

FLUJO BIDIMENSIONAL DE PETROLEO EN MEDIOS POROSOS: SIMULACION NUMERICA Y ANALISIS DE ESTABILIDAD¹

Gabriela B. Savioli*, Pablo M. Jacovkis** y M. Susana Bidner*

* Laboratorio de Ingeniería de Reservorios, Facultad de Ingeniería, UBA.
Pabellón Industrias- Ciudad Universitaria- 1428- Buenos Aires - Argentina

**Instituto de Cálculo y Departamento de Computación -
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.
Pabellón II - Ciudad Universitaria - 1428- Buenos Aires-Argentina

RESUMEN

El flujo radial de petróleo hacia un pozo en dos dimensiones se modela mediante una familia de esquemas en diferencias finitas. Esta familia depende de un parámetro θ , $0 \leq \theta \leq 1$. Se analiza la estabilidad de los esquemas propuestos aplicando el método matricial, que tiene en cuenta las condiciones de contorno. Eligiendo un ordenamiento apropiado de incógnitas y de ecuaciones, se obtiene una matriz "casi pentadiagonal". Esta matriz puede ser simetrizada mediante una transformación similar. Por lo tanto, estudiando las cotas de los correspondientes autovalores, los esquemas resultan incondicionalmente estables para $\theta \geq \frac{1}{2}$ y para $\theta < \frac{1}{2}$ se establecen condiciones de estabilidad. Además, se presentan resultados numéricos de simulación del flujo de petróleo aplicando la técnica BSOR (Block Successive Over Relaxation) para resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante. La solución numérica obtenida por diferencias finitas reproduce perfectamente la solución analítica de un modelo unidimensional simplificado.

ABSTRACT

The radial flow of oil towards a well in two dimensions is modeled by a family of finite difference schemes. This family depends on one parameter θ , $0 \leq \theta \leq 1$. The stability of the proposed schemes is analyzed applying the matrix method which takes into account boundary conditions. An "almost pentadiagonal" matrix is obtained choosing an appropriate order of equations and unknowns. We prove that this matrix may be symmetrized by a similarity transformation. Therefore, studying bounds for the corresponding eigenvalues, unconditional stability is found for $\theta \geq \frac{1}{2}$ and stability restrictions are established for $\theta < \frac{1}{2}$. Numerical simulations are presented using the BSOR (Block Successive Over Relaxation) Method to solve the resulting system of linear equations. The finite difference solution has perfectly reproduced the analytical solution of a simplified 1-D model.

INTRODUCCION

Las ecuaciones que gobiernan el flujo de fluidos a través de un medio poroso se obtienen combinando la ley de Darcy y la ecuación de conservación de masa [1,2]. Aunque todos los reservorios son tridimensionales, en muchas situaciones prácticas se puede suponer que el flujo en alguna coordenada es desestimable. Justamente en este trabajo se analiza el flujo monofásico de petróleo hacia un pozo en dos dimensiones. Al considerar sólo flujo monofásico se obtiene una ecuación escalar que tiene interés práctico en ingeniería de reservorios, ya que se aplica a la interpretación de ensayos de pozos [3]. Durante el ensayo, se mide la respuesta de presión que

¹ Una versión ampliada de este trabajo (referencia 7) será publicada en *Computers & Mathematics with applications*.

resulta de cambiar las condiciones de producción o inyección de un pozo. La teoría indica que las propiedades de la roca caracterizan esa respuesta; en consecuencia, el objetivo de un ensayo de pozo es estimar dichas propiedades analizando el comportamiento de la presión. Tradicionalmente se han utilizado en la interpretación de los ensayos modelos unidimensionales con propiedades constantes [3]. Sin embargo, con un modelo bidimensional (en coordenadas radial y vertical) es posible estudiar los efectos de la gravedad, de la permeabilidad vertical y de las heterogeneidades de la roca.

El objetivo de este trabajo es analizar las condiciones de estabilidad de una familia de esquemas en diferencias finitas que resuelven el modelo bidimensional (2-D) y presentar algunos resultados numéricos. En trabajos anteriores [4,5,6] se han realizado análisis de estabilidad de esquemas en diferencias finitas para ecuaciones de tipo parabólico en casos que involucran matrices con coeficientes constantes [5,6] o variables [4]. Sin embargo, sólo se consideraron condiciones de contorno de tipo Dirichlet [4,5] u otras condiciones, pero en casos lineales con coeficientes constantes [6]. Además, las matrices de los sistemas lineales resultantes eran simétricas [5] o sus autovalores podían calcularse explícitamente [6].

La discretización de la ecuación 2-D con condiciones de contorno mixtas que se presenta en este trabajo provee una matriz no simétrica, con coeficientes variables, casi pentadiagonal. Se obtiene una transformación similar que la simetriza y luego se analiza la estabilidad acotando los correspondientes autovalores reales. Finalmente se presentan algunos resultados numéricos de simulación del flujo de petróleo.

EL MODELO BIDIMENSIONAL

Suponemos un reservorio multicapa, cilíndrico con un único pozo situado en su eje central. El reservorio está sellado en su parte superior, inferior y en el radio externo por una barrera impermeable. r_w y r_e son los radios del pozo y externo, respectivamente y H es el espesor. Se utilizan coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . El reservorio sólo contiene petróleo, fluido levemente compresible de compresibilidad constante y pequeña. Si suponemos además que hay simetría axial y que todas las propiedades de la roca son función de (r, z) y las condiciones de contorno son funciones de (r, z, t) , se obtiene un modelo en dos dimensiones, radial y vertical (r, z) . Con el objeto de trabajar con variables adimensionales, definimos

$$x = \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) ; \quad z = \frac{z}{H} ; \quad t = \frac{t}{\mu c} . \quad (1)$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación [7]

$$\frac{1}{r_w^2} e^{-2x} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x(x, z) \frac{\partial p}{\partial x}(x, z, t) \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial z} \left(T_z(x, z) \left(\frac{1}{H} \frac{\partial p}{\partial z}(x, z, t) - g \frac{\rho_{sc}}{B_o} \right) \right) = \frac{\beta(x, z)}{\mu c} \frac{\partial p}{\partial t}(x, z, t) . \quad (2)$$

donde $T_x(x, z) = \frac{k_r(x, z)}{\mu B_o}$, $T_z(x, z) = \frac{k_z(x, z)}{\mu B_o}$; $\beta(x, z) = \frac{\phi(x, z)c}{B_o}$; B_o es el factor del volumen del petróleo, definido como el cociente entre el volumen de petróleo a la presión del reservorio y el volumen de petróleo en condiciones estándar (SC).

La condición inicial es presión del reservorio conocida p_{IN} .

$$p(x, z, t = 0) = p_{IN} . \quad (3)$$

Las condiciones de contorno en el pozo ($r = r_w$ or $x = 0$) son:

* caudal total conocido:

$$q_T(t) = \frac{2\pi H}{\mu B_o} \int_0^1 k_r(x=0, z) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} dz , \quad (4)$$

* presiones relacionadas por la fuerza gravitatoria:

$$p(x=0, z, t) = p_{wf} + \rho g H z , \quad (p_{wf} = p(x=0, z=0, t)) . \quad (5)$$

En los límites del reservorio (exterior, superior e inferior), se impone la condición de no flujo:

$$\left. \frac{k_r(x,z)}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x}(x,z,t) \right) \right|_{x=0} = 0 \quad (6)$$

$$\left. \frac{k_z(x,z)}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z}(x,z,t) - g \frac{\rho_{sc}}{B_o} \right) \right|_{z=0,H} = 0 \quad (7)$$

Agregando diferentes hipótesis es posible obtener soluciones analíticas aproximadas [8,9]. Sin embargo, el caso general requiere una solución numérica.

SOLUCION NUMERICA

Se considera un dominio rectangular Ω en el plano x,z , $\Omega = \left\{ (x,z) / 0 \leq x \leq l \eta \left(\frac{r_e}{r_w} \right); 0 \leq z \leq 1 \right\}$.

Lo dividimos en una grilla uniforme con puntos $(x_i, z_j) = (i\Delta x, j\Delta z)$, $0 \leq i \leq n_i; 0 \leq j \leq n_j$, donde Δx y Δz son los incrementos en las direcciones x y z , respectivamente. El tiempo se discretiza como $t^n = n\Delta t$, siendo Δt el paso de tiempo. $P_{i,j}^n$ representa la presión en (x_i, z_j, t^n) .

Entonces, la Ec. (2) se aproxima usando una familia de esquemas en diferencias finitas que dependen de un parámetro θ , $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\frac{\beta_{i,j}^{n+1}}{\mu c} \left(\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} \right) = \theta \Phi_{i,j}^{n+1} + (1-\theta) \Phi_{i,j}^n \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}^n = & \frac{1}{r_w^2} e^{-2x_i} \left[\frac{T_{x_{i+\frac{1}{2},j}} \left(\frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} \right) - T_{x_{i-\frac{1}{2},j}} \left(\frac{P_{i,j}^n - P_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right)}{\Delta x} \right] + \\ & + \frac{1}{H} \left[\frac{T_{z_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{H} \left(\frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta z} \right) - g \frac{\rho_{sc}}{B_o} \right) - T_{z_{i,j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{H} \left(\frac{P_{i,j}^n - P_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right) - g \frac{\rho_{sc}}{B_o} \right)}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

La Ec.(8) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \theta c_{i,j} P_{i-1,j}^{n+1} + \theta g_{i,j} P_{i,j-1}^{n+1} + (1+\theta a_{i,j}) P_{i,j}^{n+1} + \theta f_{i,j} P_{i,j+1}^{n+1} + \theta b_{i,j} P_{i+1,j}^{n+1} = \\ = -(1-\theta) c_{i,j} P_{i-1,j}^n - (1-\theta) g_{i,j} P_{i,j-1}^n + (1-(1-\theta) a_{i,j}) P_{i,j}^n - (1-\theta) f_{i,j} P_{i,j+1}^n - (1-\theta) b_{i,j} P_{i+1,j}^n + e_{i,j}, \end{aligned} \quad (10)$$

definiendo

$$\begin{aligned} c_{i,j} = -\frac{\mu c \Delta t}{\beta_{i,j}} \frac{e^{-2x_i}}{r_w^2 \Delta x^2} T_{x_{i-\frac{1}{2},j}}, \quad b_{i,j} = -\frac{\mu c \Delta t}{\beta_{i,j}} \frac{e^{-2x_i}}{r_w^2 \Delta x^2} T_{x_{i+\frac{1}{2},j}}, \\ g_{i,j} = -\frac{\mu c \Delta t}{\beta_{i,j}} \frac{1}{H^2 \Delta z^2} T_{z_{i,j-\frac{1}{2}}}, \quad f_{i,j} = -\frac{\mu c \Delta t}{\beta_{i,j}} \frac{1}{H^2 \Delta z^2} T_{z_{i,j+\frac{1}{2}}}, \\ a_{i,j} = -[c_{i,j} + b_{i,j} + g_{i,j} + f_{i,j}], \end{aligned}$$

$(I + \theta T)$ es estrictamente diagonal dominante; entonces es no singular y resulta,

$$P^{n+1} = (I + \theta T)^{-1} (I - (1 - \theta)T) P^n + (I + \theta T)^{-1} \Psi \quad (15)$$

Sea $M = (I + \theta T)^{-1} (I - (1 - \theta)T)$. Con el objeto de analizar la estabilidad de los esquemas en diferencias finitas propuestos, probamos las siguientes proposiciones:

Proposición 1

Existe una base de $\mathbb{R}^{\bar{N}}$ ($\bar{N} = (n_j + 1), n_i + 1$) formada por autovectores de M y todos los autovalores de M son reales.

Demostración:

Dado que $M = (I + \theta T)^{-1} (I - (1 - \theta)T)$, si λ_k es autovalor de T con correspondiente autovector v_k , entonces $\beta_k = \frac{1 - (1 - \theta)\lambda_k}{1 + \theta\lambda_k}$ es autovalor de M con el mismo autovector [10] (nótese que $(1 + \theta\lambda_k) \neq 0$ por ser autovalores de la matriz no singular $(I + \theta T)$). Por lo tanto, basta probar la proposición 1 para la matriz T .

Los coeficientes de la matriz T satisfacen las siguientes propiedades:

$$c_{i+1,j} = e^{-2\Delta x} \frac{\beta_{i,j}}{\beta_{i+1,j}} b_{i,j} \quad , \quad g_{i,j+1} = \frac{\beta_{i,j}}{\beta_{i,j+1}} f_{i,j} \quad ,$$

$$\frac{k_{r_{0,j}}}{c_{0,j}} b_{0,j} = \frac{k_{r_{0,j}}}{\mu c \Delta t k_{r_{0,j}}} b_{0,j} = -\frac{r_w^2 \Delta x^2 B_0}{c \Delta t} \beta_{0,j} b_{0,j} = \varepsilon \beta_{0,j} b_{0,j} \quad , \quad \varepsilon < 0 \quad .$$

$$\frac{\beta_{0,j}}{\beta_{0,j} r_w^2 \Delta x^2 \mu B_0}$$

Entonces, definimos $D \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times \bar{N}}$ como

$d_{0,0} = x_{0,0}$ y $d_{k,k} = x_{i,j}$; $k = (n_j + 1)(i - 1) + j + 1$ ($(j = 0, n_j)$; $i = 1, n_i$) ; donde

$$x_{0,0} = 1 \quad \text{y} \quad x_{i,j} = \sqrt{\frac{\varepsilon \beta_{i,j}}{\sum_{l=0}^{n_i} k_{r_{0,l}}} c_{0,l}} e^{l\Delta x} \quad ((j = 0, n_j); i = 1, n_i)$$

($x_{i,j}$ están bien definidos dado que $\varepsilon < 0$ y $\sum_{l=0}^{n_i} \frac{k_{r_{0,l}}}{c_{0,l}} < 0$ porque $c_{0,l} < 0$ para todo l).

Fácilmente se verifica que DTD^{-1} es una matriz simétrica. En consecuencia, DTD^{-1} tiene autovalores reales y existe una base formada por autovectores de DTD^{-1} . Pero DTD^{-1} y T son matrices similares [11]. Por lo tanto, la misma conclusión se aplica a T y la proposición queda demostrada.

Proposición 2

Cada autovalor λ_k de T pertenece al intervalo $\left[0, 4 \frac{\Delta t}{\phi_{MIN}} \left(\frac{k_{r_{MAX}}}{r_w^2 \Delta x^2} + \frac{k_{z_{MAX}}}{H^2 \Delta z^2} \right) \right]$, donde $k_{r_{MAX}}$ y $k_{z_{MAX}}$ son cotas superiores de la permeabilidad horizontal y vertical, respectivamente, y ϕ_{MIN} es una cota inferior de la porosidad.

Demostración: Es inmediata aplicando el Teorema de Gershgorin [10].

Proposición 3

Sean β_k los autovalores de $M = (I + \theta T)^{-1}(I - (1 - \theta)T)$.

a) Si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ entonces $|\beta_k| \leq 1$ para todo k , Δx , Δt , Δz .

b) Si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ entonces $|\beta_k| \leq 1$ para todo k , if Δt , Δx y Δz se eligen tal que

$$\Delta t \left(\frac{k_{r_{\max}}}{r_w^2 \Delta x^2} + \frac{k_{z_{\max}}}{H^2 \Delta z^2} \right) \leq \frac{\phi_{\min}}{2(1-2\theta)}.$$

Demostración:

$\beta_k = \frac{1 - (1 - \theta)\lambda_k}{1 + \theta\lambda_k} = 1 - \frac{\lambda_k}{1 + \theta\lambda_k}$, donde λ_k son los autovalores de la matriz T . Nótese que como

T es una matriz singular, $\lambda_k = 0$ es autovalor de T , y por lo tanto $\beta_k = 1$ es autovalor de M . Analicemos entonces los autovalores distintos de la unidad, es decir, $\lambda_k \neq 0$. En ese caso

$\beta = 1 - \frac{1}{\lambda^{-1} + \theta}$. De la proposición 2, $\lambda > 0$, luego $\beta < 1$. Además,

a) Si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, entonces $\lambda^{-1} + \theta > \frac{1}{2}$, y por lo tanto $1 - \frac{1}{\lambda^{-1} + \theta} > -1$ para todo Δx , Δt , Δz .

b) Si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ y $\Delta t \left(\frac{k_{r_{\max}}}{r_w^2 \Delta x^2} + \frac{k_{z_{\max}}}{H^2 \Delta z^2} \right) \leq \frac{\phi_{\min}}{2(1-2\theta)}$ se verifica que:

$$\lambda^{-1} + \theta \geq \frac{\phi_{\min}}{4 \Delta t \left(\frac{k_{r_{\max}}}{r_w^2 \Delta x^2} + \frac{k_{z_{\max}}}{H^2 \Delta z^2} \right)} + \theta \geq \frac{\phi_{\min}}{2(1-2\theta)} + \theta = \frac{1-2\theta}{2} + \theta = \frac{1}{2}, \text{ y entonces,}$$

$$1 - \frac{1}{\lambda^{-1} + \theta} \geq -1.$$

Por lo tanto, en a) y b) obtenemos $|\beta_k| \leq 1$ para todo k , quedando demostrada la proposición.

Finalmente, se define una norma adecuada. Sea $\{v_k\}_{k=1, \bar{N}}$ una base de $R^{\bar{N}}$ formada por autovectores de M , y sean $\{\beta_k\}_{k=1, \bar{N}}$ los correspondientes autovalores. Si $x \in R^{\bar{N}}$, $x = \sum_{k=1}^{\bar{N}} x_k v_k$ y definimos $\|x\| = \sum_{k=1}^{\bar{N}} |x_k|$. Tomamos la norma matricial subordinada a esa norma vectorial, es decir,

$$\|M\| = \max \frac{\|Mx\|}{\|x\|}, \quad \|x\| \neq 0. \quad (16)$$

Proposición 4:

a) Si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ entonces $\|M\| \leq 1$, para todo Δx , Δz , Δt . Por lo tanto, el esquema en diferencias finitas definido en la Ec.(16) es incondicionalmente estable [12].

b) Si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ y $\Delta t \left(\frac{k_{r\max}}{r_w^2 \Delta x^2} + \frac{k_{z\max}}{H^2 \Delta z^2} \right) \leq \frac{\phi_{\min}}{2(1-2\theta)}$ entonces $\|M\| \leq 1$. Por lo tanto el esquema en diferencias finitas definido en la Ec.(16) es estable si $\Delta x, \Delta z, \Delta t$ se eligen tal que

$$\Delta t \left(\frac{k_{r\max}}{r_w^2 \Delta x^2} + \frac{k_{z\max}}{H^2 \Delta z^2} \right) \leq \frac{\phi_{\min}}{2(1-2\theta)}$$

Demostración: es inmediata a partir de la definición de norma matricial Ec.(16), y la proposición 3.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Con el objeto de resolver la Ec. (14), se aplica una técnica iterativa, Block Successive Over Relaxation Method (BSOR) [1,7,13]. El análisis de resultados se divide en dos partes.

1. Comparación con la solución analítica: Se testea el simulador 2-D comparando sus resultados con la solución analítica del caso unidimensional (1-D) simplificado con porosidad y permeabilidad constantes [14]. Consideramos un pozo de radio $r_w = 0.1m$ ubicado en el eje central de un reservorio cilíndrico de radio exterior $r_o = 500m$ y espesor $H = 15m$. El reservorio está formado por cuatro capas de igual espesor. Se supone que todas las capas tienen las mismas propiedades y que no hay flujo vertical entre ellas. Es decir, la permeabilidad horizontal y la porosidad son constantes, mientras que la permeabilidad vertical es nula. Los datos se muestran en la Tabla I. Con estas hipótesis, todas las capas deben presentar el mismo comportamiento, con el caudal total dividido equitativamente entre ellas; y ese comportamiento debe coincidir con el de la solución analítica.

TABLA I : propiedades de la roca y el fluido	
porosidad, ϕ	0.2
permeabilidad horizontal, k_r	$0.1 \mu m^2$
permeabilidad vertical, k_z	$0 \mu m^2$
viscosidad del petróleo, μ	0.01 Pa.s
compresibilidad del petróleo, c	$1.45 E-9$ 1/Pa
caudal total, q	$0.001 m^3/s$

2. Simulación de flujo vertical entre capas: Se supone que las cuatro capas presentan diferentes propiedades y, en consecuencia, se establece flujo vertical entre ellas. El petróleo tiene las mismas propiedades que se muestran en la Tabla I y la permeabilidad y la porosidad de cada capa se ven en la Tabla II (la porosidad es constante y la permeabilidad vertical es un 10% de la permeabilidad horizontal).

TABLA II : propiedades de la roca en cada capa				
	Capa 1	Capa 2	Capa 3	Capa 4
porosidad, ϕ	0.2	0.2	0.2	0.2
permeabilidad horizontal, k_r	$0.010 \mu m^2$	$0.500 \mu m^2$	$0.050 \mu m^2$	$0.100 \mu m^2$
permeabilidad vertical, k_z	$0.001 \mu m^2$	$0.050 \mu m^2$	$0.005 \mu m^2$	$0.010 \mu m^2$

En ambos casos tomamos $n_i = 20$ y $n_j = 4$, o sea., $\Delta x = 0.426$ y $\Delta z = 0.25$ (adimensional). Además, se desprecian los efectos gravitatorios. Las pruebas computacionales han sido realizadas en una PC 486 DX II de 66 MHz con 4MB de memoria RAM.

1. Comparación con la solución analítica: Se testean diferentes esquemas en diferencias finitas (correspondientes a diferentes valores de θ , Ec. (8)). Se verifica que usando el modelo 2-D, todas las capas tienen el mismo comportamiento y este comportamiento coincide con la solución

analítica. Esto último se observa en la Fig. 1, donde la presión en el pozo (p_{wf}) se grafica en función del tiempo. Los perfiles de presión calculados con diferentes θ son muy similares.

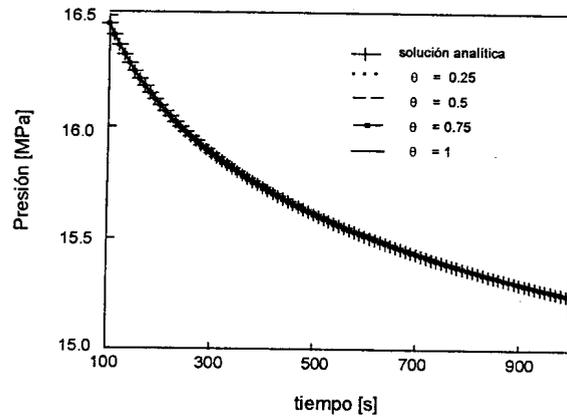


Figura 1 : Comparación con la solución analítica usando diferentes esquemas.

La Figura 2 muestra los errores relativos definidos como

$$E_r(t_i) = \frac{|p_{wf}^{an}(t_i) - p_{wf}^{2D}(t_i)|}{|p_{wf}^{an}(t_i)|} \quad (17)$$

donde los superíndices 'an' y '2D' significan solución analítica y solución del modelo 2-D, respectivamente. Los errores relativos son muy bajos y casi iguales para diferentes valores de θ . Sin embargo, a tiempos cortos, los errores decrecen al aumentar θ , como ilustra la Fig. 2.

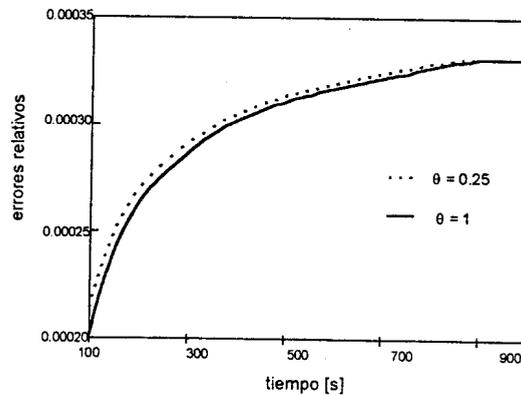


Figura 2 : Errores relativos de la solución numérica usando diferentes esquemas

Por lo tanto, se elige $\theta=1$ (esquema incondicionalmente estable) para testear cuánto puede ser incrementado el paso del tiempo Δt sin distorsionar la bondad de la aproximación numérica. Usando la técnica BSOR se alcanza convergencia aún con valores grandes del paso de tiempo. En la Fig. 3 se muestran los errores relativos obtenidos usando $\Delta t=0.1, 1, 10, 100$ s. En cada caso, la aproximación numérica no es buena hasta que se alcanza un cierto valor de tiempo. Es interesante notar que, independientemente de Δt , los errores relativos tienden a un valor

constante a medida que pasa el tiempo. Sin embargo, el tiempo de CPU invertido para completar cada paso de tiempo aumenta a medida que Δt aumenta, como muestra la Tabla III.

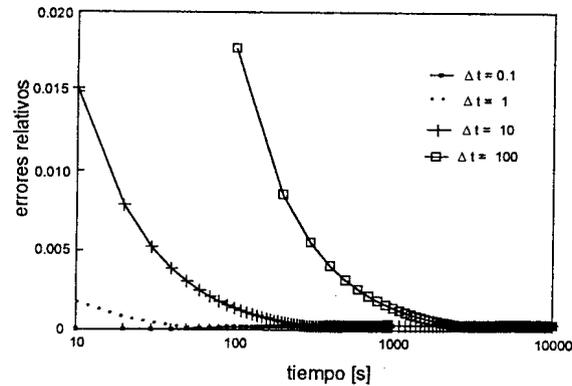


Figura 3: Errores relativos usando diferentes incrementos de tiempo.

Tabla III - tiempo promedio de CPU requerido por BSOR para completar cada paso de tiempo	
Δt (s)	tiempo de la CPU (s)
0.1	0.092
1	0.329
10	1.317
100	38.4

La mejor elección es utilizar un incremento Δt variable, seleccionado apropiadamente para cada rango de valores de tiempo. Precisamente, es lo que se aplica en la siguiente sección.

2. **Simulación de flujo vertical entre capas:** se usa el modelo 2-D para simular un problema con flujo vertical entre capas de características diferentes. Se toman los datos del fluido de la Tabla I y las propiedades de la roca de la Tabla II. Aplicamos la técnica BSOR tomando $\theta = 1$ en dos casos:
 - a) con un $\Delta t = 0.01$ s fijo y
 - b) con un paso de tiempo variable, elegido de la siguiente manera:
 - * en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ [s], tomamos $\Delta t = 10^{-3}$ s;
 - * en un intervalo de tiempo $[10^k, 10^{k+1}]$ [s], tomamos $\Delta t = 10^{k-2}$ s.

Las presiones calculadas con Δt fijo y variable se muestran en la Fig. 4. La concordancia entre ellas es excelente y el tiempo de la CPU correspondiente decrece de 1.73 horas a 15 minutos.

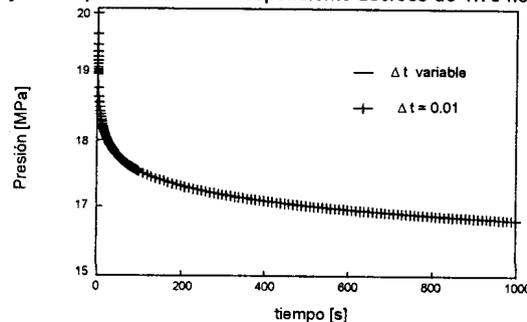


Figura 4: Flujo vertical: comparación entre los resultados obtenidos usando Δt fijo y variable

CONCLUSIONES

La ecuación que modela el flujo monofásico de petróleo hacia un pozo en coordenadas cilíndricas es resuelta en 2-D (coordenadas (r,z)), usando una familia de esquemas en diferencias finitas. Esta familia depende de un parámetro θ . Hemos estudiado la estabilidad de estos esquemas, teniendo en cuenta las condiciones de contorno. Además, se presentan algunos experimentos numéricos con el objeto de testear los esquemas propuestos. Se usa el método iterativo BSOR para resolver el sistemas de ecuaciones lineales resultante, implementado específicamente para este problema [7]. Las conclusiones obtenidas son las siguientes:

1. Si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ el esquema en diferencias finitas definido en la Ec.(8) es incondicionalmente estable. Si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, el esquema es estable si $\Delta x, \Delta z, \Delta t$ se eligen tal que verifiquen

$$\Delta t \left(\frac{k_{r_{MAX}}}{r_w^2 \Delta x^2} + \frac{k_{z_{MAX}}}{H^2 \Delta z^2} \right) \leq \frac{\phi_{MIN}}{2(1-\theta)}$$

2. La solución en diferencias finitas reproduce la solución analítica de un modelo 1-D simplificado.
3. BSOR converge usando grandes valores de Δt , de manera que se recomienda este método cuando debe ser simulado un largo período de tiempo. Además, el tiempo de CPU se reduce en forma significativa usando un incremento de tiempo variable.
4. El modelo 2-D presentado aquí puede ser usado para analizar la influencia de la permeabilidad vertical, de las heterogeneidades verticales y radiales así como también de los efectos gravitatorios, sobre la respuesta de presión del ensayo de pozo.

REFERENCIAS

- [1] K. Aziz and A. Settari, *Petroleum Reservoir Simulation*. Elsevier Applied Science Publishers, London & New York (1985).
- [2] D. Peaceman, *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Elsevier, New York (1977).
- [3] R. Horne, *Modern Well Test Analysis-A Computer Aided Approach*. Petroway, Inc. Palo Alto, CA, USA (1990).
- [4] J. Douglas, Jr., The application of stability analysis in the numerical solution of quasi-linear parabolic differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89**, 484-518 (1958).
- [5] Y. Cherruault, M. Choubane, J. Valleton and J. Vincent, Stability and asymptotic behavior of a numerical solution corresponding to a diffusion-reaction equation solved by a finite difference scheme (Crank-Nicolson). *Computers Math. Applic.*, **20**(11), 37-46 (1990).
- [6] R. Lardner, Stability of the numerical solution of a parabolic system with integral subsidiary conditions. *Computers Math. Applic.*, **19** (12), 41-46 (1990).
- [7] G. Savioli, P. Jacovkis and M. S. Bidner, Stability analysis and numerical simulation of 1-D and 2-D radial flow towards an oil well, *Computers Math. Applic.*, to be published (1995).
- [8] R. Prijambodo, R. Raghavan and A. Reynolds, Well Test Analysis for Wells Producing Layered Reservoirs with Crossflow, *Society of Petroleum Engineers Journal*, **25**(3), 380-396, (1985).
- [9] M.L. Katz and M.R. Tek, A Theoretical Study of Pressure Distribution and Fluid Flux in Bounded Stratified Porous Systems with Crossflow. *Society of Petroleum Engineers Journal*, March 1962, 68-82.
- [10] G. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations, Finite Difference Methods*, 3rd. edn. Oxford University Press, Oxford (1985).
- [11] G. Golub and C. Van Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland (1984).
- [12] R. Ritchmyer and K. Morton, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd. edn. Interscience, New York (1967).
- [13] R. Varga, *Matrix Iterative Analysis*. Prentice - Hall, New Jersey (1962).
- [14] G. Savioli, M. Goldschmit y M. S. Bidner, Discusión sobre las soluciones analíticas y numéricas de la ecuación radial de difusividad que representa el flujo en medios porosos, *Revista Brasileira de Engenharia*, **5** (2), 65-79 (1988).