

## CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS DE FRONTERA MÓVIL

Darío F. Delmastro, Luis E. Juanicó y Alejandro Clause  
Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro  
8400 Bariloche, Argentina

### RESUMEN

Se analiza un modelo numérico de un canal en ebullición en base a elementos finitos unidimensionales móviles. Este modelo se basa en una aproximación nodal de Galerkin para las ecuaciones de conservación. Se estudia analíticamente y numéricamente la convergencia para regímenes bajo convección natural y forzada. Se investigan las diferencias entre regímenes con bajo y alto número de Froude, analizándose el origen de las diferentes discretizaciones necesarias para la correcta representación de la evolución de la frontera de ebullición.

### ABSTRACT

A numerical model of a boiling channel based in one-dimensional variable-length finite elements is analyzed. A Galerkin nodal approximation is used to reduce the conservation equations to a set of ordinary differential equations. The convergence for natural and forced circulation conditions is analytically and numerically studied. The differences between low and high Froude number conditions are studied, been analyzed the origin of the different discretizations needed to accurately represent the boiling boundary evolution.

### INTRODUCCIÓN

Los flujos bifásicos en ebullición tienen importantes aplicaciones en distintas ramas de la ingeniería. Bajo ciertas condiciones estos sistemas se vuelven inestables dando origen al fenómeno conocido como "ondas de densidad" [1]. En esta situación el estado estacionario del flujo no puede ser mantenido, y el sistema evoluciona hacia un estado de oscilación autosostenida. Las amplitudes de estas oscilaciones pueden ser considerables, llegando en circunstancias a causar la inversión del caudal refrigerante (flujo reverso).

### CANAL EN EBULLICIÓN

La dinámica de un flujo en ebullición está gobernada por las ecuaciones de conservación de la masa, la energía y el momento planteadas para cada fase (líquido y vapor). Dada la complejidad del problema, suelen plantearse las siguientes hipótesis respecto al flujo:

- flujo homogéneo (deslizamiento despreciable entre fases) en equilibrio termodinámico,
- las variaciones de presión son pequeñas frente a la presión total del sistema,
- ambas fases son incompresibles,
- flujo de calor constante,
- flujo de calor y área de pasaje uniformes,
- la disipación viscosa, el trabajo de flujo, la energía cinética y potencial, son despreciables.

Con estas suposiciones las ecuaciones de conservación para un flujo unidimensional bifásico se pueden escribir en forma adimensional como [2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h u)}{\partial z} = \frac{N_{sub}}{N_{pch}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial z} = -N_f \rho u^2 - \frac{\rho}{Fr} - Eu \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3)$$

y las ecuaciones de estado correspondientes (con  $h_f = 0$ ):

$$\rho = 1 \quad \text{si } h \leq 0 \quad (4a)$$

$$\rho = [1 + N_{pch} h]^{-1} \quad \text{si } h > 0 \quad (4b)$$

### MODELADO POR ELEMENTOS FINITOS MÓVILES

La zona de una fase del canal se extiende desde la entrada del canal hasta el punto donde comienza la ebullición (frontera de ebullición). Como se puede ver en la Fig.1, se subdivide esta zona en  $N_s$  elementos de longitud variable. El aumento de entalpía desde la entrada,  $h_i$ , hasta saturación,  $h_f$ , se subdivide también en  $N_s$  intervalos iguales de magnitud  $(h_f - h_i)/N_s$ . Luego la posición del nodo líquido  $L_n$  se define como el punto donde la entalpía del fluido alcanza el siguiente valor:

$$h_n = \left( \frac{n - N_s}{N_s} \right) \cdot \frac{N_{sub}}{N_{pch}} \quad (5)$$

siendo su ubicación espacial es una variable temporal solución del problema.

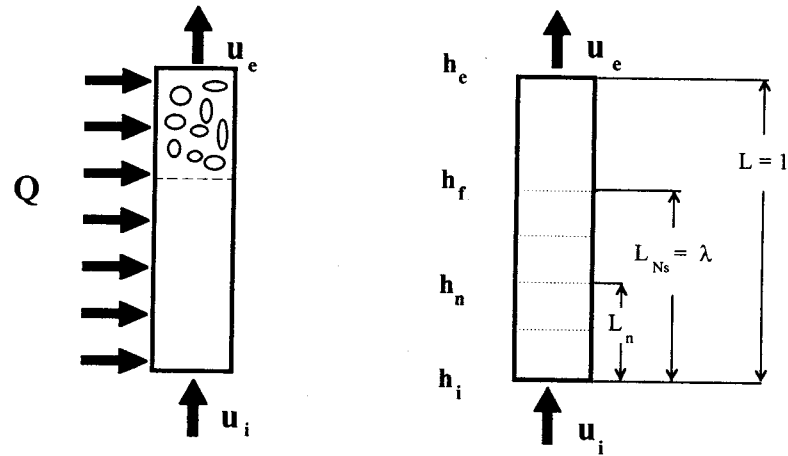


Figura 1: esquema del canal en ebullición y su discretización por el método de elementos finitos móviles

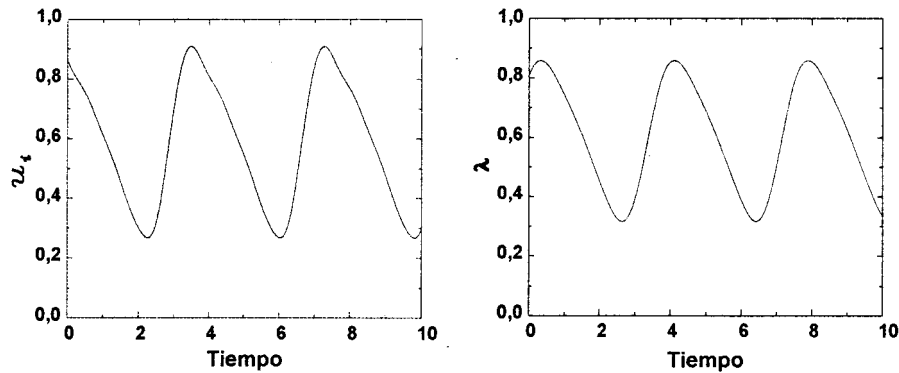
Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución de las posiciones de los nodos  $L_n$ , se pueden obtener mediante una aproximación nodal de Galerkin, usando una función de forma lineal para el perfil de entalpía dentro de cada elemento [3]. Integrando la ecuación de energía (2) usando la regla de Leibnitz entre  $L_{n-1}$  y  $L_n$ , se obtiene:

$$\frac{dL_n}{dt} = 2u_i - 2N_s(L_n - L_{n-1}) - \frac{dL_{n-1}}{dt} \quad (6)$$

La posición a cada instante de la frontera de ebullición,  $\lambda = L_{N_s}$ , puede conocerse resolviendo las  $N_s$  ecuaciones (6) conjuntamente con la ecuación de momento (2).

### REPRESENTACIÓN DE REGÍMENES OSCILATORIOS

En trabajos anteriores este modelo fue utilizado exitosamente para la representación de la dinámica de canales en ebullición bajo convección forzada (o con términos gravitatorios no dominantes, *i.e.* Froude moderados o altos). En éstos se analizaron situaciones en que los sistemas se volvían inestables dando origen al fenómeno de ondas de densidad [4]. En estos casos el estado estacionario del flujo no puede ser mantenido y el sistema evoluciona hacia un estado de oscilación autosostenido. En la figura 2 se muestra la evolución de la velocidad de entrada al canal y de la frontera de ebullición para este tipo de situaciones, habiéndose utilizado una discretización espacial de 10 nodos para la representación de la zona de una fase.



Figs. 2: evolución temporal de la velocidad de entrada y de la frontera de ebullición para un caso en convección forzada

En trabajos posteriores intento utilizarse el mismo método para la representación de sistemas bajo convección natural. En la figura 3 se muestra la evolución de la velocidad obtenida para una situación de este tipo utilizando la misma discretización que en el caso anterior. Como se puede observar en este caso el período de las oscilaciones es del orden del tiempo de referencia siendo la frecuencia adimensional substancialmente superior a la del caso anterior. Diferencias encontradas con modelos integrodiferenciales en demoras [5] llevaron a la realización de verificaciones sobre la representación de la evolución de la frontera de ebullición obtenida por el presente modelo. Para ello se comparó la evolución de la frontera de ebullición dada por las  $N_y$  ecuaciones anteriores con la correspondiente a la evolución de la velocidad de entrada, obtenida utilizando técnicas de deconvolución en demoras [6]. En la figura 4 se muestran los resultados obtenidos. Como se puede observar las evoluciones obtenidas no son similares evidenciándose la incorrecta representación del presente modelo.

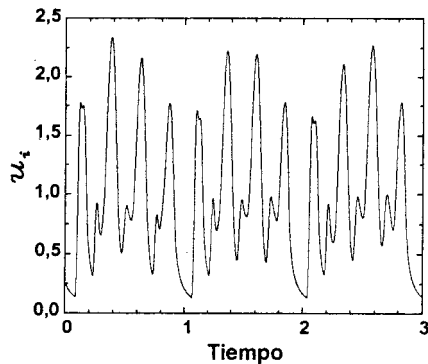


Figura 3: evolución de la velocidad de entrada para un caso en convección natural

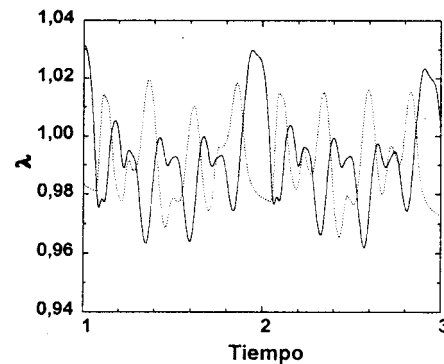


Figura 4: comparación de las evoluciones de  $\lambda$  dadas por el presente modelo (—) y por deconvolución (...) (convección natural)

La solución de este tipo de problemas presenta características distintivas según consideremos flujos bajo convección forzada o natural (con bajo número de Froude), dada la importante presencia de frecuencias mayores en el segundo de ellos. Para estudiar el comportamiento en el dominio frecuencial del juego de ecuaciones (6) obtuvimos su función de transferencia en función de la discretización espacial (es decir el número de nodos  $N_s$ ).

### FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LA FRONTERA DE EBULLICIÓN

Consideremos perturbaciones a partir del estacionario (o) de la forma:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{no} + \tilde{L}_n(t), \\ u_i &= u_{io} + \tilde{U}_i(t), \\ \text{con } \tilde{L}_n(t) &= \hat{L}_n e^{st} \text{ y } \tilde{U}_i(t) = \hat{U}_i e^{st}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (6) y dividiendo por el factor  $e^{st}$  se obtiene que:

$$s \hat{L}_n + 2 N_s \hat{L}_n = -s \hat{L}_{n-1} + 2 N_s \hat{L}_{n-1} + 2 \hat{U}_i \quad (7)$$

Despejando  $\hat{L}_n$  de (7) se obtiene la siguiente ecuación recursiva:

$$\hat{L}_n = \frac{(2 N_s - s) \hat{L}_{n-1} + 2 \hat{U}_i}{(2 N_s + s)} \quad (8)$$

La función de transferencia para las variaciones de la frontera de ebullición,  $\Lambda = \hat{L}_{N_s}$ , puede obtenerse utilizando en forma recursiva la ecuación (8). Por ejemplo para el caso de 10 nodos ésta se reduce a:

$$\frac{\Lambda}{\hat{U}_i} = \frac{400(25600000000 + 768000000s^2 + 4032000s^4 + 4800s^6 + s^8)}{(20+s)^{10}} \quad (9)$$

La función de transferencia exacta para la frontera de ebullición (7) puede obtenerse de [7], siendo su expresión:

$$\frac{\Lambda}{\hat{U}_i} = \frac{1 - e^{-s}}{s} \quad (10)$$

En la figura 5 se muestra el módulo de las funciones (9) y (10) en función de la frecuencia angular  $\omega$ , siendo  $s = i\omega$ . Analizando la misma, es de destacar que mientras que para frecuencias relativamente bajas la solución del modelo nodal es una buena aproximación de la solución exacta, su validez decrece notablemente para frecuencias superiores.

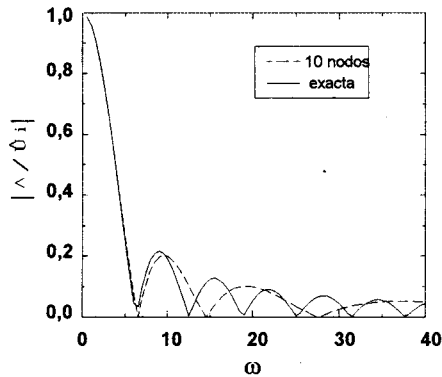


Figura 5: comparación del  $|\Lambda/\hat{U}_i|$  dado por las ecuaciones (9) y (10)

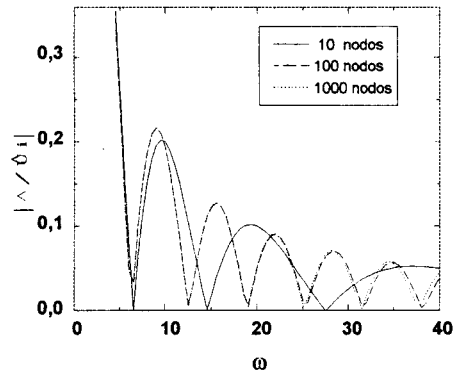


Figura 6: comparación del  $|\Lambda/\hat{U}_i|$  para distintas discretizaciones

Aumentando la discretización espacial (*i.e.* aumentando el número de nodos) se mejora la representación de las frecuencias mayores, como se observa en la Fig.6.

Debe señalarse que ésto conlleva un aumento significativo en la discretización temporal necesaria para representar adecuadamente la evolución del problema, con el mayor costo computacional que ésto implica. En la Fig.7 se comparan las respuestas en frecuencias obtenidas por medio de la función de transferencia e integrando las  $N_s$  ecuaciones (6) en forma numérica. Los resultados numéricos fueron obtenidos por medio de un método de Runge-Kutta [8] utilizando distintas discretizaciones temporales.

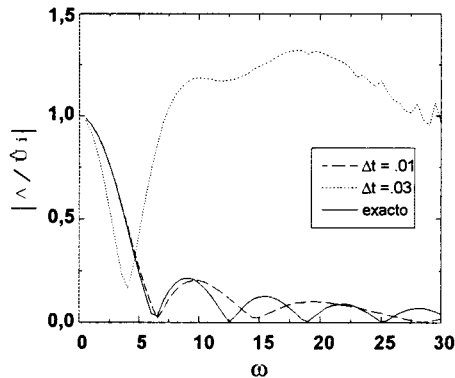


Figura 7: comparación del  $|\Lambda/\hat{U}_i|$  obtenido numéricamente con distintas discretizaciones temporales ( $N_s=30$ )

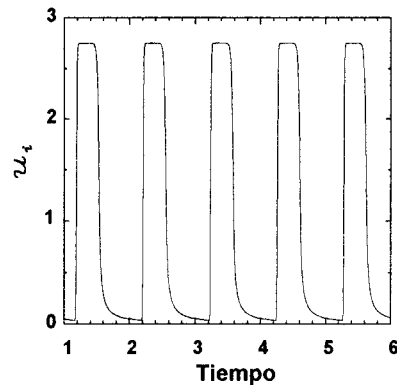


Figura 8: evolución de la velocidad de entrada en demoras

## FLUJOS BAJO CONVECCIÓN NATURAL

Los fenómenos oscilatorios presentes en los flujos bajo convección natural, a diferencia de los de convección forzada, suelen caracterizarse por la presencia significativa de frecuencias relativamente altas. El análisis realizado en este trabajo en el dominio frecuencial sobre el modelado de la ecuación de la energía nos permite inferir la necesidad de utilizar discretizaciones mayores. Este resultado fue verificado integrando numéricamente por medio de un método de Runge-Kutta las  $N_s$  ecuaciones (6) y utilizando una historia de velocidad a la entrada  $u_i(t)$  obtenida con el modelo integrodiferencial en demoras (Fig. 8) [4]. La evolución de la frontera de ebullición así obtenida es comparada con la solución del modelo en demoras antes mencionado, como puede observarse en las Fig. 9 a 12.

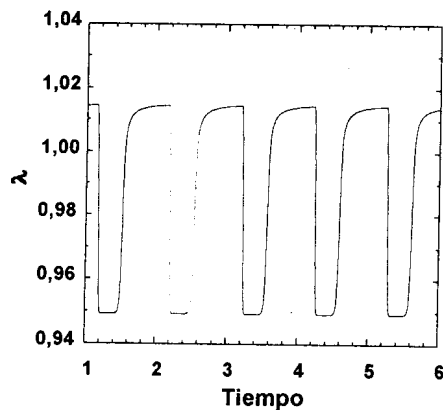


Figura 9: evolución de  $\lambda$  utilizando el modelo integrodiferencial en demoras

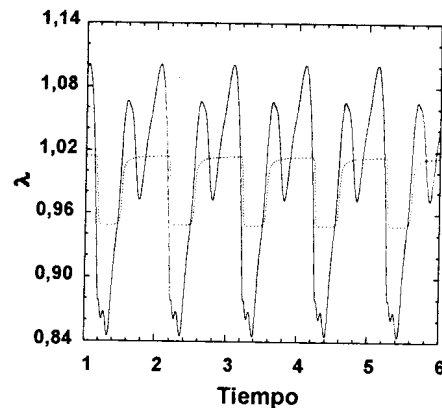


Figura 10: comparación de la evolución de  $\lambda$  obtenida en demoras (...) y con  $N_s=10$  (—)

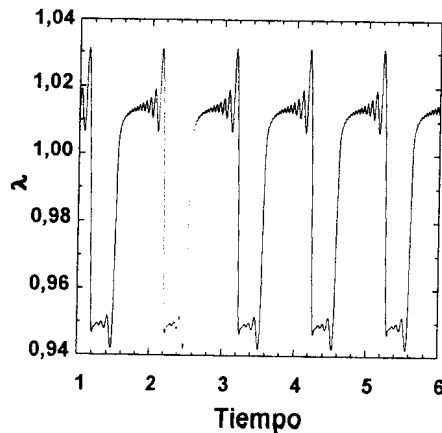


Figura 11: evolución de  $\lambda$  para  $N_s=100$

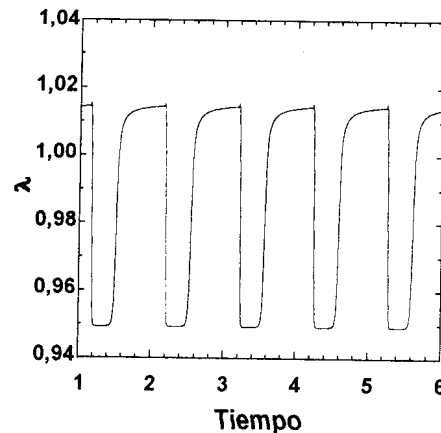


Figura 12: evolución de  $\lambda$  para  $N_s=1000$

Nótese en ellas la necesidad de utilizar discretizaciones altas, si se compara con los flujos de convección forzada, a los efectos de lograr una adecuada representación de los armónicos superiores.

### CONCLUSIONES

El método de elementos finitos móviles utilizado resulta muy útil para representar los regímenes oscilatorios de sistemas bajo convección forzada, destacándose su rapidez y versatilidad. Estas cualidades no se pueden extender a los regímenes oscilatorios bajo convección natural donde el efecto gravitatorio sea dominante (bajo número de Froude).

El origen de esta diferencia radica en las distintas discretizaciones mínimas requeridas para la adecuada representación de ambos tipos de regímenes. El análisis realizado demostró la fundamental importancia de una adecuada discretización para representar la evolución de la frontera móvil que separa las zonas de una y dos fases. El análisis de la función de transferencia de la frontera de ebullición permite estimar la discretización espacial mínima necesaria para cada caso.

### NOMENCLATURA

$h$	entalpía específica,
$L$	posición o longitud del canal,
$N_s$	número de nodos en la zona subenfriada,
$p$	presión,
$Q$	potencia total,
$s$	transformada del tiempo,
$t$	tiempo,
$u$	velocidad,
$z$	variable espacial.

#### Letras griegas

$\lambda$	frontera de ebullición,
$\Lambda$	transformada de Laplace de la perturbación de $\lambda$ ,
$\rho$	densidad,
$\omega$	frecuencia angular.

#### Subíndices

$e$	salida del canal,
$f$	líquido en saturación,
$i$	entrada del canal,
$n$	n-ésimo nodo de una fase,
$o$	estado estacionario.

#### Supraíndices

$\sim$	perturbación a partir del estacionario,
$\wedge$	transformada de Laplace.



**Números adimensionales [2]**

$Eu$	Número de Euler,
$Fr$	Número de Froude,
$N_f$	Número de fricción,
$N_{pch}$	Número de cambio de fase,
$N_{sub}$	Número de subenfriamiento.

**REFERENCIAS**

- [1] **Lahey, R.T. y Moody, F.J.**, *The Thermal Hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor*, ANS Monograph, 1977.
- [2] **Clause, A., Delmastro D.F. and Lahey R.T.**, *The Analysis of Chaotic Instabilities in Natural Circulation Boiling Systems*. Eurotherm Seminar, Vol.16,1990, págs. 161-167.
- [3] **D.R.J. Owen y E. Hinton**, *"A Simple Guide to Finite Elements"*, Pineridge Press Limited, (1980).
- [4] **Delmastro D.F. y Clause, A.**, *"Modelado por medio de Elementos Finitos Móviles de la Dinámica de Flujos en Ebullición"*, Revista Int. de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Eng., Vol. 8, 4, 1992, págs. 463-471.
- [5] **Rizwan-Uddin and Dorning J.J.**, *"A Chaotic Attractor in a Periodically Forced Two-Phase Flow System"*, Nucl. Sci. Eng., Vol. 100, 1988, págs. 393-404.
- [6] **Delmastro D.F. y Clause, A.**, *"Oscilaciones de Frontera de Entalpía en Flujos de Dos Fases"*, Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi, Vol.23, 1993, págs. 103-119.
- [7] **Clause, A., Delmastro D.F. and Converti, J.**, *"The Influence of Gravity on the Stability on Boiling Flows"*, Nuc. Eng. and Design, Vol. 127, 1991, págs. 129-139.
- [8] **Marshall G.**, *"Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales"*, Reverté Argentina, 1985.

