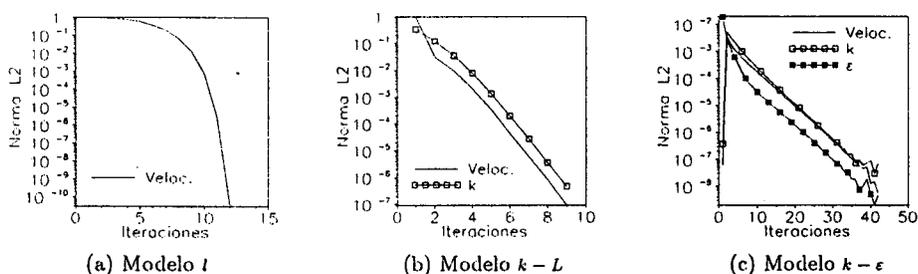


Fig. 4 - Proceso iterativo de los diferentes modelos.

Podemos observar una convergencia super lineal (Fig. 4-a) del proceso iterativo en el modelo l debido a que en el sistema a resolver en este caso sólo intervienen las ecuaciones de Navier-Stokes, en las cuales realizamos una linealización del término difusivo. En los modelos $k-L$ y $k-\epsilon$ (Figs. 4-b y 4-c) obtenemos una convergencia del tipo lineal en las normas L_2 de las diferencias de velocidades, k o ϵ .

Flujo entre placas paralelas

El segundo ejemplo que analizamos es un flujo incompresible desarrollándose entre dos placas paralelas lisas separadas una distancia h [27,30-31]. Asumimos un canal infinitamente ancho (flujo medio bidimensional) y estado estacionario, ver Fig. 5.

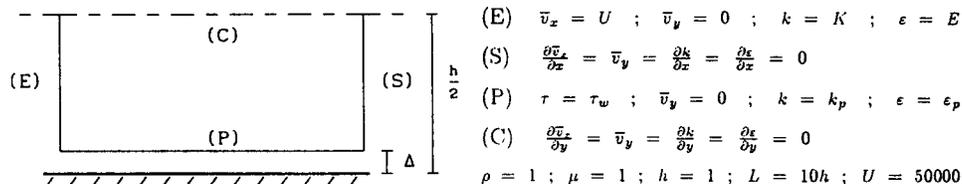


Fig. 5 - Geometría y condiciones de borde.

En el modelo $k-L$ la distribución de L corresponde a una situación de flujo desarrollado. No hemos experimentado con el modelo l en este ejemplo porque la hipótesis de μ^l función de la longitud de mezclado de flujo desarrollado constituye una aproximación excesiva.

En la Tabla 2 mostramos algunos resultados para el modelo $k-L$ y $k-\epsilon$, respectivamente.

Modelo	Iteraciones	\bar{v}_x c.c. salida	kc c. salida	ϵ c. salida	μ^l c.c. salida
$k-L$	99	53153.84	0.457E+7		82.01
$k-\epsilon$	100	53046.99	0.544E+7	0.213E+11	125.28

TABLA 2 - Flujo desarrollándose entre placas paralelas.

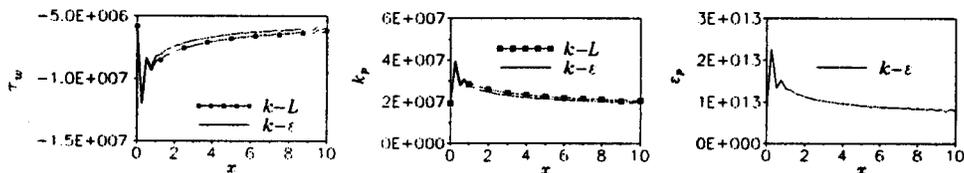
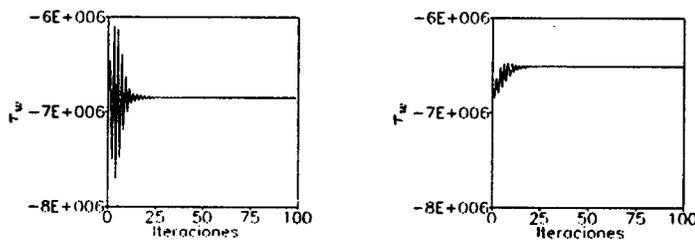


Fig. 6 - Resultados de las funciones de pared.



(a) Modelo $k-L$

(b) Modelo $k-\epsilon$

Fig. 7 - Proceso iterativo de las funciones de pared en el punto $x = 4,75$.

En la Fig. 6 analizamos las variaciones de las funciones de pared a lo largo del canal, las pequeñas oscilaciones a la salida del canal demuestran no haber alcanzado el flujo desarrollado. En la entrada del canal observamos una dispersión de las funciones de pared provocadas por las condiciones de

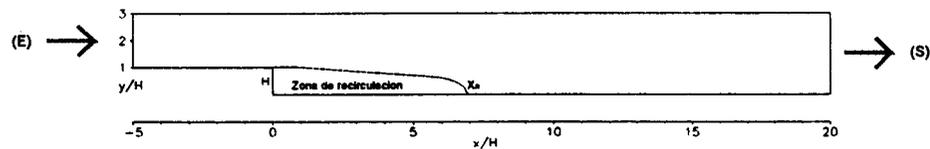
borde constantes consideradas en este ejemplo. Además en las primeras iteraciones encontramos una gran variación en las funciones de pared, ver Fig. 7.

Flujo en una expansión abrupta

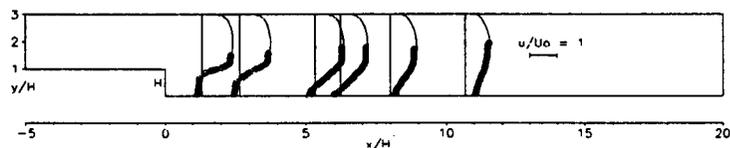
El flujo sobre una expansión abrupta no simétrica (Fig. 8) es uno de los más sencillos flujos de separación que podemos analizar [13,21-22,31-35]. La ubicación del punto de estancamiento del fin de la zona de recirculación es un excelente test para validar un modelo de turbulencia.

Para este ejemplo utilizamos solo el modelo $k - \epsilon$ y por las dificultades encontradas para su convergencia implementamos en FANTOM un esquema iterativo $(k - L)$ -predictor / (ϵ) -corrector, cuyo algoritmo está descrito en nuestra Ref. [36].

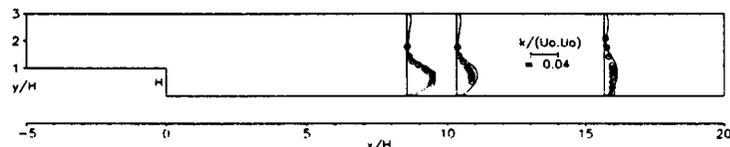
En la Fig. 8 mostramos nuestros resultados para un $Re_h = 44000$ (basado en la longitud h del escalón y la velocidad media a la entrada). La longitud de recirculación (x_R) obtenida es de $7.39h$ que concuerda muy bien con la obtenida experimentalmente por Kim, Kline y Johnston ($x_R = 7h \pm 1h$) [37].



- (a) Condiciones de contorno: (E) $\begin{cases} v_x, k, \epsilon & \text{flujo totalmente desarrollado en un canal} \\ v_y = 0 & \text{con } Re_H = 44000 \end{cases}$
- (S) $\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} = v_y = 0 \\ \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0 \end{cases}$



(b) Perfiles de velocidad



(c) Perfiles de k

Fig. 8 - Comparación entre resultados numéricos y mediciones experimentales [37].

CONCLUSIONES

En este trabajo analizamos y comparamos tres modelos de turbulencia ($l, k-L, k-\epsilon$) y presentamos algunas características y dificultades encontradas en su modelización. Los ejemplos numéricos analizados indican un comportamiento robusto de los esquemas iterativos adoptados.

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento al Dr. Eduardo N. Dvorkin por su constante apoyo y guía, y a los Profs. Eugenio Oñate, Ramón Codina y Gabriel Bugeda del CIMNE (Barcelona, España) por haber puesto a nuestra disposición los programas FANTOM y FLAVIA. Esta investigación fue financiada por SIDERCA, Campana, Argentina.

REFERENCIAS

1. Rodi, W., *Turbulence models and their application in hydraulics. A state of the art review*, International Association for Hydraulic Research, The Netherlands, 1980.
2. Bradshaw, P.; Cebeci, T. y White, J.H., *Engineering calculation methods for turbulent flow*, Academic Press, Paris, 1981.
3. Tennekes, H. y Lumley, J.L., *A first course in turbulence*, MIT Press, 1972, Thirteenth Printing 1990.
4. Jones, W.P. y Launder, B.E., "The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, 1972, págs. 301-314.
5. Jones, W.P. y Launder, B.E., "The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 16, 1973, págs. 1119-1130.
6. Launder, B.E. y Spalding, D.B., "The numerical computation of turbulent flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 3, 1974, págs. 269-289.
7. Manual del usuario de FANTOM, Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería, Barcelona, España, 1992.
8. Codina, R., *A finite element model for incompressible flow problems*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, Junio 1992.
9. Markatos, N.C.G.; Spalding, D.B.; Tatchell, D.G. y Vlachos, N., "A solution method for three-dimensional turbulent boundary layers on bodies of arbitrary shapes", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 15, 1978, págs. 161-174.
10. Morgan, K.; Hughes, T.G. y Taylor, C., "The analysis of turbulent, free-shear, and channel flows by the finite element method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 19, 1979, 117-125.
11. Smith, R.M., "On the finite-element calculation of turbulent flow using the $k-\epsilon$ model", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 4, 1984, 303-319.
12. Smith, R.M., "A critical method of two-equation turbulence modelling using finite elements", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 4, 1984, 321-336.
13. Utnes, T., "Two-equation (k, ϵ) turbulence computations by the use of a finite element model", *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, vol. 8, 1988, 965-975.
14. Bathe, J.K., *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1982.
15. Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R. L., *The finite element method. Fourth edition. Volume 1: Basic formulation and linear problems. Volume 2: Solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity*, Mc Graw-Hill, London, 1989.
16. Hughes, T.J.R.; Liu, W.K. y Brooks, A., "Finite element analysis of incompressible viscous flows by penalty function formulation", *J. Comp. Phys.*, vol. 30, 1979, 1-60.
17. Sani, R.L.; Gresho, P.M.; Lee, R.L. y Griffiths, D.F., "La cause and cure (!) of the spurious pressures generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations: Part 1", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 1, 1981, 17-43.
18. Sani, R.L.; Gresho, P.M.; Lee, R.L.; Griffiths, D.F. y Engelman, M., "La cause and cure (!) of

- the spurious pressures generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations: Part 2", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 1, 1981, 171-204.
19. Girault, V. y Raviart, P.A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Verlag, 1986.
 20. Pironneau, O., *Finite element methods for fluids*, John Wiley & Sons, 1989.
 21. Taylor, C.; Thomas, C.E. y Morgan, K., "Modelling flow over a backward-facing step using the F.E.M. and the two-equation model of turbulence", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 1, 1981, 295-304.
 22. Chapman, R.S. y Kuo, Ch., "Application of the two-equation $k - \epsilon$ turbulence model of a two-dimensional, steady, free surface flow problem with separation", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 5, 1985, 257-268.
 23. Soliman, M.O. y Baker, A.J. "Accuracy and convergence of a finite element algorithm for turbulent boundary layer flow", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 28, 1981, 81-102.
 24. Liakopoulos, A., "Computation of high speed turbulent boundary-layer flows using the $k - \epsilon$ turbulence models", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 5, 1985, 81-97.
 25. Sharma, M. y Carey, G.F., "Turbulent boundary-layer analysis using finite elements", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 6, 1986, 769-787.
 26. Cebeci, T.; Chang, K.C. y Bradshaw, P., "Solution of a hyperbolic system of turbulence-model equations by the box scheme", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 22, 1980, 213-227.
 27. Benim, A.C. y Zinser, W., "Investigation into the finite element analysis of confined turbulent flows using a $k - \epsilon$ model of turbulence", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 51, 1985, 507-523.
 28. Xia, J.Y.; Taylor, C. y Medwell, J.O., "Finite element modelling of the near wall zone of confined turbulent flows", *Eng. Comput.*, vol. 6, 1989, 127-132.
 29. Schlichting, H., *Boundary-layer theory*, Mc Graw Hill, New York, 1979.
 30. Singhal, A.K. y Spalding, D.B., "Predictions of two-dimensional boundary layers with the aid of the $k - \epsilon$ model of turbulence", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 25, 1981, 365-383.
 31. Manouzi, H. y Fortin, M., "A treatment of wall boundaries for turbulent flows by the use of a transmission finite element method", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 31, 1991, 113-126.
 32. Thomas, C.E.; Morgan, K. y Taylor, C., "A finite element analysis of flow over backward facing step", *Comp. and Fluids*, vol. 9, 1981, 265-278.
 33. Hackman, L.P.; Raithby, G.D. y Strong, A.B., "Numerical predictions of flows over backward-facing step", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 4, 1984, 711-724.
 34. Kaul, U.K. y Kwak, D. "Computation of internal turbulent flow with a large separated flow region", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 6, 1986, 927-937.
 35. Autret, A.; Grandotto, M. y Dekeyser, I. "Finite element computation of a turbulent flow over a two-dimensional backward facing step", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 7, 1987, 89-102.
 36. Goldschmit, M.B.; Cavaliere, M.A. y Radovitzky, R.A., "A predictor-corrector iterative scheme for solving the $k - \epsilon$ model equations", *The Third World Congress on Computational Mechanics*, Japon, Agosto, 1994.
 37. Kim, J.; Kline, S.J. y Johnston, J.P., "Investigation of a reattaching turbulent shear layer: flow over a backward facing step", *Transactions of the ASME*, vol. 102, 1980, 302-308.