

**METODOS ASINTOTICOS EN LA TRANSFORMACION
DEL OLEAJE.**

Ruperto P. Bonet Chaple, Mario A. Storti
Grupo de Tecnología Mecánica, INTEC
Güemes 3450(3000), Santa Fe, Argentina

RESUMEN

Son obtenidas soluciones asintóticas de la ecuación elíptica de Berkhoff(1972), mediante los procedimientos de la β -Transformada de Fourier, y la teoría de Maslov.

ABSTRACT

Are obtained asymptotic solutions of the elliptic Berkhoff's equation (1972) by means of the procedures of β -Fourier Transformation and the Theory of Maslov.

1. INTRODUCCION

La descripción del fenómeno de la transformación del oleaje, debido a la influencia del fondo marino con fines ingenieriles, ha sido un aspecto decisivo en la evolución de los métodos de cálculo. Ito & Tanimoto(1972) y Copeland(1985)[10] sugirieron que el problema de refracción y difracción puede ser resuelto como un problema de valores frontera e iniciales. Desde el punto de vista de la óptica geométrica, este enfoque ha sido desarrollado por Ebersole(1985), considerando como variable independiente el ángulo de propagación, Lo, Tayfun y Raiad(1988); extendieron este procedimiento al ambiente de corrientes, y más recientemente, Rivero y Arcilla(1993)[11] lo aplicaron, incluyendo los términos de orden superior y los efectos de disipación por rotura.

Con el empleo de la transformada de Fourier, y las técnicas de separación del campo de oleaje incidente y reflejado, Dalrymple y Kirby (1988-1993)[3-6] han desarrollado el modelo del espectro angular, como solución del problema de valores frontera-inicial para la ecuación de Berkhoff(1972)[1].

Mediante el presente trabajo, se obtienen expresiones asintóticas como solución del problema de valores frontera-inicial para la ecuación de Berkhoff(1972); tanto empleando representaciones integrales, como locales, en dependencia de la irregularidad del fondo en la dirección transversal.

II. ECUACIONES QUE GOBIERNAN

El problema de valores frontera-inicial para el modelo elíptico de la ecuación de refracción - difracción de Berkhoff(1972) consiste en:

Encontrar las funciones reales ϕ y $S(x,y)$, como solución de la ecuación

$$\nabla_h(CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad (1)$$

y sujetas a la condición de frontera-inicial sobre una curva Γ del plano xy

$$\phi(x,y) = \phi_o(x,y) \cdot \exp iS_o(x,y) \quad (2)$$

Aquí $\phi = \phi(x,y)$ es el valor del potencial de velocidades en la superficie media, $z = 0$, tal que el potencial total viene dado por

$$\Phi(x,y,z,t) = \phi(x,y) \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh[kh]} \exp(-i\omega t) \quad (3)$$

donde $C = \frac{\omega}{k}$ y $C_g = \bar{n}C$ son las celeridades de fase y de grupo, respectivamente, las cuales, se relacionan con la frecuencia ω , y el número de onda k , mediante la conocida relación de dispersión $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ y el coeficiente de shoaling \bar{n} .

Hemos tomado un sistema de coordenadas rectilíneo OXYZ, con el origen de coordenadas situado en aguas profundas. El eje OX denota la dirección principal de avance de la onda, y el eje OY la dirección transversal. Referido a este sistema $h=h(x,y) > 0$ representa la superficie del fondo y Γ una curva suave en el plano xy .

En presencia de rompiente, la ecuación (1) se modifica como sigue[10]

$$\nabla_h(CC_g \nabla \phi) + CC_g(k^2 + \frac{iWk}{C_g})\phi = 0 \quad (4)$$

donde $W = W_r - iW_i$ ($W_r > 0$) representa el coeficiente de amortiguamiento.

Expresemos la ecuación (1) y (4) en forma adimensional, mediante la introducción del parámetro grande $\beta = k_o \sqrt{L_1 L_2} \gg 1$, si L_1, L_2 representan distancias características de la no homogeneidad del fondo en el plano horizontal y k_o el número de onda típico. Mediante las relaciones $x = x' \cdot \sqrt{L_1 L_2}$, $y = y' \cdot \sqrt{L_1 L_2}$; $k(x,y) = k'(x',y') \cdot k_o$ las ecuaciones (1) y (4) adoptan respectivamente, la forma adimensional (prescindiendo de las primas):

$$\nabla_h(CC_g \cdot \nabla \phi) + \beta^2 k^2 \cdot CC_g \cdot \phi = 0 \quad (5)$$

$$\nabla_h(CC_g \cdot \nabla \phi) + \beta^2 \cdot CC_g(k^2 + \frac{iWk}{C_g}) \cdot \phi = 0 \quad (6)$$

III. ASINTOTICA POR LA β -TRANSFORMADA DE FOURIER

El procedimiento mediante la β -transformada de Fourier está basado en la introducción de escalas en integrales tipo Fourier con el parámetro grande β .

$$\begin{aligned} K(\Omega) \varphi &= \frac{i\beta}{2\pi} \int_{R_{k_y}} \exp[i\beta (\tilde{S}(x, k_y) + k_y y)] \varphi(x, k_y, \beta^{-1}) dk_y \\ &= F_\beta [\varphi(x, k_y, \beta^{-1}) \exp(i\beta \tilde{S}(x, k_y))] \end{aligned} \quad (7)$$

donde φ es una función infinitamente diferenciable y con soporte compacto en una región acotada Ω del plano (x, k_y) . Denominamos a φ "amplitud transformada", y admitamos que φ se desarrolla en una serie asintótica del parámetro $(i\beta)^{-1}$, tal que :

$$\varphi \sim \sum_l (i\beta)^{-l} \cdot \varphi_l(x, k_y) \quad (8)$$

Los términos φ_l , $l=0,1,2,\dots$, se determinan mediante un procedimiento de "matching" en función de las potencias de $(i\beta)$.

contornos rectos y paralelos.

La solución de la ecuación (5) para un dominio infinitamente amplio donde la profundidad sólo varía en la dirección de OX, es construida tomando

$$\phi = K(\Omega)(\varphi_0 + (i\beta)^{-1}\varphi_1) \quad (9)$$

de lo cual se deriva las ecuaciones mldimensionales siguientes para la fase \tilde{S} y la amplitud transformada:

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}\right)^2 + k_y^2 - k^2(x) = 0 \quad (10)$$

$$2(CC_g) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}\right) + \frac{\partial(CC_g \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x})}{\partial x} \varphi_0 = 0 \quad (11)$$

$$2(CC_g) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}\right) + \frac{\partial(CC_g \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x})}{\partial x} \varphi_1 = - \frac{\partial(CC_g \frac{\partial \varphi_0}{\partial x})}{\partial x} \quad (12)$$

Para $\Gamma = \{(0, y), y \in R\}$, la aproximación inicial de ϕ (in coordenas dimensionales) para los modos progresivos adopta la forma:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_{k_y}} \varphi_0(0, k_y) \cdot K_s \cdot K_r \cdot \exp[i(\int_0^x \sqrt{k^2(t) - k_y^2} dt + k_y y)] f(x, k_y) dk_y \quad (13)$$

donde $\text{sopf} \subset \Omega$ y K_s y K_r denotan los coeficientes de "shoaling" y de refracción, respectivamente, dados por las expresiones siguientes

$$K_s = \frac{\sqrt{(CC_g)_0}}{\sqrt{CC_g}} \quad K_r = \frac{\sqrt{(k_0^2 - k_y^2)}}{\sqrt{k^2 - k_y^2}} \quad (14)$$

Si la profundidad es constante, la ecuación (13) se reduce a la expresión

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_{k_y}} \cdot \exp[ix\sqrt{k^2(t) - k_y^2} + k_y y] \varphi_0(0, k_y) f(x, k_y) dk_y \quad (15)$$

y en este caso $\varphi_1 \equiv 0$ en Ω . La aproximación inicial obtenida se corresponde con la fórmula derivada por Dalrymple & Kirby en [6]. La solución para φ_1 contiene la influencia de la curvatura de la amplitud transformada φ_0 , de acuerdo con la ecuación (12).

batimetría real con una pequeña heterogeneidad lateral

Basado en las definiciones de $p(x, y) = CC_g$ y $\hat{\phi} = \sqrt{p}\phi$, la ecuación de mild-slope (8), se puede expresar como la ecuación de Hemholtz [5-6].

$$\Delta^2 \hat{\phi} + \beta^2 K_c^2 \hat{\phi} = 0 \quad (16)$$

donde

$$K_c^2 = k^2(x, y) - \frac{\nabla^2 \sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}} \quad (17)$$

Promediando K_c^2 en la dirección lateral, la pequeña desviación lateral puede ser dada mediante la igualdad[6]

$$\nu = 1 - \frac{K_c^2}{K^2} \quad (18)$$

Tomando ν pequeña, o sea, $0 < \nu \ll 1$, se garantiza la no existencia de puntos de giro. Usando (18) la ecuación (16) se escribe como

$$\Delta^2 \hat{\phi} + \beta^2 \overline{K^2} (1 - \nu) \hat{\phi} = 0 \quad (19)$$

Sea $\tilde{\phi} = F_\beta(\hat{\phi})$, aplicando F_β en la ecuación (19) y proponiendo

$$\tilde{\phi}(x, k_y) = \varphi(x, k_y) \exp(i\beta \tilde{S}(x, k_y))$$

se obtiene la fase para los modos progresivos

$$\tilde{S}(x, k_y) = + \int_0^x \sqrt{(K^2 - k_y^2)} dt \quad (20)$$

y la ecuación de transporte(sin los términos de orden superior)

$$(i\beta)^{-1} [2\sqrt{(K^2 - k_y^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\sqrt{(K^2 - k_y^2)})_x \varphi] + \overline{K^2} \exp(-i\beta \tilde{S}) \cdot F_\beta(\nu \hat{\phi}) = O(\beta^{-2}) \quad (21)$$

Sustituyendo $\varphi(x, k_y) = \tilde{\phi}(x, k_y) \exp(-i\beta \tilde{S}(x, k_y))$ en (21) y haciendo un cambio de variables en x, se tiene la ecuación (21) en coordenadas dimensionales

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dx} = i\sqrt{K^2 - k_y^2} \cdot \tilde{\phi} - \frac{(\sqrt{K^2 - k_y^2})_x}{2 \cdot \sqrt{K^2 - k_y^2}} \cdot \tilde{\phi} - \frac{\overline{K^2} \cdot F(\nu \phi)}{2 \cdot \sqrt{K^2 - k_y^2}} \quad (22)$$

Esta ecuación de transporte se corresponde con la obtenida por Dalrymple & Kirby, en [4, {59}].

disipación de ondas cortas

La solución de la ecuación (6) con la fase real, para

$$W = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < x_B \\ W_r, & \text{si } x_B \leq x. \end{cases} \quad (23)$$

y $\phi_o(0, y)$ constante, sujeta a la condición inicial

$$\phi(x, y) = \phi_o(0, y) \cdot \exp iS_o(x, y) \quad (24)$$

se obtiene multiplicando bajo el signo integral en (13) por el término,

$$\varphi_a = \exp \left(- \int_{x_B}^x \frac{\omega W_r}{2CC_g \sqrt{k^2(t) - k_y^2}} dt \right) \cdot \delta(k_y - (k_y)_o) \quad (25)$$

donde x_B es el punto de la primera rompiente; y $(k_y)_o$ el modo transversal generado por un sólo tren de ondas.

IV. ASINTOTICA DE MASLOV EN EL ESPACIO X, KY

En esta sección seleccionamos el potencial reducido $\phi(x, y)$ en la forma

$$\phi(x, y) = \sqrt{\frac{i\beta}{2\pi}} \int_{R_{k_y}} \exp [i\beta (\tilde{S}'(x, k_y) + k_y y)] \tilde{\phi}(x, k_y) dk_y \quad (26)$$

Esta representación en el espacio (x, k_y) ha sido desarrollada por Maslov[8,9], mediante la teoría del operador canónico y empleada por Zhevandrov[16], en la fundamentación teórica de la solución del problema de Cauchy-Poisson para la propagación de ondas no estacionarias en el mar. Recientemente, Tromp & Dahlen(1993) [12-13], basado en principios variacionales, han aplicado representaciones de esta forma para describir la propagación de ondas superficiales sobre un modelo de la tierra lateralmente heterogéneo.

La solución asintótica dada en (26), contiene una 'integral' oscilatoria (análoga a la dada en (7)); según la componente y del número de onda (k_y) ; la cual 'integra' a lo largo de las trayectorias del sistema Hamiltoniano $H(x, y^*, k_y)$. La expresión $\tilde{S}(x, k_y)$ es la transformada parcial de Legendre [8,12] de la fase $S(x, y)$, y se cumple la relación

$$S(x, y, k_y) = \tilde{S}(x, k_y) + k_y y = S(x, y^*) + k_y (y - y^*) \quad (27)$$

donde $y = y^*(x, k_y)$ es la ecuación de los puntos estacionarios de la fase $S(x, y, k_y)$.

La relación planteada en (27) posibilita la sumación de (26), en la vecindad de los cáusticos, a lo largo de trayectorias clásicas vecinas, obtenidas por la vía de la óptica geométrica[2].

Sustituyendo (26) en la ecuación de 'mild-slope'(5), agrupando convenientemente los términos en potencias de $(i\beta)^{-1}$, y desarrollando todos los coeficientes en serie de Taylor, alrededor de los puntos estacionarios $y = y^*(x, k_y)$, se obtiene la ecuación eiconal

$$k_x^2(x, y^*) + k_y^2 = k^2(x, y^*) \quad (28)$$

y la ecuación de transporte en las variables x, k_y

$$\frac{\partial(\varphi^2 C C_g(x, y^*) k_x(x, y^*))}{\partial x} + \frac{\partial(C C_g(x, y^*) \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial k^2(x, y^*)}{\partial y})}{\partial k_y} + \left(k_y \frac{\partial(C C_g(x, y^*))}{\partial y} \right) \varphi^2 = 0 \quad (29)$$

La ecuación de transporte (29) en el espacio (x, k_y) se ha obtenido truncando el desarrollo de las potencias de $(i\beta)^{-1}$, en el término de primer orden.

Las ecuaciones de los rayos deducidas de (28) pueden ser escritas

$$\frac{d\vec{X}}{ds} = \frac{\vec{k}}{k} \quad (30)$$

$$\frac{d\vec{k}}{ds} = \nabla k \quad (31)$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$X(0) = (x_0, y_0), \vec{k}(0) = \nabla S_0 \quad (32)$$

Empleando las ecuaciones de Hamilton (30-31) la ecuación (29) puede expresarse de la manera siguiente

$$\frac{d(\varphi^2 C_g)}{ds} + (\varphi^2 C_g) \cdot \text{div}_{x, k_y} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \left(k_y \frac{\partial(C C_g)}{\partial y} \right) \varphi^2 = 0 \quad (32)$$

Basado en el lema de Smirnov(1964)[12] escribimos la igualdad

$$\text{div}_{x, k_y} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y} \right) = \frac{d \ln J_{x, k_y}}{ds} \quad (33)$$

donde J_{x, k_y} es el jacobiano de la transformación $\lambda : (x, k_y) \rightarrow (s, \eta)$, y (s, η) denota la posición y densidad de los rayos en el espacio mixto (x, k_y) . Sustituyendo (33) en (32), se tiene la solución de (29) en el espacio (x, k_y) .

$$\varphi(s) = \varphi(0) K_s(x, y^*) \left(\frac{J_{x, k_y}^0}{J_{x, k_y}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^s k_y \frac{\partial(\ln \left(\frac{C_x}{k} \right))}{\partial y} d\tau \right) \quad (34)$$

La representación (26) con la fase $S(x, y, k_y)$ dada mediante la relación (27) y la amplitud transformada $\varphi(x, k_y)$ dada en (34) constituye la solución de la ecuación de Berkhoff(5) en el espacio (x, k_y) . Tal solución en la vecindad de una cáustica es compatibilizada con la fórmula asintótica obtenida por la vía de la óptica geométrica

$$\phi(x, y) = A_0 \cdot K_t \cdot \exp(i\beta S(x, y)) \quad (35)$$

donde $K_t = K_s \cdot \left(\frac{J_{x, y}^0}{J_{x, y}} \right)^{\frac{1}{2}}$ representa el coeficiente de transformación a lo largo de un rayo.

La aplicación del método de fase estacionaria en (26)[8,12], conduce a la expresión (en coordenadas dimensionales) dada por Bonet & Storti, en [2].

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R_{k_y}} A_0 K_s(x, y^*) \left(\frac{J_{x, y^*}^0}{J_{x, k_y}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp[i(S(x, y, k_y, M))] dk_y \quad (36)$$

siendo

$$S(x, y, k_y, M) = S(x, y, k_y) + \frac{\pi}{4} \text{sign} \frac{\partial y^*}{\partial k_y} - M \frac{\pi}{2} \quad (37)$$

Aquí M representa el índice de Maslov [8,9], y $\frac{\pi}{4} \text{sign} \frac{\partial y^*}{\partial k_y}$ distingue los rayos que han pasado el cáustico respecto a los que todavía no lo han pasado.

Esta solución asintótica es válida en la región dada si $J_{x, k_y} \neq 0$. Basado en este procedimiento, se puede construir una representación uniformemente válida según [12].

V.EJEMPLOS

Los ejemplos seleccionados comprenden la reproducción de algunos fenómenos físicos asociados a la propagación del oleaje:

- Refracción por fondo y "shoaling"
- Rotura de ondas cortas
- Cáusticas.

El primer caso estudiado corresponde al examen de la influencia de la curvatura de la amplitud de la ola en la transformación del oleaje, o sea, incorporar el término $\frac{\partial(C C_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x})}{\partial x}$ en la solución asintótica. En la figura 1a puede apreciarse el máximo valor absoluto de la variación de $\varphi_1 - \varphi_0$, para un tren de olas de período 9 seg, que incide con un ángulo de 45 grados y una amplitud A que varía a lo largo del eje OY, según

$$A(0, y) = 1 + \frac{2}{(\cosh(.2y))^2} \quad (38)$$

Los trenes de ondas se propagan sobre un fondo con contornos rectos y paralelos, que varía linealmente desde una profundidad de 10m. En una región de 230m x 700m, se han realizado pruebas para diferentes valores de la pendiente del fondo, reflejándose como consecuencia en la figura 1a un crecimiento de pequeña magnitud del potencial ondulatorio con el aumento de la pendiente del fondo, en los límites de validez de la ecuación de Berkhoff(1972).

En la figura 1b se muestra el cálculo del coeficiente de transformación del oleaje, para la máxima pendiente, debido a efectos de refracción y "shoaling", con la influencia del término de primer orden, para una discretización de la región con $\Delta x = 5m, \Delta y = 50m$. Aquí se tomaron en cuenta sólo los modos progresivos, por lo cual se observa valores menores que uno en la zona derecha a la isólinea uno.

Para ilustrar la posibilidad de la simulación de la rotura de ondas cortas con el modelo dado por (13,25), se ha realizado una simulación de un tren de ondas que incide normalmente a la costa, sobre una batimetría que representa un perfil de playa, (caso propuesto por J.M.Grassa(1991)[7]) de acuerdo a la ecuación $z = -10 + 0.02 x$, utilizando el criterio de rotura de Dally, Dalrymple y Dean, con los valores de parámetros: $K=0.15, \Gamma = 0.4, \gamma = .78125$. En la figura 2a, puede apreciarse la evolución de la altura de la

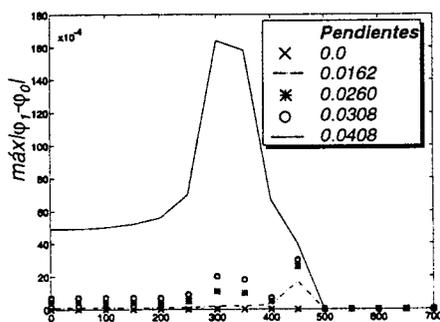


Figura 1a: influencia de los términos de orden superior en la amplitud transformada

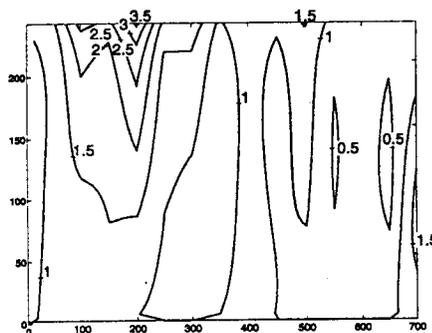


Figura 1b: Coeficiente de transformación en presencia del término de primer orden.

ola por rotura, con una disipación inicial intensa tras el punto de rotura, a una altura $H_B = 5.5945m$. Para la batimetría del perfil dada por

$$z = \begin{cases} -10 + 0.02 * x, & \text{si } x < 200m \\ -6 - 0.005 * x, & \text{si } 200 < x < 400m \\ -7 + 0.02 * x, & \text{si } 400 < x. \end{cases} \quad (39)$$

en la figura 2b se simula con los mismos parámetros la rotura de una ola sobre un bajo, su posterior recuperación por efecto de "shoaling" en la pendiente y su rotura final.

Para el estudio de la propagación de olas en la vecindad de una cáustica, se ha considerado un frente de olas parabólico $\Gamma = \left\{ x = \frac{\eta^2}{2}; y = \eta, -2 < \eta < 2 \right\}$ que incide con un período de 9seg sobre un fondo plano, en una región de 5mx6m, para $kh=0.2248$. En la figura 3a puede apreciarse la formación de la cáustica en la vecindad del frente Γ , y la disposición de los rayos en abanico, debido a la simetría del mismo. La cáustica formada representa una parábola semicúbica de ecuación $8(x-1)^3 = 27y^2$.

Un resultado interesante se puede notar en la figura 3b, donde los modos transversales, en el caso del fondo plano no varían su magnitud en la región cáustica, y en la vecindad de la misma los rayos en el plano (x, k_y) son paralelos.

En la figura 3d se muestra la transformada de Legendre de la fase $S(x,y)$. La fase $S(x,y)$ dada por una función multivaluada en la vecindad de la cáustica se representa en la figura 3c.

La solución (36)-(37), para un fondo plano $h=0.2248$ m se reduce a la expresión asintótica para la ecuación de Helmholtz, construida por Vainberg(1982) [14], en la región $\Gamma_* = \{ (x, y) | < b, b > 1 \}$.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{R_{k_y}} \frac{A_0}{(1 - k_y^2)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[i \left(x \sqrt{1 - k_y^2} + \frac{k_y^2}{2\sqrt{1 - k_y^2}} + k_y y - \frac{\pi}{4} \right) \right] f(x, k_y) dk_y \quad (40)$$

siendo f una función con soporte compacto.

Las variaciones del potencial en la vecindad del cáustico generado por la propagación

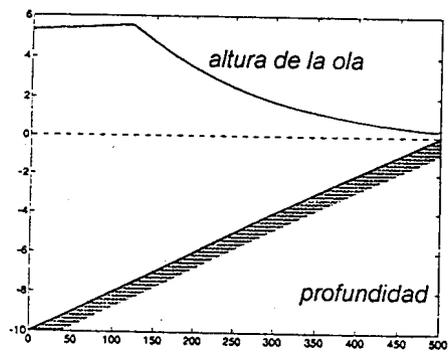


Figura 2a: rompiente sobre un perfil de playa

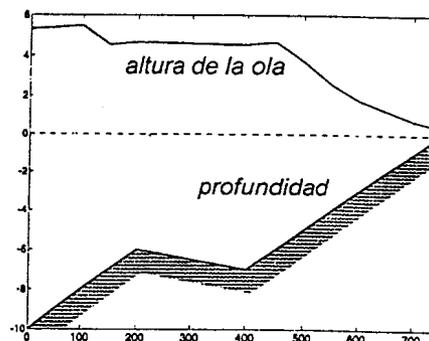
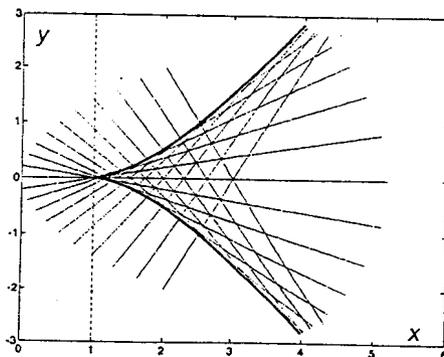
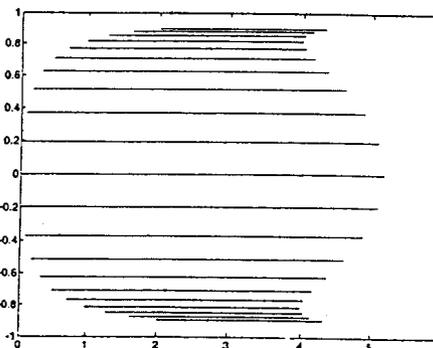
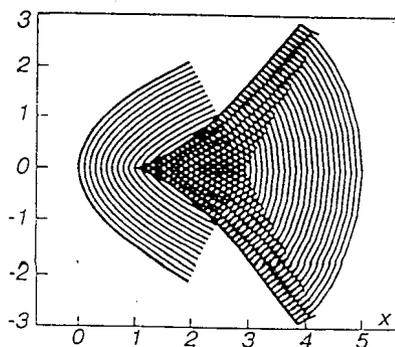
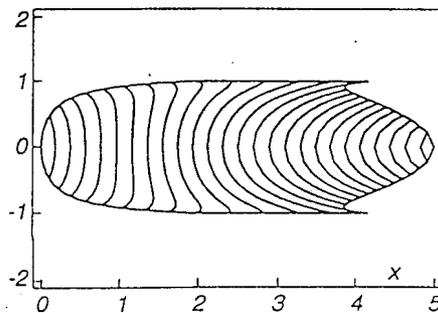


Figura 2b: rompiente sobre un perfil de playa con un bajo.

Figura 3a: rayos en el plano $x-y$ Figura 3b: rayos en el plano $x-k_y$ Figura 3c: fase en el plano $x-y$ Figura 3d: fase en el plano $x-k_y$, Transformada de Legendre de la fase $S(x,y)$

del frente parabólico son reflejadas por el término

$$\frac{\exp \left[i \left(\frac{k_y^2}{2\sqrt{1-k_y^2}} - \frac{\pi}{4} \right) \right]}{(1-k_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (41)$$

CONCLUSIONES

El modelo basado en la β -Transformada de Fourier, nos da una representación explícita del potencial de velocidades como solución de la ecuación de refracción - difracción de Berkhoff(1972). Para ondas propagándose sobre una batimetría con contornos rectos y paralelos, o con una pequeña heterogeneidad en la dirección lateral, la aproximación inicial coincide con las expresiones dadas por Kirby & Dalrymple, mediante el modelo del espectro angular. Aplicando la teoría asintótica de Maslov, se ha podido extender la solución de la ecuación de Berkhoff por la vía de la óptica geométrica, al espacio de configuración de un cáustico en (x, k_y) . Una mejor descripción del fenómeno de la disipación de olas requiere de la asintótica con fase compleja.

REFERENCIAS

1. Berkhoff, J.C.W., Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, 1972, 471.
2. Bonet, R.P., Storti, M.A., Métodos Asintóticos en la transformación del oleaje. Aspectos Básicos. Informe Interno. Julio 1995, INTEC. Santa Fé. Argentina.
3. Dalrymple, R.A., Kirby, J.T., Models for very wide angle water waves and wave diffraction. J. Fluid Mech. Vol 192, pp 33-50, (1988).
4. Dalrymple, R.A., and Such, K., Wide - angle water wave models using Fourier method, Proc 21st Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, Torremolinos, 1988, 246.
5. Dalrymple, R.A., Such, K., Kirby, J.T. Models for very wide angle water waves and wave diffraction II. Irregular bathymetry. J. Fluid Mech., 201, 299, 1989.
6. Dalrymple, R.A., Such, K., Kirby, J.T. Angular Spectrum Modelling of water waves. Reviews in Aquatic Sciences 6(5,6): pag. 383-404, (1992).
7. Grassa, J.M., Modelos parabólicos de propagación del oleaje. CEPYC. CEDEX, 1991.
8. Maslov, V.P., Métodos operacionales. Editorial MIR. Moscú. Traducción al español. Cap. V. 1973.
9. Maslov, V.P., Métodos asintóticos y teoría de perturbación. Redacción Principal Literatura Físico- Matemática. Parte II. Cap. 2 (en ruso), 1988.
10. Philip, L.-Liu, F., Wave Transformation The Sea: Ocean Engineering Science Vol 9, Two Vol. Sept 1990, p 1-63.
11. Rivero, F.J., Rodríguez, M.F., Arcilla A., Propagación del oleaje sobre fondo variable y en presencia de corrientes. II Jornadas Españolas de Ingeniería de Costas y Puertos, 10-11 Mayo 1993. Gijón.
12. Tromp, J., Uniformly valid asymptotic wave propagation based upon variational principles. Wave Motion 17 (1993), 185 - 196.
13. Tromp, J., Dahlen, F.A., Maslov theory for surface wave propagation on a laterally heterogeneous earth, Geophys. J. Int. (1993) 115, 512 - 528.
14. Vainberg, B.R., Métodos asintóticos en ecuaciones de la física - matemática. Cap. V, X (en ruso), 1982.
15. Zhevandrov, P.N., Dobrokhotov, S. Yu., Kuzmina, V.M., Asymptotics of Linear Water Waves over a gradually developing bottom. II Int. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (1993), Cap. 50, p 465-472.