

**FLUJOS CON SUPERFICIE LIBRE: OPTIMIZACION DEL RADIO DEL  
NUCLEO DE AIRE EN EL FLUJO DE UN HIDROCICLON HSEH-  
RAJAMANI**

**Rubens Sampaio**

**Juan Romero**

Departamento de Engenharia Mecânica-PUC-Rio  
Rua Marquês de São Vicente 225 - Gávea  
22453-900 - Rio de Janeiro - RJ, BRASIL

**RESUMEN**

Se presenta un modelo numérico para calcular el radio del núcleo de aire formado en el flujo interno de un hidrociclón, modelándose la superficie del núcleo de aire como una superficie libre. Con las ecuaciones de Navier-Stokes se aproxima el campo de velocidades y presión y con las ecuaciones de salto de Young-Laplace se caracteriza la superficie del núcleo de aire.

**ABSTRACT**

It is presented a mathematical model of the flow in a hydrocyclone as a free surface problem, the interface air-liquid being the free surface. In the liquid domain the Navier-Stokes equations are solved to compute the flow and the shape of the air core is taken into consideration through the Young-Laplace jump conditions in the interface air-liquid.

**INTRODUCCION**

El hidrociclón es un equipo ampliamente utilizado en la industria para la separación de partículas sólidas en suspensión en un fluido. Una mezcla de fluido y partículas es inyectada tangencialmente, creando un fuerte movimiento rotacional en el interior del equipo, generándose un campo centrífugo, debido a este campo las partículas suspendidas en el fluido tienden a desplazarse en dirección a las paredes del equipo. Debido a la alta velocidad tangencial del fluido, en la parte central del equipo la presión disminuye hasta valores menores que la presión atmosférica, generándose una región de bajas presiones, ocasionando así la formación de un núcleo de aire a lo largo de la línea central. Se conoce poco sobre la naturaleza de la interface creada.

Hidrociclones en funcionamiento presentan un núcleo de aire, cuya forma puede variar con el tiempo, como puede ser constatado por simple observación, sin necesidad de mediciones cuidadosas, no obstante, en los modelos corrientes aplicados a un hidrociclón la interface que limita el núcleo de aire es modelada como una superficie cilíndrica fija. Esto simplifica

enormemente el problema, porque elimina la dificultad del cálculo de una frontera desconocida que hace variar el dominio donde las ecuaciones de campo deben ser resueltas, no obstante, usar esta simplificación puede llevar a resultados no realistas.

A través de la teoría de interfaces de Young-Laplace [1], muestra que para líquidos confinados sometidos a un movimiento rotacional, la tensión superficial desempeña un papel dominante en la geometría de la superficie libre formada. En el presente trabajo se modela el flujo considerando la superficie del núcleo de aire como una superficie libre que satisface la condición de salto de la ecuación de Young-Laplace, relacionando la física con la geometría.

### MODELO PARA LA INTERFACE LIQUIDO-AIRE

Las hipótesis iniciales para la simplificación del tratamiento dado a la simulación del flujo en un hidrociclón son: fluido incompresible y que cumple la ecuación de Navier-Stokes, flujo turbulento y axisimétrico, régimen estacionario y suponiendo que la superficie del núcleo de aire, formada en la operación del hidrociclón, es una interface del tipo de Young-Laplace, es decir, que a través de la interface existe un salto en las tensiones normales a la misma que es proporcional a la tensión superficial y a la curvatura media de la interface, siendo la velocidad normal del fluido nula, pues a través de la superficie libre no hay pase de fluido (la interface es material).

$$[\mathbf{Tn} \cdot \mathbf{n}] = -2H\sigma \quad (1)$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2)$$

donde  $[\Phi] = \Phi_1 - \Phi_2$ , es el salto de la propiedad a través de la interface,  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario que va del fluido (2) a (1), siendo  $\mathbf{T}$  el tensor de tensiones, entonces:  $[\mathbf{Tn} \cdot \mathbf{n}] = [\mathbf{T}_2(-\mathbf{n}) + \mathbf{T}_1(\mathbf{n})]$  es el salto de tensiones normales en la interface,  $2H$  es la curvatura media de la interface,  $\sigma$  la tensión superficial y  $\mathbf{V}$  es el vector velocidad del fluido.

Considerando que la forma de la superficie libre formada es de una superficie de revolución, el radio de la superficie es  $R_a = R_a(z)$ , como se muestra en la figura 1.

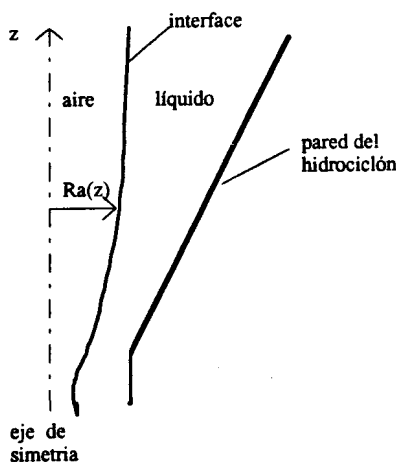


figura 1: esquema de la interface líquido-aire

Si el aire ocupa la región  $0 \leq r \leq R_a$ , la ecuación (1) puede ser escrita como:

$$\mathbf{Tn} \cdot \mathbf{n}|_{r=R_a}^{\text{ar}} - \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{n}|_{r=R_a}^{\text{liq}} = -2H\sigma \quad (3)$$

Suponiendo que el aire es un fluido ideal y despreciando los efectos viscosos y dinámicos debido a la rotación del aire [2], la presión en esta región es la presión atmosférica ( $P_o$ ), entonces para el aire:

$$\mathbf{Tn} \cdot \mathbf{n}|_{r=R_a}^{\text{ar}} = -P_o \quad (4)$$

El líquido en el hidrociclón puede ser considerado como un fluido newtoniano, por tanto el tensor de tensiones es:

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{D}$  es el tensor de deformaciones  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T)$ ,  $P$  es la presión,  $\mathbf{V}$  el vector velocidad,  $\mu$  la viscosidad del líquido,  $\mathbf{I}$  es el tensor unitario de segunda orden y  $\nabla$  el operador nabla.

La curvatura media  $2H$  y el vector normal unitario para una superficie de revolución son definidas por:

$$2H = \frac{1 + R_a' - R_a R_a''}{R_a (1 + R_a'^2)^{3/2}} \quad (6)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{R_a (1 + R_a'^2)^{1/2}} (-\mathbf{e}_r + R_a' \mathbf{e}_z) \quad (7)$$

$$\text{donde } R_a' = \frac{\partial R_a}{\partial z} \quad \text{e} \quad R_a'' = \frac{\partial^2 R_a}{\partial z^2}$$

De las ecuaciones anteriores podemos deducir dos modelos para caracterizar la geometría de la superficie del núcleo de aire.

1.- Superficie del núcleo de aire considerada como una superficie libre de forma cilíndrica recta, caracterizada apenas por un parámetro (el radio), en este caso, se busca el radio del núcleo de aire para el cual el error en la ecuación de salto de Young-Laplace sea mínimo.

2.- Superficie del núcleo de aire considerada como una superficie libre, con el formato de una superficie de revolución ( $R_a = R_a(z)$ ), para este modelo se debe satisfacer la ecuación de salto de Young-Laplace en toda la superficie.

Para el primer modelo tendremos entonces:

$$2H = \frac{1}{R_a} \quad (8)$$

$$\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r \quad (9)$$

de (8) y (9) en (5) obtenemos :

$$\mathbf{Tn} \cdot \mathbf{n}|_{r=R_a}^{\text{liq}} = -P + 2\mu \left. \frac{\partial v_r}{\partial r} \right|_{r=R_a} \quad (10)$$

Luego la ecuación (3) para este modelo quedará:

$$P - P_o - 2\mu \left. \frac{\partial v_r}{\partial r} \right|_{r=R_a} = -\frac{\sigma}{R_a} \quad (11)$$

### MODELOS DE TURBULENCIA

Debido a las condiciones de operación y a la geometría del equipo, el flujo es turbulento anisotrópico y no homogéneo, por eso la dificultad en modelar la difusión turbulenta en este tipo de flujo.

Aplicando la decomposición de Reynolds en las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento (Navier-Stokes), y tomando la media se obtiene un término adicional ( $\overline{\rho u_i u_j}$ ), las tensiones aparentes de Reynolds. Para integrar el conjunto de las ecuaciones de Navier-Stokes, además de la obligación de especificar las condiciones de frontera, es necesario utilizar un modelo de turbulencia para efectuar el cierre del problema.

Un de los modelos de turbulencia más utilizado para simular el flujo en hidrociclones es el modelo de longitud de mezcla de Prandtl [3], [4] y [5], no obstante este modelo no es adecuado para flujos recirculantes y complejos, como es el caso del hidrociclón. Otro de los modelos utilizados es el modelo  $\kappa - \epsilon$ , donde  $\kappa$  es la energía cinética de la turbulencia y  $\epsilon$  su velocidad de disipación, la mayor limitación del modelo  $\kappa - \epsilon$  es su aplicación solo para flujos isotrópicos, es decir, donde las escalas de las dimensiones de longitud y velocidad son las mismas en todas las direcciones. En flujos complejos donde existe alta velocidad de rotación, las escalas de longitud y velocidad pueden variar fuertemente con la dirección, para este tipo de flujos el modelo  $\kappa - \epsilon$  es inadecuado [6]. Otro de los modelos recomendado para flujos recirculantes es el RNG  $\kappa - \epsilon$  (teoría de grupo de renormalización), [7], este modelo es una derivación más sofisticada del modelo  $\kappa - \epsilon$  tradicional, a pesar de obtenerse una mejor aproximación en los valores para el campo de velocidades este modelo falla al no poder simular la región de vórtice libre.

En el presente trabajo se utilizó el modelo de las tensiones de Reynolds (MTR), que proporciona una mejor alternativa para la simulación de la turbulencia.

### MODELO DE LAS TENSIONES DE REYNOLDS (MTR)

Este modelo calcula las tensiones aparentes de Reynolds, en el enfoque de la turbulencia por el modelo MTR involucra resolver las ecuaciones para cada componente de las tensiones ( $\overline{\rho u_i u_j}$ ), estas son obtenidas a partir de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento. Estas ecuaciones son modeladas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) + P_{ij} + \Phi_{ij} - \epsilon_{ij} + R_{ij} \quad (12)$$

donde  $P_{ij}$  es la tasa de producción de tensiones,  $\Phi_{ij}$  es la fuente debido a la correlación presión-deformación,  $\varepsilon_{ij}$  es la disipación viscosa y  $R_{ij}$  es la rotación turbulenta.

El término  $P_{ij}$  es calculado como:

$$P_{ij} = -\left( \overline{u_i u_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (13)$$

Los términos presión-deformación, disipación y rotación son modelados como:

$$\Phi_{ij} = -C_3 \left( \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \kappa \right) - C_4 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (14)$$

donde  $P = \frac{1}{2} P_{ii}$  e  $\kappa = \frac{1}{2} (\overline{u_i^2})'$ .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (15)$$

$$R_{ij} = -2\Omega_k \left[ \overline{u_j u_m} \varepsilon_{ikm} + \overline{u_i u_m} \varepsilon_{jkm} \right] \quad (16)$$

$\varepsilon$  es la tasa de disipación isotrópica obtenida através de las ecuaciones de transporte-difusión donde no se toman en cuenta consideraciones sobre la isotropía de la difusión.  $C_3$  y  $C_4$  constantes empíricas. La suposición que la disipación  $\varepsilon_{ij}$  puede ser aproximada por la disipación isotrópica es razonable a altos número de Reynolds, donde los movimientos en pequeña escala responsables por la disipación de la turbulencia son isotrópicos.

### METODO DE APROXIMACION

Para la discretización de las ecuaciones de conservación se utilizó el método de los volúmenes finitos en coordenadas generalizadas, lo que permite una mejor adaptación de la malla a la geometría del hidrociclón. En el presente trabajo se implementó el primer modelo, donde la superficie del núcleo de aire es de forma cilíndrica recta. Se utilizó una malla de 53x15.

El procedimiento utilizado es: dada una geometría del dominio, se aproxima el campo de velocidades y presiones, se evalúa la ecuación de salto de Young-Laplace en la superficie del núcleo de aire, y a través de un algoritmo se actualiza el dominio de cálculo (radio del núcleo de aire), el proceso se repite hasta alcanzar las condiciones de aproximación deseadas.

### RESULTADOS

Se simuló el flujo interno del hidrociclón descrito en [5], operando solamente con agua. El diámetro de la parte cilíndrica es 75 mm. y su altura 75 mm., altura de la parte cónica 186 mm., el diámetro de descarga inferior 12.5 mm. y el diámetro del buscador de vórtice de 25 mm.. Se supuso que la alimentación del fluido ocurre a través de un anillo en la parte cilíndrica, esto para que las condiciones de ingreso sean compatibles con la condición de axisimetría consideradas en el modelo. As velocidades medias de ingreso son  $v = -0.1895$  m/s,  $w = 2.274$  m/s.

La figura 2 muestra el error de la ecuación de salto de Young-Laplace normalizado en relación a la presión atmosférica, se hace una comparación para tres radios diferentes.

Para las condiciones de operación descritas en el trabajo [5], tipo I, se obtiene un radio optimo para el núcleo de aire de 4.35 mm., que es bastante proximo al resultado experimental de 4.60 mm. [5].

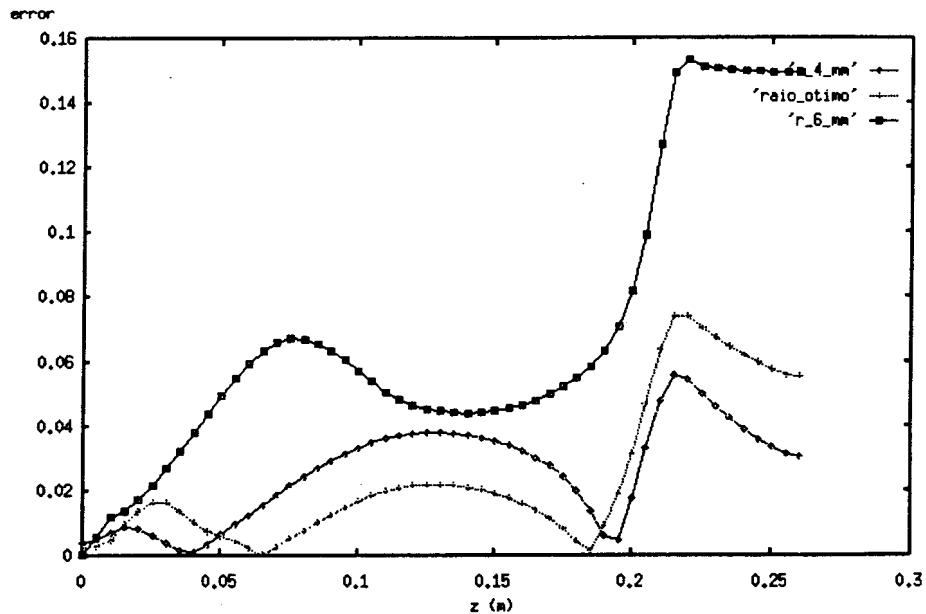


figura 2: error de la ecuación de salto de Young-Laplace

En las figuras 3 a 5 se muestran las líneas de corriente, los perfiles a diferentes niveles de la velocidad axial, tangencial y radial, así como presiones y viscosidad efectiva ( $\mu_{liq} + \mu_t$ ), obtenidas utilizando el modelo de turbulencia MTR. Estos son bastantes próximos a los obtenidos por vía experimental.

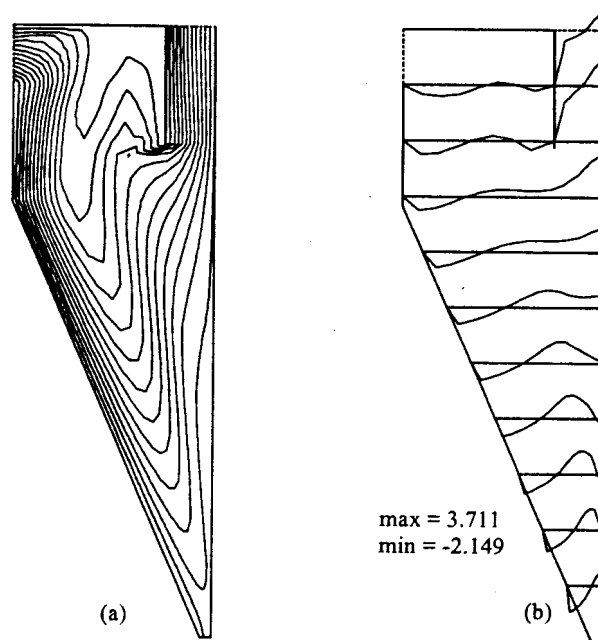


figura 3: (a) líneas de corriente, (b) perfil da velocidade axial (u(m/s))

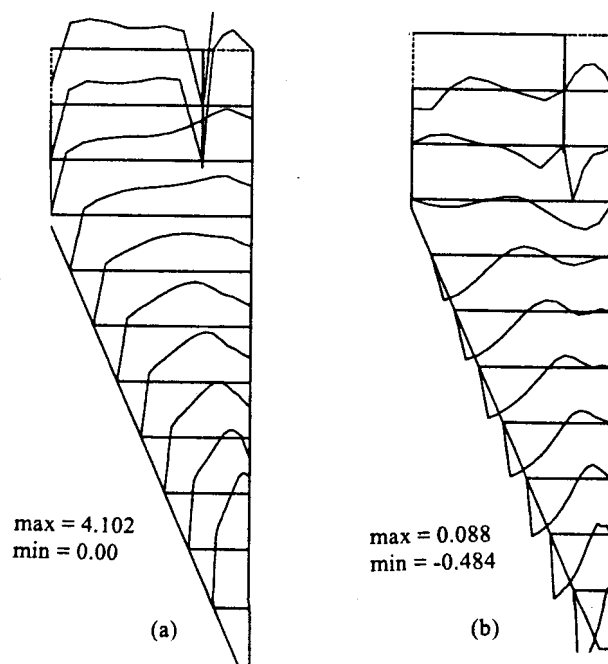


figura 4: perfil de velocidade (a).vel. tangencial (w(m/s)) (b) vel. radial (v(m/s))

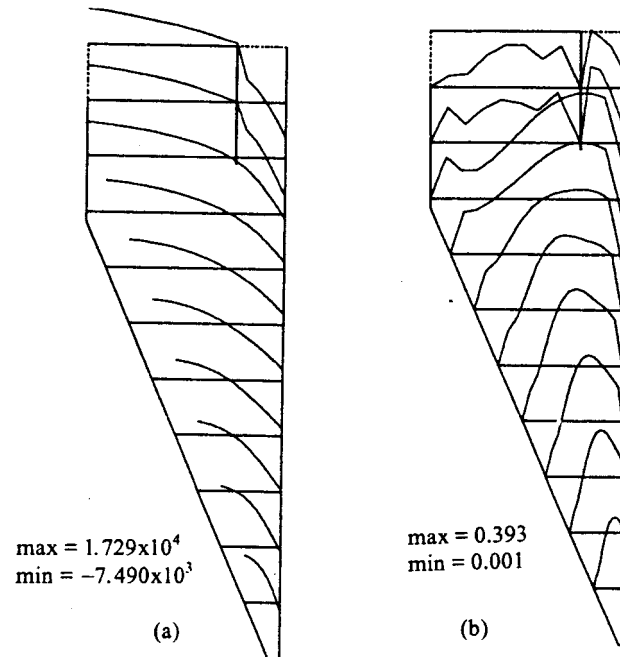


figura 5: (a) perfil de presiones (P(pa)) , (b) perfil de la viscosidad efectiva (kg/m-s).

#### REFERENCIAS

- [1] BARRIENTOS, A., "Uma Formulação da Teoria de Tensão Superficial com Aplicações a Problemas de Fronteira Livre" Tese Dr. Sci. PUC-Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.
- [2] SAMPAIO, R., Y ROMERO, J., "Modelo Matemático para la Simulación Numérica del Flujo de Fluidos en un Hidrociclón", Congreso Científico 10 años del CYTED, Cancún-México, 1994.
- [3] RHODES N., P. Y DRAKE, S., N., "The Prediction of Hydrocyclones Performance with a Mathematical Model", 3rd International Conference of Hydrocyclones, Oxford-England, 30 set. - 2 out., 1987
- [4] DAVIDSON, M., R., "Similarity Solutions for Flow in Hydrocyclones", Chem. Eng. Sci. vol. 43 No 7, 1988, págs. 1499-1505.
- [5] HSIEH, K., T., "Phenomenological Model of the Hydrocyclones", Ph. D. Thesis, University of Utah, Utah-USA, 1988.
- [6] ZERBINI, E., J., "Simulação Numérica do Escoamento em Câmaras Ciclônicas", IV Encontro Nacional de Ciências Termicas, ABCM, Rio de Janeiro, Brasil, 1992.
- [7] FLUENT Manual version 4.23, 1994.