

## MODELAJE Y ANÁLISIS DINÁMICO DE SOPORTES DE EQUIPOS ROTATIVOS

Euro L. Casanova

Juan Oliveras

Departamento de Mecánica, División de Física y Matemáticas  
Universidad Simón Bolívar, Apdo. 89000 - Caracas 1081, Venezuela

### RESUMEN

El presente trabajo describe la aplicación del método de los elementos finitos en la obtención del modelo dinámico de la estructura soporte de un equipo rotativo. Al modelo obtenido se le practicó un análisis modal, obteniendo valores de frecuencias propias y modos de vibración asociados que fueron comparados con los medidos experimentalmente. Se aplicaron técnicas de reducción modal al modelo del soporte a fin de incorporarlo a un modelo de rotor-cojinetes, mediante el método de las subestructuras. El modelo global resultante (rotor-cojinetes-soportes) fue analizado modalmente, obteniéndose las frecuencias propias y modos asociados.

### ABSTRACT

The present work describes an application of the finite element method to attain the dynamic model for the specific support structure of a rotating machine. A modal analysis was performed to obtain the corresponding eigenfrequencies and associated eigenvectors of the support structure model, which were then compared with the corresponding experimental measurements. Modal reduction technics were applied to the support model in order to incorporate it to the rotor-bearing model using the substructuring method. The resulting global model (rotor-bearing-support) was analyzed by calculating the corresponding eigenvalues and eigenvectors.

### INTRODUCCIÓN

Con el fin de cumplir con las exigencias de producción, calidad y eficiencia de los procesos industriales actuales, la tendencia en las turbomáquinas y los equipos rotativos en general apunta hacia la operación a velocidades cada vez mayores y bajo condiciones más severas. Esto hace necesarias mejoras en los diseños existentes además de un conocimiento certero de la respuesta de los equipos ante las diferentes condiciones de operación y carga que se puedan presentar.

Esta tendencia hace que para el diseñador y analista de vibraciones sea indispensable disponer de un modelo matemático de los equipos, que incluya todos los efectos significativos en su desempeño desde el punto de vista dinámico.

En la actualidad es práctica común en el modelaje de una máquina rotativa, el incluir el efecto de la inercia y rigidez del eje, los efectos giroscópicos y las características dinámicas de los cojinetes; sin embargo, no es usual el tomar en cuenta los efectos de la estructura más allá de los cojinetes, es decir, de los soportes, la fundación y el suelo. Ignorar el efecto de estos componentes en algunas máquinas, pudiera no introducir un error significativo en el cálculo de las características dinámicas (e.g. cuando la inercia o rigidez de los soportes es muy grande comparada con la del rotor); pero si los soportes no son rígidos, estos tendrán un efecto significativo sobre el comportamiento dinámico del sistema, como lo demuestra Kirk y Gunter [1], y Barret *et al.* [2]. De hecho, varios investigadores han encontrado poca correlación entre sus estimados y los resultados experimentales cuando los efectos de las estructuras soportes y la fundación no son incluidos [3, 4].

Varios métodos se han formulado para tomar en cuenta el efecto de las estructuras soporte, siendo la mayoría de ellos de carácter experimental; es decir, la caracterización dinámica de la fundación es obtenida a partir de ensayos sobre la propia estructura, aplicando técnicas de análisis modal mediante funciones de respuesta frecuencial (FRF), como lo muestran Barret *et al.* [5] y Stephenson y Rouch [6]. Una vez obtenidas, estas características se introducen en el modelo de rotor-cojinetes que entonces puede ser usado para estudios del comportamiento de esa máquina específica. Como es obvio, estos métodos aunque bastante efectivos, no son adecuados para el cálculo de velocidades críticas y simulación de condiciones de operación en la etapa diseño de un equipo.

El procedimiento más utilizado por los investigadores para establecer la influencia de la flexibilidad y amortiguación de las estructuras soporte en las características de un equipo rotativo, consiste en modelar los apoyos como un sistema masa-resorte-amortiguador de un solo grado de libertad. Dicha representación, aunque tiene la ventaja de ser muy sencilla y que puede ser usada exitosamente para la predicción de la frecuencia y amplitud de vibración de la primera velocidad crítica del rotor, permite solamente tomar en cuenta el efecto de una frecuencia de resonancia de la estructura soporte, ignorando las contribuciones de las restantes, introduciendo así un error en los cálculos. Adicionalmente, hace falta realizar estimaciones de la masa, rigidez y amortiguación de la estructura soporte, lo que no siempre resulta sencillo, como lo sugiere Barret *et al.* [5].

Más recientemente, Kramer [4] representó la fundación de un equipo como una viga modelada por el método de los elementos finitos (MEF); sin embargo, los soportes y fundaciones de cierto tamaño y flexibilidad son en general demasiado complejos como para utilizar un modelo tan simplificado. Otra aproximación, propuesta por Ruhl *et al.* [7], consiste en analizar estáticamente la estructura soporte de los cojinetes mediante el MEF, obteniendo de esta forma una matriz de rigidez del soporte que al combinarla con la de los cojinetes permite calcular una rigidez "efectiva" del sistema cojinete-soporte, lo que permite relacionar los desplazamientos del subsistema fundación-suelo con los del rotor. Si bien este trabajo tiene el mérito de ser el primero en lograr un acoplamiento efectivo entre el modelo del rotor-cojinetes con el de los soportes-fundación-suelo, lo cual permitió una mayor concordancia entre las soluciones numéricas y las pruebas en campo, el procedimiento utilizado presenta ciertas limitaciones. Una de éstas lo constituye el uso de la llamada rigidez "efectiva" del sistema cojinete-soporte, debido a que se obtiene en base a un análisis estático y en consecuencia no se toman en cuenta las características dinámicas de la estructura. Otra de las limitaciones señalada por Earles *et al.* [8], esta en considerar la fundación como un cuerpo rígido y que su geometría está restringida a formas circulares o rectangulares.

En este sentido, Earles *et al.* [8] proponen un procedimiento analítico que permite establecer el modelo global de una máquina rotativa, utilizando el MEF para modelar el rotor, los cojinetes y la fundación, mientras que el suelo es modelado por el método de los elementos de frontera. Este trabajo establece claramente los efectos dinámicos de la estructura más allá de los cojinetes en el desempeño de una máquina. Sin embargo, en el procedimiento usado se modelaron las estructuras soporte como elementos sin masa e infinitamente rígidos, basados en la suposición de que los efectos inerciales de estas estructuras eran pequeños comparados con los de la fundación, y que el movimiento relativo entre soportes y fundación es despreciable. Estos criterios no aplican para todas las máquinas rotativas, puesto que existen casos en los que la flexibilidad de los soportes es suficientemente alta como para producir efectos dinámicos relevantes en el modelo global.

A continuación se presenta la aplicación del MEF en la obtención del modelo dinámico de una estructura soporte flexible de un equipo rotativo específico, así como su acoplamiento con el modelo del rotor-cojinetes de la máquina, con el fin de calcular frecuencias propias. Para ello se utilizó como herramienta de cálculo el programa ANSYS Rev. 5.0 para PC de Swanson Analysis Systems, Inc.

## SISTEMA MATERIAL ANALIZADO

### Descripción del sistema Rotor - Cojinetes - Soportes

El sistema material estudiado corresponde a un modelo experimental de rotor, cojinetes y estructura soporte que fue diseñado y construido en la Universidad de Virginia, EEUU, el cual es actualmente empleado para estudios de rotodinámica en la citada institución. Estos estudios van desde cálculos de velocidades críticas para el rotor, hasta análisis de estabilidad para diferentes tipos de cojinetes bajo diferentes regímenes de operación.

El rotor está formado por un eje sólido de acero de 21 pulgadas de largo y 3/4 de pulgada de diámetro, sobre el cual están instalados tres discos equiespaciados entre sí, de acero de 1 pulgada de espesor y 6 pulgadas de diámetro. Dicho rotor está soportado en los extremos por cojinetes hidrodinámicos idénticos, de zapatas pivotantes (tilting pad) con un factor de precarga  $m = 0.652705$ , una holgura de  $C_b = 0.000796$  y un factor de "offset"  $\alpha = 0.5$ . El rotor es accionado por un motor eléctrico mediante una transmisión por correas y un acoplamiento flexible. Los cojinetes se encuentran alojados en estructuras soporte idénticas ancladas a una base de concreto rígida y masiva.

La estructura de los soportes de cojinete está formada por un pedestal de aluminio y un porta-cojinetes de fundición de hierro. El pedestal está conformado por dos placas horizontales tramadas por una placa y dos tubos en posición vertical. La placa horizontal inferior va anclada mediante pernos al bloque de concreto que sirve como base o fundación, mientras que sobre la placa superior se sujeta el porta-cojinetes también mediante pernos. Todo el conjunto luce como se ilustra en la figura 1.

### Modelaje de la estructura soporte por el MEF

La placa inferior del pedestal de aluminio, está vinculada rigidamente a la fundación considerada masiva y rígida, por lo que se excluyó del modelo ya que su aporte dinámico al sistema es prácticamente nulo. Al eliminar esta lámina, el modelo se vincula a tierra mediante el área transversal inferior de la placa vertical y los dos tubos. Este vínculo se modeló como un empotramiento.

Vista la forma en que el pedestal se vincula a tierra, se esperaba obtener modos de vibración torsional respecto al eje vertical del soporte y de flexión respecto a ejes horizontales; es decir, movimientos espaciales. Por lo tanto, se utilizó un elemento de mallado tipo "ladrillo" de 8 nodos, con 3 grados de libertad (GL) por nodo correspondientes a las traslaciones en el espacio cartesiano. Este tipo de elemento es usado comúnmente para el modelaje tridimensional de estructuras sólidas. El mallado resultante se puede observar en la figura 2.

La ecuación de movimiento que resulta del proceso de discretización tiene la siguiente forma:

$$[M_s^e]\{\ddot{q}_s^e\} + [K_s^e]\{q_s^e\} = \{F_s^e\} \quad (1)$$

Es importante notar que en el modelo se discretizó tanto el pedestal de aluminio como el porta-cojinetes. Sin embargo, si se observa cuidadosamente la discretización se apreciará que el porta-cojinetes está modelado como un paralelepípedo macizo; sin tomar en cuenta todos los detalles constructivos del mismo. A pesar de ello, los resultados obtenidos fueron satisfactorios.

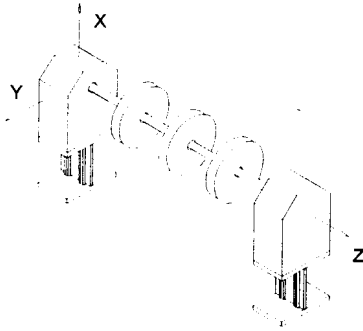


Figura 1: Sistema analizado

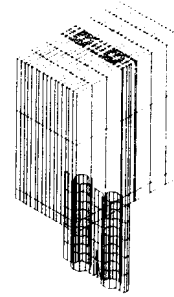


Figura 2: Modelo del soporte por el MEF

### Modelaje del rotor por el MEF

Para el modelaje del rotor se usó la formulación propuesta por Ruhl y Booker [9], según la cual sólo se trabaja con los GL correspondientes a los desplazamientos laterales y las rotaciones en estas direcciones (no se toman en cuenta ni la tensión-compresión ni la torsión). El eje del rotor se modeló como una serie de elementos uniaxiales tipo "viga", de 2 nodos con 4 GL cada uno, utilizando la formulación consistente para el cálculo de la matriz de inercia. La ecuación que representa el comportamiento dinámico de cada elemento es:

$$[M_r^e]\{\ddot{q}_r^e\} + [G_r^e]\{\dot{q}_r^e\} + [K_r^e]\{q_r^e\} = \{F_r^e\} \quad (2)$$

En esta ecuación la matriz de  $[G_r^e]$  representa los efectos de acoplamiento giroscópico que se producen en el eje.

Los discos se modelaron mediante elementos puntuales de masa, de un solo nodo con 4 GL. La ecuación matricial es:

$$[M_d^e]\{\ddot{q}_d^e\} + [G_d^e]\{\dot{q}_d^e\} = \{F_d^e\} \quad (3)$$

La representación de la matriz de masa y de acoplamiento giroscópico tiene la forma convencional [9,10], sin embargo el ANSYS Rev. 5.0 no tiene un elemento específico para representar el acoplamiento giroscópico en forma puntual, por lo que tuvo que usarse un elemento de geometría indefinida, de 2 nodos con 4 GL por nodo (en el Apéndice 1 se incluye la matriz de giroscópica para este elemento).

$$[M_d^e] = \begin{bmatrix} Mx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & My & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ix & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Iy \end{bmatrix} \quad [G_d^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega Lz \\ 0 & 0 & -\Omega Lz & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

### Modelaje de los cojinetes por el MEF

Para fines prácticos, los cojinetes hidrodinámicos son linealizados suponiendo pequeños desplazamientos del eje al rededor de su posición de equilibrio. Se modelan normalmente usando 4 coeficientes de rigidez y 4 de amortiguación, y en el caso de cojinetes hidrodinámicos de zapatas pivotantes, estos coeficientes son llamados flotantes [11]. La representación de un cojinete por el MEF se hace en términos de matrices de amortiguación y rigidez linealizadas. Estas matrices, a diferencia de las que comunmente se obtienen para resortes o amortiguadores, presentan términos de acoplamiento cruzado entre los desplazamientos y fuerzas en direcciones ortogonales además de usualmente resultar no simétricas. Para la representación de dichas matrices se utilizó un elemento arbitrario de geometría indefinida, cuya respuesta elástica y cinemática puede ser controlada por el usuario a conveniencia, mediante la especificación de los coeficientes de inercia, amortiguación y rigidez apropiados. Este elemento tiene 2 nodos con 2 GL por nodo, (ver Apéndice 2). Uno de los nodos está fijo al rotor en el punto de unión y el otro se fija al soporte en la posición adecuada. La ecuación dinámica matricial resulta:

$$[C_c^e]\{\dot{q}_c^e\} + [K_c^e]\{q_c^e\} = \{F_c^e\} \quad (5)$$

### Ensamblaje del sistema rotor-cojinetes-soportes

Con el fin de ensamblar el modelo de las estructuras soporte al modelo de rotor-cojinetes, se realizó un proceso de subestructuración en las mismas. El método de las subestructuras es un procedimiento que condensa grupos de elementos en un único elemento representado como una matriz, pudiendo entonces ser utilizado como cualquier otro elemento finito en un análisis estático o dinámico. Las principales ventajas que tiene el uso de este método son la reducción del tiempo de computación en problemas con un elevado número de GL y que permite la solución de problemas de cierta envergadura por medio de recursos computacionales limitados. Este método está basado en la técnica de reducción modal desarrollada por Guyan [12].

Al aplicar el método, el número de GL activos de la estructura soporte se redujo de 3576 a 24. De estos 24 grados de libertad 3 corresponden a los desplazamientos del punto donde van montados los cojinetes, mientras que los restantes fueron elegidos automáticamente por el ANSYS basados en el procedimiento descrito por Henshell y Ong [13].

Finalmente, al acoplar de manera adecuada las ecuaciones (1), (2), (3) y (5), se plantea una ecuación matricial que describe el comportamiento dinámico de todo el sistema:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (6)$$

## RESULTADOS

### Análisis modal del modelo de la estructura soporte

El modelo de la estructura soporte se analizó modalmente obteniendo las 8 primeras frecuencias propias y los modos de vibración correspondientes. Para ello, se usó el método de iteración por subespacios [14, 15]. Los resultados se muestran en la tabla I, donde se comparan con los medidos en la Universidad de Virginia para la misma estructura.

Tabla I: Frecuencias propias de la estructura soporte

	1º Frec (Hz)	Err (%)	2º Frec (Hz)	Err (%)	1º Modo	2º Modo
Experimental	24.2	--	94.3	--	Flexión	Torsión
MEF	23.5	-2.9	92.2	-2.2	Flexión	Torsión

En la figura 3 se ilustran las formas modales correspondientes a las 3 primeras frecuencias propias de la estructura soporte.

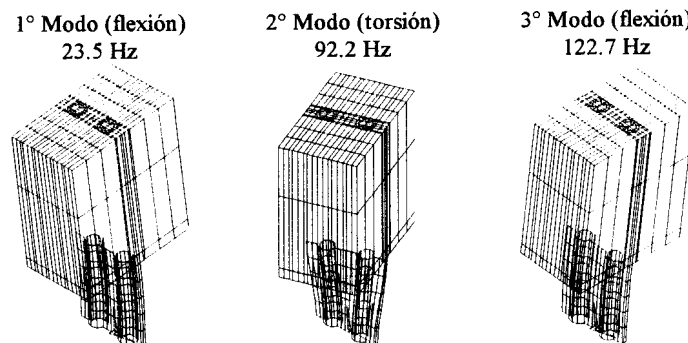


Figura 3: Formas modales del soporte

Con el fin de verificar que la técnica de subestructuración incluía las características dinámicas de la estructura soporte con suficiente precisión, se realizó un cálculo de frecuencias propias con el modelo de 3576 GL activos y el mismo cálculo con el modelo reducido modalmente a 24 GL activos (los mismos GL que se conservarían en la subestructuración). En la tabla II se comparan estos valores.

Tabla II: Frecuencias propias modelo de 3576 GL y modelo de 24 GL.

Modelo	1º Frec. (Hz)	2º Frec. (Hz)	3º Frec. (Hz)	4º Frec. (Hz)	5º Frec. (Hz)	6º Frec. (Hz)
3576 GL	23.5	92.2	122.7	282.7	803.9	976.7
24 GL	23.5	92.2	122.7	283.0	810.1	982.7
Err (%)	0.0	0.0	0.0	0.1	0.8	0.6

### Análisis Modal del modelo rotor-cojinetes-estructuras soporte

Los modelos del rotor-cojinetes y del rotor-cojinetes-soportes se analizaron modalmente, calculando así las frecuencias propias y los modos de vibración asociados. Debido a que ambos modelos presentan términos de amortiguación, no pudo usarse el método iteración por subespacios y en su lugar se utilizó el algoritmo de Lanczos [14]. Las frecuencias propias para los diferentes modelos se presentan en las tablas III y IV.

Tabla III: Frecuencias propias del modelo rotor-cojinetes

Velocidad	2000 (rpm)	4000 (rpm)	6000 (rpm)	8000 (rpm)
1° frec. (Hz)	49.22	48.30	47.42	46.52
2° frec. (Hz)	51.11	52.08	53.09	54.09
3° frec. (Hz)	192.71	188.70	184.59	180.52
4° frec. (Hz)	200.26	203.78	207.12	210.45
5° frec. (Hz)	423.88	417.57	410.90	404.04
6° frec. (Hz)	435.52	440.87	445.88	450.66

Tabla IV: Frecuencias propias del modelo global (rotor-cojinetes-soportes)

Velocidad	2000 (rpm)	4000 (rpm)	6000 (rpm)	8000 (rpm)
1° frec. (Hz)	19.22	19.22	19.22	19.79
2° frec. (Hz)	22.39	22.39	22.38	23.16
3° frec. (Hz)	50.00	49.69	49.23	48.58
4° frec. (Hz)	60.29	60.64	61.22	62.24
5° frec. (Hz)	194.39	191.07	187.22	182.52
6° frec. (Hz)	205.37	208.18	211.23	213.74

### CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvo el modelo de una estructura soporte de máquina rotativa y de un sistema rotor-cojinetes mediante la aplicación del MEF. El sistema global fue acoplado mediante la aplicación del método de la subestructuras.

Las frecuencias propias del modelo del soporte fueron calculadas y comparadas con las obtenidas experimentalmente encontrando gran concordancia entre unas y otras.

Se aplicaron técnicas de reducción modal al modelo del soporte pudiendo disminuir el número de GL activos de 3576 a 24, sin afectar significativamente el comportamiento dinámico del mismo, en el rango de frecuencias de interés.

Los valores de frecuencias propias varían considerablemente entre el modelo del rotor-cojinetes y el modelo global (rotor-cojinetes-soportes) lo cual pone de manifiesto la importancia que tienen las estructuras soporte en las características dinámicas del sistema analizado.

## APÉNDICES

1- Matriz de acoplamiento giroscópico de un disco.

$$[G_d^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z \Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_z \Omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z \Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_z \Omega & 0 \end{bmatrix}$$

2- Matriz de rigidez y amortiguación de los cojinetes.

$$[K_c^e] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & -K_{xx} & -K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} & -K_{yx} & -K_{yy} \\ -K_{xx} & -K_{xy} & K_{xx} & K_{xy} \\ -K_{yx} & -K_{yy} & K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \quad [C_c^e] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & -C_{xx} & -C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} & -C_{yx} & -C_{yy} \\ -C_{xx} & -C_{xy} & C_{xx} & C_{xy} \\ -C_{yx} & -C_{yy} & C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix}$$

## REFERENCIAS

- [1] Kirk, R. G. y Gunter, E. J., 1972, *The Effect of Support Flexibility and Damping on the Synchronous Response of a Single-Mass Flexible Rotor*, Journal of Engineering for Industry, vol. 94, pp. 221-232.
- [2] Barret, L. E., Gunter, E. J. y Allaire, P. E., 1978, *Optimum Bearing and Support Damping for Unbalance Response and Stability of Rotating Machinery*, Journal of Engineering for Power, vol. 100, pp. 89-94.
- [3] Power, R. B. y Wood, R. E., 1984, *2000 HP Motor Support Structure Vibration Sensitivity: Test, Finite Element Analysis, and Suggested Strategies for Prevention*, Journal of Vibration, Acoustic, Stress, and Reliability in Design, vol 106, pp. 113 -121.
- [4] Kramer, E., 1985, *Models for Computation of Turbomachine Vibrations*, American Society of Mechanical Engineers Paper 85-DET-138.
- [5] Barret, L. E., Nicholas, J. C. y Dhar, D., 1986, *The Dynamic Analysis of Rotor-Bearing Systems Using Experimental Bearing Support Compliance Data*, Department of Mechanical and Aerospace Engineering University of Virginia, Report No. UVA/643092/MAE86/341.
- [6] Stephenson, R. W. y Rouch, K. E., 1992, *Generating Matrices of the Foundation Structure of a Rotor System from Test Data.*, Journal of Sound and Vibration, vol. 154(3) pp. 467-484.
- [7] Ruhl, R. L., Conry, T. F. y Steger, R. L., 1980, *Unbalanced Response of a Large Rotor-Pedestal-Foundation System Using an Elastic Half-Space Soil Model*, Journal of Mechanical Design, vol. 102, pp. 311-319.
- [8] Earles, L. L., Palazzolo, A. B., Lee, C-K, y Gerhold, C. H., 1988, *Hybrid Finite-Boundary Element Simulation of Rotating Machinery Supported on Flexible Foundation and Soil*, Journal of Vibration, Acoustic, Stress, and Reliability in Design, vol. 110, pp. 300-306.



- [9] **Ruhl, R. L. y Booker, J. F.**, 1972, *A Finite Element Model For Distributed Parameter Turborotor Systems*, *ASME Journal of Engineering for Industry*, vol. 94, pp. 126-132.
- [10] **Rouch, K. E. y Kao, J. S.**, 1980, *Dynamic Reduction in Rotor Dynamics by the Finite Element Method*, *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 102, pp. 360-368.
- [11] **Parsell, J. K., Allaire, P. E. y Barret, L. E.**, 1980, *Nonsynchronous Dynamical Coefficients of a Tilting Pad Bearing*, Department of Mechanical and Aerospace Engineering University of Virginia, Report No. UVA/464761/MAES6/181.
- [12] **Guyan, R. J.**, 1965, *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*, *AIAA Journal*, vol. 3, Nº 2.
- [13] **Heusell, K. D. y Ong, J. H.**, 1975, *Automatic Masters for Eigenvalue Economization*, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 3, pp. 375-383.
- [14] **Kohneke, P.** (editor), 1992, *ANSYS User's Manual for Revision 5.0*, Volume IV Theory, Swanson Analysis Systems Inc., Houston, Pa.
- [15] **Bathe, K. J.**, 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

