

## GERAÇÃO DE MALHAS NÃO ESTRUTURADAS DE QUADRILÁTEROS

**Ernesto Luiz Gomes Alquati**

Dep. de Materiais e Construção - Fundação Universidade do Rio Grande(FURG)  
Rua Alfredo Huch, 475 - 96201-900 - Rio Grande - RS - Brasil

**Ademar Gilberto Groehs**

Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil - Universidade Federal do Rio Grande do Sul(UFRGS)  
Av. Osvaldo Aranha, 99, 3º. andar - 90035-190 - Porto Alegre - RS - Brasil

### RESUMO

Este trabalho descreve um algoritmo que transforma malhas de elementos finitos de elementos triangulares em malhas de elementos quadriláteros. Esta conversão é realizada pela remoção seletiva de diagonais entre triângulos. A malha resultante será constituída por elementos triangulares e quadriláteros. Os elementos desta malha mista são então subdivididos resultando uma malha constituída exclusivamente por elementos quadriláteros. Exemplos são apresentados para demonstrar que malhas de elementos quadriláteros de alta qualidade podem ser geradas pelo algoritmo apresentado.

### ABSTRACT

This work describes an algorithm that transforms a finite element mesh containing triangular elements into a quadrilateral element mesh. This conversion is made by removing the diagonals between triangles in a selective way. The resultant mesh will be constituted by triangular and quadrilateral elements. Then the elements of this mixed mesh are subdivided resulting in a mesh composed by quadrilateral elements. Examples are given to illustrate that high-quality quadrilateral meshes can be generated by the present algorithm.

### INTRODUÇÃO

A discretização de um domínio desempenha um importante papel no processo de análise pelo método dos elementos finitos. Como consequência, várias técnicas para geração automática de malhas tem sido propostas [1;2]. Triangulações de domínios planos arbitrários com elementos de qualidade muito boa podem ser feitas com muita eficiência pela técnica do avanço de frente [3;4] ou empregando a triangulação de Delaunay [5].

Por outro lado, a geração de malhas não estruturadas com elementos quadriláteros não está ainda definida por técnicas com sistematização geral, embora algumas iniciativas tem sido feitas [6;7].

Neste trabalho é descrito um algoritmo baseado em conceitos puramente geométricos. Ele permite a geração automática de malhas não estruturadas de elementos quadriláteros a partir de triangulações previamente obtidas. Esse algoritmo contempla três fases. Na primeira fase, é formada uma malha mista de triângulos e quadriláteros pela remoção de diagonais comuns a cada dois elementos triangulares. Na segunda fase, os elementos desta malha mista sofrem subdivisão em quadriláteros. Na terceira e última fase, a malha de quadriláteros sofre um processo iterativo de regularização visando otimizar a qualidade geral dos elementos.

## O ALGORITMO

O algoritmo trabalha com triangulações previamente obtidas sobre domínios planos. Na primeira fase, a idéia básica consiste na geração de um elemento quadrilátero pela remoção de um lado comum (“diagonal”) a dois elementos triangulares. Para tanto é necessário, previamente ao processo de remoção, estabelecer uma análise sobre as diagonais presentes na malha, visto que a qualidade dos elementos quadriláteros que serão formados e por extensão a qualidade da malha resultante, dependerá do modo como as diagonais serão removidas. As diagonais são identificadas como sendo de contorno ao domínio ou como de interior ao domínio. As primeiras são assinaladas de modo que não possam ser removidas. A seqüência segundo a qual as diagonais internas poderão ser removidas fica estabelecida pelo valor de um parâmetro  $\beta$  a elas associado, que mede a qualidade do quadrilátero que poderá ser gerado pela sua remoção. Calculados os valores de  $\beta$  de todas as diagonais internas e ordenados de forma decrescente, a diagonal tendo o maior valor de  $\beta$  será removida e um elemento quadrilátero será formado. Assim, suponhamos que a linha AC será removida como mostrado na Figura 1. Os triângulos ACD e ABC são identificados, eliminados da base de dados, enquanto o elemento quadrilátero gerado ABCD é adicionado à base de dados. Os quatro lados do elemento quadrilátero AB, BC, CD, e DA são assinalados de modo que não possam ser removidos na continuação do processo.

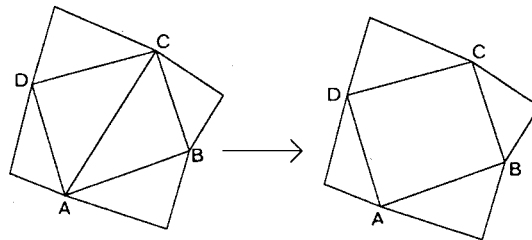


Figura 1 : Formação de um elemento quadrilátero pela remoção da diagonal AC comum aos elementos ABC e ACD.

O processo de remoção de diagonais segue até que o valor do parâmetro  $\beta$  das diagonais disponíveis para remoção seja inferior a um valor prescrito  $\eta$ . Desta forma, partindo-se de uma dada malha de elementos triangulares, quanto menor for o valor de  $\eta$  tanto maior será o número de quadriláteros formados. Caso  $\eta=1$ , nenhuma diagonal será removida e nenhum quadrilátero será formado.

Este processo de remoção de diagonais gera, normalmente, uma malha mista com elementos triangulares e quadriláteros. Assim, na segunda fase faz-se uma subdivisão dos elementos com o objetivo de obter-se apenas elementos quadriláteros. O esquema de subdivisão é mostrado na Figura 2.

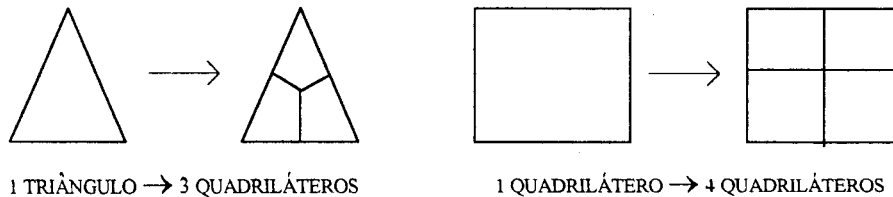


Figura 2 : Esquema de subdivisão dos elementos.

## MEDIDA DA QUALIDADE DOS ELEMENTOS E DAS MALHAS

## QUALIDADE DO ELEMENTO TRIANGULAR

A qualidade comparativa de elementos triangulares pode ser medida por um parâmetro  $\alpha$  que baseia-se na forma e tamanho do elemento [8], sendo genericamente dada por

$$\alpha = 4\sqrt{3} \frac{\Delta ABC}{(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 + (\overline{CA})^2}, \quad (1)$$

onde  $\Delta ABC$  é a área do triângulo de vértices nos pontos A, B e C, sendo que  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  são respectivamente os comprimentos de cada um dos seus três lados. A constante  $4\sqrt{3}$  é introduzida como um fator de normalização de modo que triângulos equiláteros terão um valor máximo para  $\alpha=1$ .

## QUALIDADE DO ELEMENTO QUADRILÁTERO

A medida da qualidade de um quadrilátero pode ser definida [8] genericamente por

$$\beta = \frac{\alpha_3 \cdot \alpha_4}{\alpha_1 \cdot \alpha_2}, \quad (2)$$

onde  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$  são os valores do parâmetro  $\alpha$  para os quatro triângulos que podem ser obtidos quando se seciona um quadrilátero ABCD ao longo de suas duas diagonais, conforme ilustrado na Figura 3.

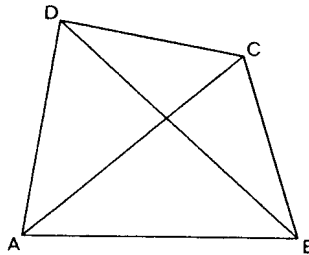


Figura 3 : Quadrilátero ABCD.

O valor de  $\beta$  deverá recair entre 0 e 1 para um quadrilátero válido (convexo). O valor máximo  $\beta=1$ , é obtido para retângulos, enquanto  $\beta=0$  é obtido para quadriláteros degenerados em triângulos, conforme ilustrado na Figura 4. Quanto maior o valor de  $\beta$ , melhor a forma do quadrilátero, logo a formação de quadriláteros é realizada preferencialmente pela remoção de diagonais que tenham maiores valores de  $\beta$ .

Outra forma de aferir a qualidade de um elemento quadrilátero pode ser feita examinando-se seus ângulos internos. Segundo Zhu et al[6], a forma de um elemento quadrilátero será adequada se todos os seus ângulos internos ficam entre os limites dados por

$$45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ. \quad (3)$$

Os mesmos autores estendem estes limites afirmando que um elemento que não satisfaça tal critério, será considerado não satisfatório se, e somente se, qualquer um de seus ângulos internos não exceder os limites dados pela expressão (4). Nesta mesma direção, Lo [8] afirma que se menos de 1% de todos os elementos em uma malha de quadriláteros não satisfazem a condição (3), a malha pode ser considerada de boa qualidade.

$$30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ. \quad (4)$$

Todos os elementos cujos ângulos não satisfaçam os critérios dados por (3) e (4) simultaneamente deverão ser identificados como elementos com forte distorção, ficando por conta do analista a decisão de considerar ou não a malha gerada como válida visto que a forma dos elementos também é afetada em boa extensão pela geometria do domínio que está sendo discretizado, e esta decisão não pode basear-se exclusivamente pelos critérios dados pelas equações (3) e (4).

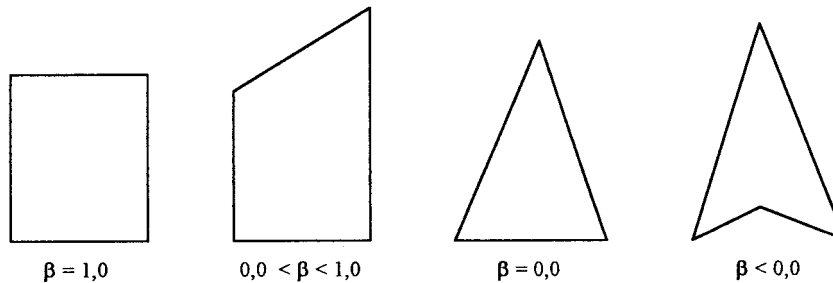


Figura 4 : Valores do parâmetro  $\beta$  para alguns quadriláteros.

#### QUALIDADE DAS MALHAS

Para estabelecer a qualidade global de uma malha foi empregada a média geométrica [9] dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$  dos triângulos e quadriláteros presentes. Assim, para as triangulações, malhas de quadriláteros e malhas mistas empregou-se os parâmetros  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  e  $\delta_m$  dados respectivamente por

$$\alpha_m = \left( \prod_{i=1}^{NT} \alpha_i \right)^{\frac{1}{NT}}, \quad (5)$$

$$\beta_m = \left( \prod_{i=1}^{NQ} \beta_i \right)^{\frac{1}{NQ}}, \quad (6)$$

$$\delta_m = \left( \beta_m^{NQ} \alpha_m^{NT} \right)^{\frac{1}{(NQ+NT)}}, \quad (7)$$

onde NT e NQ são respectivamente o número de triângulos e quadriláteros presentes na malha, e  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  medem respectivamente a qualidade de cada elemento triangular e quadrilátero presente.

### REGULARIZAÇÃO DAS MALHAS

Obtidas as malhas finais constituídas exclusivamente por quadriláteros, elas passaram por um processo denominado de regularização, que visou otimizar a qualidade dos elementos. Foram empregados dois diferentes processos de regularização.

O primeiro denominado de regularização Centroidal [10] consiste em encontrar o centroide de cada elemento conectado a um nó interior  $P_i$ . Após encontrar cada uma destas posições centroidais, a nova posição  $(x_c, y_c)$  para o nó  $P_i$  fica determinada pelas expressões

$$x_c = \left( \sum_{k=1}^M x_{ck} A_k \right) / \sum_{k=1}^M A_k, \quad (8)$$

$$y_c = \left( \sum_{k=1}^M y_{ck} A_k \right) / \sum_{k=1}^M A_k \quad (9)$$

onde  $A_k$  é a área de cada elemento que envolve o nó interior  $P_i$ , M é o número de elementos em torno do nó interior  $P_i$  e  $(x_{ck}, y_{ck})$  são as coordenadas centroidais de cada elemento que envolve o nó interior  $P_i$ , dadas por

$$x_{ck} = \left( \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i \right), \quad (10)$$

$$y_{ck} = \left( \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i \right), \quad (11)$$

onde  $(x_i, y_i)$  correspondem às coordenadas de cada nó do referido elemento quadrilátero.

O segundo processo de regularização, que denominaremos de regularização Laplaciana Modificada [6], consiste em reposicionar cada nó interior ao domínio para a posição do centroide do polígono formado pelos elementos que o envolvem, segundo as expressões

$$x_i = \frac{1}{4M} \sum_{n=1}^M (x_{nj} + x_{nl} + 2x_{nk}), \quad (12)$$

$$y_i = \frac{1}{4M} \sum_{n=1}^M (y_{nj} + y_{nl} + 2y_{nk}), \quad (13)$$

onde  $(x_i, y_i)$  são as novas coordenadas para o nó interior  $P_i$ ,  $M$  é o número de elementos que envolve o nó interior  $P_i$ , e os demais termos são as coordenadas dos nós vizinhos como mostrado na Figura 5.

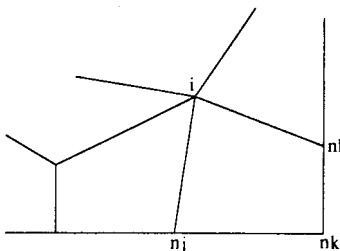


Figura 5 : Nó interior a malha e seus vizinhos.

Ambos processos de regularização foram aplicados iterativamente quatro vezes sobre cada uma das malhas finais de forma condicional, isto é, se  $\beta_i$  são os parâmetros dados por (6) para os quadriláteros que envolvem um dado nó interior, e  $\bar{\beta}_i$  os novos valores para o mesmo conjunto de quadriláteros considerando o deslocamento proposto, este somente é realizado se a condição expressa abaixo for satisfeita

$$\prod \bar{\beta}_i > \prod \beta_i. \quad (14)$$

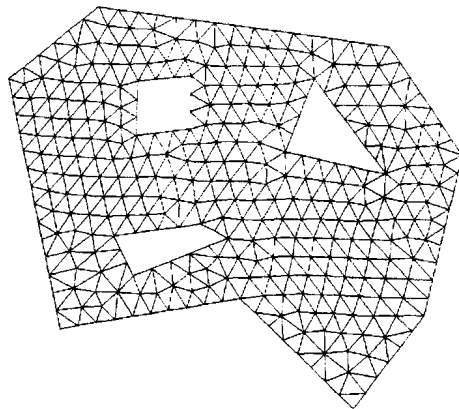
Este reposicionamento condicional impede a eventual formação de um quadrilátero inválido (degenerado a um triângulo ou côncavo)

### EXEMPLOS E RESULTADOS OBTIDOS

Foram geradas duas malhas de elementos quadriláteros. As triangulações de partida foram obtidas pelo método do Avanço de Frente [11].

Nas Figura 6 e 7 são mostradas as triangulações de partida, as malhas mistas intermediárias e as malhas finais, respectivamente, para os exemplos 1 e 2. Para ambos exemplos foi empregado um valor prescrito de  $\eta = 0,1$ , cuja escolha será discutida na seção que segue.

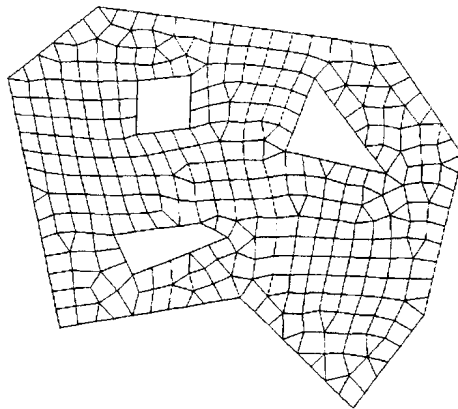
As malhas finais representadas correspondem a regularização Centroidal, aquelas relativas a regularização Laplaciana Modificada não estão representadas por serem geometricamente muito semelhantes.



(a) Triangulação Inicial.

NN = 361

NT = 608

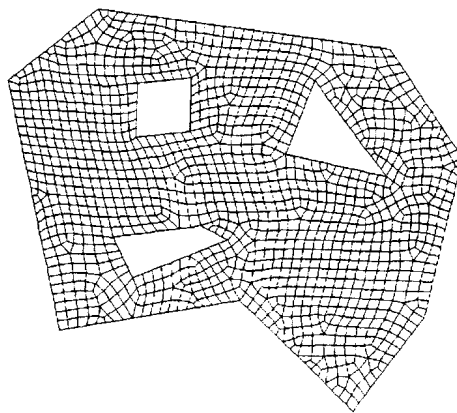


(b) Malha mista intermediária.

NN = 361

NT = 56

NQ = 276

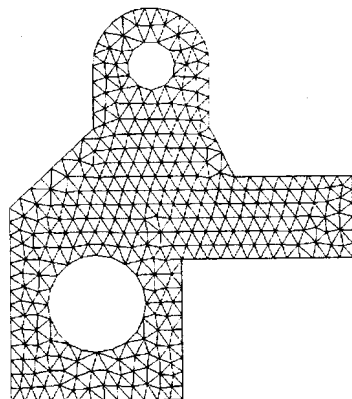


(c) Malha final de quadriláteros.

NN = 1388

NQ = 1272

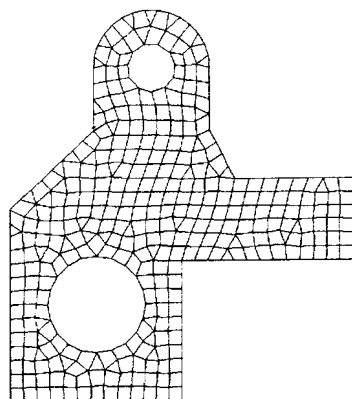
Figura 6 : Malhas do exemplo 1.



(a) Triangulação inicial.

NN = 389

NT = 650

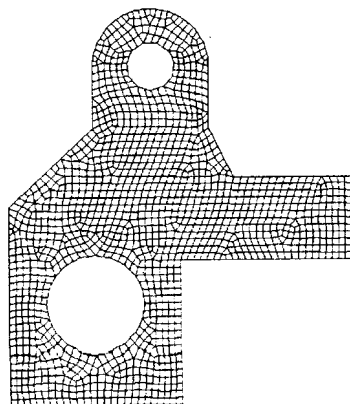


(b) Malha mista intermediária.

NN = 389

NT = 46

NQ = 302



(c) Malha final de quadriláteros.

NN = 1475

NQ = 1346

Figura 7 : Malhas do exemplo 2.



A Tabela I apresenta um sumário das características das malhas iniciais, intermediárias e finais dos dois exemplos. Nesta Tabela NN é o número de nós, NT é o número de elementos triangulares, NQ é o número de elementos quadriláteros, NE é número total de elementos, e TP é o tempo total de geração das malhas em segundos considerando a regularização Centroidal.

Tabela I : Sumário das características das malhas dos dois exemplos.

Exemplos	NN	NT	NQ	NE	TP <sup>(*)</sup>
<b>Malhas do Exemplo 1</b>					
Inicial	361	608	-	608	
Intermediária	361	56	276	332	
Final	1388	-	1272	1272	1,38
<b>Malhas do Exemplo 2</b>					
Inicial	389	650	-	650	
Intermediária	389	46	302	348	
Final	1475	-	1346	1346	1,48

(\*) em microcomputador PENTIUM 90 MHz.

A Tabela II apresenta um sumário da qualidade individual e global das malhas iniciais, intermediárias e finais dos dois exemplos para os dois processos de regularização aplicados. Nesta tabela, N1 é o número de elementos na malha final que não satisfazem a condição (3), N2 é o número de elementos na malha final que não satisfazem a condição (4),  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ ,  $\delta_m$ , foram calculados respectivamente segundo as expressões de (5) a (7).

Tabela II : Sumário da qualidade individual e global das malhas dos dois exemplos.

Exemplos	$\alpha_m$	$\delta_m$	Centroidal			Laplaciana Modificada		
			$\beta_m$	N1	N2	$\beta_m$	N1	N2
<b>Malhas do Exemplo 1</b>								
Inicial	0,947	-	-	-	-	-	-	-
Intermediária	-	0,516	-	-	-	-	-	-
Final	-	-	0,662	10	0	0,682	23	0
<b>Malhas do Exemplo 2</b>								
Inicial	0,947	-	-	-	-	-	-	-
Intermediária	-	0,569	-	-	-	-	-	-
Final	-	-	0,688	6	0	0,712	11	0

## CONCLUSÕES

Foi apresentado um algoritmo para geração de malhas não estruturadas de elementos quadriláteros a partir de triangulações. O algoritmo está baseado em conceitos puramente geométricos de retirada de diagonais e subdivisão de elementos. Para a otimização das malhas foram empregados dois métodos diferentes, o da regularização Centroidal e o da regularização Laplaciana Modificada.

Observou-se que o segundo foi capaz de otimizar malhas com maior qualidade, o que pode ser constatado comparando-se os respectivos valores para  $\beta_m$  publicados na Tabela 2. Entretanto, o primeiro processo de regularização gerou um número menor de elementos com forte grau de distorção, que pode ser

constatado quando se compara na Tabela 2 os respectivos valores de  $N_1$ .

A qualidade global das malhas foi bastante boa se considerarmos que Lee[12] afirma que para  $0,54 \leq \beta_m < 0,72$  a malha pode ser considerada de boa qualidade e, para  $\beta_m \geq 0,72$  ela será de excelente qualidade. Assim o procedimento exposto é uma alternativa rápida e eficiente para geração automática de malhas não estruturadas de elementos quadriláteros sobre domínios planos quaisquer.

Inúmeros testes mostraram que para  $0,10 \leq \eta \leq 0,20$  obtém-se malhas de melhor qualidade e um número menor de quadriláteros na malha final que não verificam a condição (3). Por outro lado, Lo[9] sugeriu que fosse adotado  $\eta = 0,37$  de modo que todos quadriláteros formados na fase de remoção de diagonais verificassem a referida condição. Entretanto, cabe salientar que o referido autor não utilizou o processo de subdivisão aqui empregado.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Shephard, M. S., *Approaches to the Automatic Generation and Control of Finite Element Meshes*, Applied Mechanics Review, Vol. 41, 1988, pp. 169-185.
- [2] Thompson, J. F. and Weatherill, N. P., *Aspects of Numerical Grid Generation : Current Science and Art*, in 11th AIAA Applied Aerodynamics Conference, 1993, pp. 1-42.
- [3] Lo, S. H., *A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domain*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, 1985, pp. 1403-1426.
- [4] Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C., *Adaptive Remeshing for Compressive Flow Computations*, Journal of Computational Physics, Vol. 72, 1987, pp. 449-466.
- [5] Sloan, S. W., *A Fast Algorithm for Generation Constrained Delaunay Triangulations*, Computers & Structures, Vol. 47, 1991, pp. 441-450.
- [6] Zhu, J. Z., Zienkiewicz, O. C., Hinton, E. and Wu, J., *A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, 1991, pp. 849-866.
- [7] Blacker, T. D. and Stephenson, M. B., *Paving: A New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, 1991, pp. 811-847.
- [8] Lo, S. H., *Generation of Gradation Meshes by the Background Grid Technique*, Computers & Structures, Vol. 50, 1994, pp. 21-32.
- [9] Lo, S. H. and Lee, C. K., *On Using Meshes of Mixed Element Types in Adaptive Finite Element Analysis*, Finite Element in Analysis and Design, Vol. 11, 1992, pp. 307-336.
- [10] Sezer, L. and Zeid, I., *Automatic Quadrilateral/Triangular Free-Form Mesh generation for Planar Regions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, 1991, pp. 1441-1483.
- [11] Alquati, E. L. G. e Groehs, A. G., *Geração Automática de Malhas Não Estruturadas de Elementos Triangulares*, Anais do XV Congresso Ibero-Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Vol. 1, 1994, p. 483-492, Belo Horizonte, Brasil.
- [12] Lee, C. K. and Lo, S. H., *A New Scheme for the Generation of a Graded Quadrilateral Mesh*, Computers & Structures, Vol. 52, 1994, pp. 847-857.