Mecánica Computacional Vol. XVI
compilado por G. Etse y B. Luccioni
Tucumán, Septiembre de 1996

CONSIDERACION DEL EFECTO DE CORTE EN LA DINAMICA DE VIGAS ABIERTAS DE PARED DELGADA

V.H.CORTINEZ[1] y R.E.ROSSI[2]

1. Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos , Universidad Tecnológica Nacional (FRBB) , 11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca , y Departamento de Ingeniería , Universidad Nacional del Sur ,8000, Bahía Blanca , Argentina
2. Departamento de Ingeniería , Universidad Nacional del Sur ,8000, Bahía Blanca , Argentina

RESUMEN. En este trabajo se presenta una extensión de la teoría de Vlasov para el análisis dinámico de vigas de sección abierta de pared delgada considerando la flexibilidad de corte , las inercias de rotación y alabeo y la existencia de una distribución arbitraria de tensiones iniciales. La formulación se basa en el principio de Reissner y permite obtener en forma unificada las ecuaciones de movimiento así como las relaciones constitutivas adecuadas.

ABSTRACT. This paper deals with an extension of the Vlasov's theory for the dynamic analysis of thin walled open beams taking into account shear flexibility, rotatory and warping inertias and the existence of an arbitrary state of initial stress. The present formulation which is based on Reissner principle allows the unified determination of the motion equations and the constitutive relations.

1.-INTRODUCCION

El comportamiento estático y dinámico de vigas de sección abierta de pared delgada (VAPD) es de gran interés debido a que tales miembros son usados frecuentemente en la construcción metálica por requerimientos de ahorro de peso.

Estos elementos están sujetos a considerables tensiones longitudinales producidas por alabeo torsional no uniforme. Este hecho fue señalado primeramente por Timoshenko [1] para la estática de vigas I.

Varios desarrollos posteriores [2,3] convergen en la teoría de Vlasov [4] que modela el comportamiento estático y dinámico de VAPD con secciones transversales de forma arbitraria.

Este modelo ha sido utilizado en diversos problemas dinámicos como así también de inestabilidad elástica [5-9].

La teoría de Vlasov no considera la flexibilidad de corte de la viga. Este efecto conjuntamente con la inercia por alabeo torsional y la inercia rotatoria debe ser considerado en vigas cortas o cuando es necesario determinar frecuencias asociadas con modos superiores.

En el caso de vigas planas es bien conocida la teoría de Timoshenko la cual considera los efectos de corte e inercia rotatoria [9].

Los trabajos teniendo en cuenta los mencionados efectos para la dinámica de VAPD son más bien escasos. Bishop y sus colaboradores [10-11] desarrollaron um modelo que tiene en cuenta los efectos de corte e inercia rotatoria asociados con los desplazamientos laterales de acuerdo a la teoría de Timoshenko para vigas planas. Este modelo fue posteriormente implementado en una formulación de elementos finitos [12-13]. Un interesante enfoque fue desarrollado recientemente por Ambrosini ,Riera y Danesi [14] el cual considera la inercia de alabeo además de los efectos de corte e inercia rotatoria asociados con el movimiento lateral.

No obstante estos modelos no consideran la flexibilidad de corte debida al alabeo torsional .Este efecto fue tenido en cuenta primeramente en el análisis dinámico de vigas I,U y V[15-17]. Para el caso de secciones arbitrarias existen , según el conocimiento de los autores , solamente tres trabajos que lo tienen en cuenta [18-20].

Recientemente [21] se ha desarrollado un modelo que considera la flexibilidad de corte asociada con los movimientos lateral y torsional , los efectos de inercia rotatoria y de alabeo y además la influencia de tensiones normales iniciales. Este modelo ha sido implementado computacionalmente mediante el método

método de elementos finitos. Una simplificación implícita en esta teoría consiste en la hipótesis aproximada de la coincidencia entre los ejes principales de flexión y de corte.
En este trabajo se desarrolla una formulación generalizada que evita aquella hipótesis , y que por otra parte tiene en cuenta la influencia de una distribución arbitraria de tensiones iniciales.
El presente modelo que está basado en el principio de Reissner produce en forma unificada las ecuaciones dinámicas de VAPD como así también la expresión de las ecuaciones constitutivas para las resultantes de tensión.

2.-FORMULACION

Se considera la viga de sección abierta de pared delgada mostrada en la Figura 1. Se efectúan las siguientes suposiciones : a)el material es perfectamente elástico y homogéneo ; b) la sección transversal es infinitamente rígida en su plano ; c) las tensiones y deformaciones en la viga son determinadas mediante la superposición de un estado membranal (uniforme a través del espesor) y el estado de torsión pura de Saint Venant [1].
A los efectos de formular la presente teoría se usa un sistema de referencia global (x,y,z) con origen en el centro de corte donde y y z son paralelos a los ejes principales centroidales de la sección. También se utiliza un sistema auxiliar (x,s,n) como se observa en la Figura 1.
Para el elemento estructural analizado el funcional de Reissner [22] puede ser escrito en la forma

$$J_R = \int_V \left[W(e_{i,j}) + U(u_i) + V(u_i)\right] dV - \int_V \sigma_{i,j}\left[e_{i,j} - \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\right] dV$$

$$- \int_{S\sigma} \overline{T_i}\; u_i\, dA - \int_{S u} \sigma_{i,j}\, v_j\left(u_i - \overline{u_i}\right) dA \qquad ;\ i,j = x,y,z \qquad (1)$$

donde $W(e_{i,j})$ energía de deformación elástica , $\sigma_{i,j}$: tensor de tensiones membranales , $e_{i,j}$: tensor de deformaciones (pequeñas) membranales , U: energía de deformación torsional de Saint Venant , V: energía potencial de las cargas externas , incluyendo a las fuerzas inerciales , u_i : vector de desplazamiento , $\overline{T}_i$: vector de tensión externo en la superficie externa S_σ , $\overline{u}_i$: vector de corrimientos impuestos sobre la superficie externa S_u , v_i: versor direccional de la superficie S_u . Ha sido empleada la convención de Einstein.
Debe observarse que el funcional (1) ha sido expresado en la forma de Reissner para las tensiones y deformaciones membranales , mientras que la energía de deformación debida a torsión pura (acción como placa) ha sido escrita separadamente. Esto no lleva a ninguna contradicción puesto que , como es sabido , las tensiones de corte de Saint Venant se distribuyen linealmente a través del espesor con valor nulo en la superficie media , mientras que las tensiones membranales se consideran constantes a través del espesor , luego la correspondiente energía de deformación recíproca debe ser nula.
La dinámica de la estructura puede ser formulada de acuerdo con el principio de Reissner mediante

$$\delta\ J_R\left[e_{i,j}\ ,u_i\ ,\sigma_{i,j}\right] = 0 \qquad (2)$$

donde $e_{i,j}$, u_i y $\sigma_{i,j}$ varían independientemente. Operando según (2) se llega a

$$\int_V \sigma_{i,j}\,\delta\overline{e_{i,j}}\; dV + \delta U(u_i) + \delta V(u_i) - \int_V \left(e_{i,j} - \overline{e_{i,j}}\right)\delta\sigma_{i,j}\; dV - \int_{S\sigma} \overline{T_i}\;\delta u_i\; dA \qquad (3)$$

donde se ha definido

$$\overline{e_{i,j}} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (4)$$

La expresión (3) está sujeta a las restricciones

$$\sigma_{i,j} = \frac{\partial W}{\partial\, e_{i,j}} \qquad ; \qquad u_i = \overline{u_i} \quad \text{en } S_u \qquad (5\text{ a,b})$$

La expresión (5a) se verifica ya que en el presente trabajo se consideran materiales Hookeanos, mientras que la expresión (5b) exige que se verifiquen las condiciones de contorno geométricas.
Considerando que $\sigma_{i,j}$ y u_i varían independientemente pueden escribirse a partir de (3) las ecuaciones variacionales

$$\int_V \sigma_{i,j}\, \delta\overline{e_{i,j}}\; dV + \delta U(u_i) + \delta V - \int_{S\sigma} T_i\; \delta u_i\; dA = 0 \qquad (6a)$$

$$\int_V \left(e_{i,j} - \overline{e_{i,j}}\right)\, \delta\sigma_{i,j}\; dV = 0 \qquad (6b)$$

2.1.-Hipótesis Cinemática
Siguiendo la referencia [21] se suponen las siguientes expresiones para los desplazamientos de la superficie media

$$u_x = -\theta_Z(x)\,\overline{y}\,(s) - \theta_Y\,(x)\,\overline{z}(s) + \theta(x)\;\omega(s) + \zeta(x) \quad ;$$

$$u_Y = \eta(x) - \phi(x)\; z(s) \qquad ; \qquad u_Z = \xi(x) + \phi\,(x) y(s) \qquad (7a,b,c)$$

con

$$\overline{y} = y - y_0 \qquad ; \qquad \overline{z} = z - z_0 \qquad (8a,b)$$

donde η y ξ son los desplazamientos transversales del centro de corte, ϕ es el ángulo de torsión, θ_Y y θ_Z denotan rotaciones alrededor de los ejes principales centroidales $\bar{y}$ y $\bar{z}$ respectivamente, ω denota la coordenada sectorial de acuerdo con Vlasov, θ es una función que describe la variación de alabeo a lo largo de la viga, s es la coordenada curvilínea mostrada en la Figura 1, ζ es el desplazamiento axial del centroide, y_0 y z_0 corresponden a las coordenadas del centroide medidas desde el sistema con origen en el centro de corte.
Los desplazamientos transversales dados por (7b) y (7 c) corresponden a la hipótesis de indeformabilidad de la sección tranversal en su plano. El desplazamiento longitudinal dado por (7a) es más general que su correspondiente según la teoría clásica de Vlasov y coincide con éste si se imponen las restricciones

$$\theta_Z = \frac{\partial\,\eta}{\partial\,x}\;;\;\theta_Y = \frac{\partial\,\xi}{\partial\,x}\;;\;\theta = \frac{\partial\,\phi}{\partial\,x}$$

(9a,b,c)
De todas maneras en este trabajo las condiciones (9) **no son utilizadas**.
Es conveniente determinar el corrimiento tangencial v_s de un punto de la línea media con coordenada s. Como puede observarse en la Figura 1, este puede obtenerse mediante

$$v_s = u_y\cos(\alpha) + u_Z\cos(\beta) = \eta\cos(\alpha) + \xi\cos(\beta) + \phi\; r \qquad (10)$$

donde $$r = [-z\cos(\alpha) + y\cos(\beta)] \qquad (11)$$

2.2.- Deformaciones "Geométricas"
A partir de las expresiones (7) y (10) puede obtenerse el tensor de deformaciones membranales "geométricas" definido mediante (4). Sus componentes no nulas vienen dadas por

$$\overline{e_{XX}} = \frac{\partial\,u_x}{\partial\,x} = -\theta_Z^{(1)}\;\bar{y} - \theta_Y^{(1)}\,\bar{z} + \theta^{(1)}\omega + \zeta^{(1)} \qquad (12)$$

donde $(.)^{(n)} = d^n(.)/dx^n$ (n=1,2,3....) (de aquí en más será empleada esta notación); y

$$\overline{e_{XS}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\eta^{(1)} - \theta_Z\right)\cos(\alpha) + \left(\xi^{(1)} - \theta_Y\right)\mathrm{sen}(\alpha) + \left(\phi^{(1)} - \theta\right)r\right] \quad (13)$$

donde se han utilizado los resultados [1]

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = \frac{dy}{ds} = \cos(\alpha) \ ; \ \frac{d\bar{z}}{ds} = \frac{dz}{ds} = \cos(\beta) \ ; \ \frac{d\omega}{ds} = -r \qquad (14\ \mathrm{a,b,c})$$

Debe notarse que la componente de deformación geométrica (13) ha sido definida de acuerdo con el sistema auxiliar (x,s,n).

2.3 .- Trabajo Virtual Interno en Función de los Esfuerzos

El trabajo virtual interno dado por el primer término de (6a) es un invariante , luego puede ser escrito como

$$\int_V \left(\sigma_{XX}\ \delta\overline{e_{XX}} + 2\ \sigma_{XS}\ \delta\overline{e_{XS}}\right) dA\ dx \qquad (15)$$

Considerando (12) y (13) esta última expresión puede escribirse en la forma

$$\int_V \begin{bmatrix} -M_Z\ \delta\theta_Z^{(1)} - M_Y\ \delta\theta_Y^{(1)} + B\ \delta\theta^{(1)} + N\ \delta\zeta^{(1)} + \\ Q_Y\ \delta\left(\eta^{(1)} - \theta_Z\right) + Q_Z\ \delta\left(\xi^{(1)} - \theta_Y\right) + T_W\ \delta\left(\phi^{(1)} - \theta\right) \end{bmatrix} dx \qquad (16)$$

donde se han usado las definiciones de los esfuerzos

$$M_Z = \int_A \sigma_{XX}\ \bar{y}\ dA \ ; \ M_Y = \int_A \sigma_{XX}\ \bar{z}\ dA \ ; \ B = \int_A \sigma_{XX}\ \omega\ dA \ ; \ N = \int_A \sigma_{XX}\ dA$$

$$Q_Y = \int_A \sigma_{XS}\ \cos(\alpha)\ dA \ ; \ Q_Z = \int_A \sigma_{XS}\ \cos(\beta) dA \ ; \ T_W = \int_A \sigma_{XS}\ r\ dA \qquad (17\ \mathrm{a\text{-}g})$$

siendo M_Z :momento flector con respecto a $\bar{z}$, M_Y : momento flector con respecto a $\bar{y}$, B: bimomento , N: esfuerzo normal , Q_Y : esfuerzo de corte según y, Q_Z : esfuerzo de corte según z ,y T_W : momento torsor "por alabeo".

2.4.- Trabajo Virtual Torsional de Saint Venant

La expresión del trabajo virtual de las tensiones de Saint Venant viene dado por [21]

$$\delta U = \int T_{SV}\ \delta\phi^{(1)}\ dx \qquad (18)$$

donde el momento torsor de Saint Venant se expresa como

$$T_{SV} = GJ\ \phi^{(1)} \qquad (19)$$

siendo G el módulo de elasticidad transversal y J la constante de torsión. Este momento es generado por tensiones de corte dirigidas paralelamente a la línea media de la sección y con una magnitud proporcional a ésta. Sus valores máximos [1] se expresan como

$$\left(\sigma_{XS}\right)_{S.V.} = \pm G\ e\ \phi^{(1)} \qquad (20)$$

2.5.- Trabajo Virtual Externo

El trabajo virtual realizado por las acciones externas es

$$\delta V = -\int_V F_i \, \delta u_i \, dA \, dx \qquad (21)$$

Las fuerzas de volumen F_i se expresan como

$$F_i = f_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad ; i{=}x,y,z \qquad (22)$$

donde f_i son fuerzas de volumen causadas por agentes externos y ρ es la densidad del material . El segundo término de (22) representa las fuerzas de inercia.
Reemplazando (7) en (22) y luego en (21) se obtiene

$$\int \left(m_Z \, \delta\theta_Z + m_Y \, \delta\theta_Y - b \, \delta\theta - m_T \, \delta\phi - q_X \, \delta\zeta - q_Y \, \delta\eta - q_Z \, \delta\xi \right) dx$$

$$+ \int \rho \begin{bmatrix} I_Z \, \partial_2(\theta_Z) \, \delta\theta_Z + I_Y \partial_2(\theta_Y) \, \delta\theta_Y + C_W \partial_2(\theta) \, \delta\theta + A \, \partial_2(\zeta) \, \delta\zeta \\ A\partial_2\left(\eta - z_0 \, \phi\right) \delta\eta + A\partial_2\left(\xi + y_0 \, \phi\right) \delta\xi + \partial_2\left(-A \, z_0 \, \eta + A \, y_0 \, \xi + I_S \, \phi\right) \delta\phi \end{bmatrix} dx \qquad (23)$$

donde

$$\partial_2(*) = \frac{\partial^2(*)}{\partial t^2} \; ; \; m_Z = \int_A f_X \, \bar{y} \, dA \; ; \; m_Y = \int_A f_X \, \bar{z} \, dA \; ; \; b = \int_A f_X \, \omega \, dA ; \; q_X = \int_A f_X \, dA$$

$$q_Y = \int_A f_Y \, dA \; ; \; q_Z = \int_A f_Z \, dA \; ; \; m_X = \int_A \left(f_Z y - f_Y \, z \right) dA$$

$$I_Z = \int_A \bar{y}^2 \, dA \; ; \; I_Y = \int_A \bar{z}^2 \, dA \; ; \; C_W = \int_A \omega^2 dA \; ; \; I_S = \int_A \left(y^2 + z^2 \right) dA \qquad (24a\text{-}l)$$

Los parámetros definidos en (24) tienen el siguiente significado, m_z ,m_Y , m_X denotan momentos por unidad de longitud con respecto a $\bar{z}$, $\bar{y}$ y x respectivamente , q_X ,q_Y , q_Z son fuerzas por unidad de longitud según las direcciones x,y,z respectivamente , I_Z , I_Y y I_S son los momentos de segundo orden de la sección transversal con respecto a los ejes principales centroidales $\bar{z}$, $\bar{y}$ y al centro de corte SC , y C_W es la constante de alabeo.
Si bien solo se ha considerado la acción de fuerzas externas de volumen pueden fácilmente ser incluidas en (24) las contribuciones debidas a cargas aplicadas sobre la superficie lateral.

2.6.- Hipótesis de Tensiones y Ecuaciones Constitutivas en Función de los Esfuerzos
Se supone de acuerdo con la teoría de Vlasov que las componentes no nulas del tensor de tensiones membranales son σ_X y σ_{XS} . Para la tensión normal longitudinal se propone la siguiente expresión

$$\sigma_X = E\overline{e_{XX}} = E\left(-\theta_Z^{(1)}\bar{y} - \theta_Y^{(1)}\bar{z} + \theta^{(1)}\omega + \zeta^{(1)} \right) \qquad (25)$$

Por otra parte se supone que la tensión membranal de corte se expresa en la forma

$$\sigma_{XS} = \frac{T_W \, \lambda_W(s)}{eC_W} - \frac{Q_Y \, \lambda_Z(s)}{eI_Z} - \frac{Q_Z \, \lambda_Y(s)}{eI_Y} \qquad (26)$$

donde se han definido los momentos de primer orden

$$\lambda_W(s) = \int_0^s \omega \, e \, ds \; ; \; \lambda_Z(s) = \int_0^s (y - y_0) \, e \, ds \; ; \; \lambda_Y(s) = \int_0^s (z - z_0) \, e \, ds \qquad (27\,a\text{-}c)$$

La sustitución de (25) en las expresiones (17 a~d) permite obtener las siguientes relaciones constitutivas para el esfuerzo normal, los momentos flectores y el bimomento.

$$N = EA\zeta^{(1)}\ ;\ M_Z = -EI_Z\,\theta_Z^{(1)}\ ;\ M_Y = -EI_Y\,\theta_Y^{(1)}\ ;\ B = EC_W\,\theta^{(1)} \qquad (28\ a\text{~}d)$$

Debe notarse que la tensión de corte dada por (26) verifica idénticamente las expresiones (17 e~g). Esto es así ya que la expresión (26) puede determinarse a partir de una ecuación diferencial de equilibrio para un elemento de pared conjuntamente con las expresiones (25) y (28).
Las relaciones constitutivas para T_W, Q_Y y Q_Z deben ser tales que verifiquen la ecuación variacional de compatibilidad (6b). Consecuentemente, si se reemplaza (12),(13) (25) y (26) en (6b) se llega, luego de operar variacionalmente y efectuar algunas integraciones, al sistema

$$\begin{Bmatrix} \left(\phi^{(1)}-\theta\right) \\ \left(\eta^{(1)}-\theta_Z\right) \\ \left(\xi^{(1)}-\theta_Y\right) \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} T_W \\ Q_Y \\ Q_Z \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} T_W \\ Q_Y \\ Q_Z \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} \left(\phi^{(1)}-\theta\right) \\ \left(\eta^{(1)}-\theta_Z\right) \\ \left(\xi^{(1)}-\theta_Y\right) \end{Bmatrix} \qquad (29\ a,b)$$

donde [A] es una matriz simétrica cuyas componentes vienen dadas por

$$A_{1,1} = \frac{1}{GC_W^2}\int_0^m \frac{\lambda_W^2}{e}ds\ ;\ A_{1,2} = \frac{-1}{GI_Z\,C_W}\int_0^m \frac{\lambda_W\,\lambda_Z}{e}ds\ ;\ A_{1,3} = \frac{-1}{GI_Y\,C_W}\int_0^m \frac{\lambda_W\,\lambda_Y}{e}ds$$

$$A_{2,2} = \frac{1}{GI_Z^2}\int_0^m \frac{\lambda_Z^2}{e}ds\ ;\ A_{2,3} = \frac{1}{GI_Z\,I_Y}\int_0^m \frac{\lambda_Z\,\lambda_Y}{e}ds\ ;\ A_{3,3} = \frac{1}{GI_Y^2}\int_0^m \frac{\lambda_Y^2}{e}ds \qquad (30\ a\text{~}f)$$

Esta misma ecuación constitutiva ha sido obtenida mediante una formulación totalmente diferente en la Ref. [20]. Por otra parte para el caso de barras sin torsión, fueron obtenidas [23,24] relaciones constitutivas equivalentes a las (29) si en estas últimas se toma $\phi=\theta=0$.En la Ref.[21] los autores han usado una versión simplificada de (29) la cual considera solo los elementos diagonales de [A]. Este último enfoque parece más conveniente por su sencillez y está parcialmente justificado de acuerdo con los ejemplos analizados en [23-24]. De todas formas es necesario un análisis más detallado de esta cuestión para esclarecer definitivamente que influencia tienen los términos fuera de la diagonal en [A] sobre la dinámica del sistema estructural.

3.- ECUACION DE TRABAJOS VIRTUALES CONSIDERANDO EL EFECTO DE TENSIONES INICIALES

El uso de las relaciones constitutivas (28) y (29 b) verifica idénticamente la ecuación variacional (6b). Entonces el problema finalmente se halla gobernado por la ecuación de trabajos virtuales (6a). De todas maneras si existe un estado de tensiones iniciales $\sigma^0_{I,J}$ esta ecuación debe ser extendida de la siguiente manera

$$\int_V \sigma_{i,j}\,\delta\overline{e_{i,j}}\,dV + \delta U(u_i) + \delta V - \int_{S\sigma} T_i\,\delta u_i\,dA + \int_V \sigma^0_{i,j}\,\delta\psi_{i,j}\,dV = 0 \qquad (31)$$

donde los primeros tres términos corresponden a la ecuación (6a), mientras que el último término representa el trabajo realizado por las tensiones iniciales sobre las variaciones virtuales de las componentes no lineales del tensor de deformaciones $\psi_{i,j}$.
Las componentes de $\psi_{i,j}$ pueden definirse en términos de los desplazamientos como

$$\psi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial i} \; \frac{\partial u_k}{\partial j} \right) \quad ; \quad i,j,k = x,y,z \tag{32}$$

La expresión (31) debe interpretarse en forma incremental .En el contexto de una formulación Lagrangiana actualizada , e_{ij} ,ψ_{ij} son las componentes lineales y no lineales respectivamente del tensor incremental de Green-Lagrange, σ^0_{ij} son las tensiones de Cauchy en la configuración inicial y σ_{ij} las tensiones incrementales y obviamente las fuerzas externas y de volumen así como los desplazamientos u_i son incrementales.

La ecuación (31) puede escribirse convenientemente efectuando los siguientes pasos :a) Sustituir las expresiones (7) en (32) y luego en el último término de (31) ,b) Despreciar términos de orden superior , y c) hacer uso de (16) ,(18) y (23) para transformar el resto de los términos de (31). De esta manera se obtiene la ecuación de trabajos virtuales para una viga abierta de pared delgada como

$$\begin{aligned}
&\int\left\{ \left[-M_Z\, \delta\theta_Z^{(1)} - Q_Y\, \delta\theta_Z + \rho I_Z\, \partial_2(\theta_Z)\, \delta\theta_Z + m_Z \delta\theta_Z \right] \right\} dx \\
&+ \int\left[-M_Y\, \delta\theta_Y^{(1)} - Q_Z\, \delta\theta_Y + \rho\, I_Y\, \partial_2(\theta_Y)\, \delta\theta_Y + m_Y\, \delta\theta_Y \right] dx \\
&+ \int\left[B\, \delta\theta^{(1)} - T_W\, \delta\theta + \rho\, \partial_2(\theta)\, \delta\theta - b\delta\theta \right] dx + \int\left[N\, \delta\zeta^{(1)} + \rho\, A\, \partial_2(\varsigma) - q_X\, \delta\zeta \right] dx \\
&+ \int\left[Q_Y\, \delta\eta^{(1)} + \rho\, A\, \partial_2\left(\eta - z_0\, \phi\right) \delta\eta - q_Y\, \delta\eta \right] dx + \int\left[Q_Z\, \delta\xi^{(1)} + \rho\, A\, \partial_2\left(\xi + y_0\, \phi\right) \delta\xi - q_Z\, \delta\xi \right] dx \\
&+ \int\left[\left(T_W + T_{SV}\right) \delta\phi^{(1)} + \rho\, \partial_2\left(-Az_0\, \eta + Ay_0\, \xi + I_S\, \phi\right) \delta\phi \right] dx \\
&+ \int \frac{N^0}{2}\, \delta\left[\left(\xi^{(1)}\right)^2 + \left(\eta^{(1)}\right)^2 + \frac{I_S}{A}\left(\phi^{(1)}\right)^2 + 2y_0\left(\phi^{(1)}\xi^{(1)}\right) - 2z_0\left(\eta^{(1)}\phi^{(1)}\right) \right] dx \\
&+ \int \frac{\overset{0}{M}_Z}{2}\, \delta\left[\beta_Z\left(\phi^{(1)}\right)^2 + 2\phi^{(1)}\xi^{(1)} \right] dx + \int \frac{\overset{0}{M}_Y}{2}\, \delta\left[\beta_Y\left(\phi^{(1)}\right)^2 - 2\phi^{(1)}\eta^{(1)} \right] dx \\
&+ \int \frac{\overset{0}{B}}{2} \beta_W \delta\, \phi^{(1)}\, dx + \int \overset{0}{M}_X\, \delta\left[\alpha\, \theta_Z \theta_Y^{(1)} + (1+\alpha)\theta_Y\, \theta_Z^{(1)} \right] dx \\
&+ \int \overset{0}{Q}_Y\, \delta\left(-\zeta^{(1)}\, \theta_Z + \phi\, \xi^{(1)} + y_0\, \phi\, \phi^{(1)} \right) dx + \int Q_Z^0\, \delta\left[-\zeta^{(1)}\theta_Y - \phi\, \eta^{(1)} + z_0\, \phi\, \phi^{(1)} \right] dx \\
&+ \left[-\delta\theta_Z\, \overline{M}_Z - \delta\theta_Y\, \overline{M}_Y + \delta\theta\, \overline{B} + \delta\zeta\, \overline{N} + \delta\eta\, \overline{Q}_Y + \delta\xi\, \overline{Q}_Z + \delta\phi\, \overline{M}_X \right]_{X=0}^{X=L} = 0
\end{aligned} \tag{33}$$

donde los esfuerzos incrementales N, M_Y , M_Z , B , T_{SV} , Q_Y y Q_Z se expresan en función de los desplazamientos generalizados (ζ, η, ξ , θ_Z , θ_Y , θ , ϕ) mediante las relaciones constitutivas dadas por (19) ,(28) y (29 b); N^0, M^0_Y , M^0_Z , B^0 , M^0_X , Q^0_Y y Q^0_Z son los esfuerzos iniciales , y N, M_Y , M_Z , B , T_{SV} , Q_Y y Q_Z denotan los esfuerzos aplicados en los extremos. Por otra parte han sido definidos los siguientes parámetros

$$\alpha = \left(\int_A \sigma^0_{XY} \bar{z}\, dA \right) \frac{1}{\overset{0}{M}_X} \quad ; \quad \beta_Z = \int_A \bar{y}\left(y^2 + z^2\right) dA \quad ;$$

$$\beta_Y = \int_A \bar{z}\left(y^2+z^2\right)\, dA \;;\quad \beta_W = \int_A \omega\left(y^2+z^2\right)\, dA \qquad (34\ a\text{-}d)$$

Los desplazamientos generalizados deben verificar las condiciones de contorno geométricas , de acuerdo con (5).

4.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO

La aplicación del cálculo variacional a la expresión (33) lleva al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la dinámica de VAPD

$$-N^{(1)} + \rho\ A\ \partial_2(\zeta) + \underline{\left(Q_Y^0\ \theta_Z + Q_Z^0\ \theta_Y\right)^{(1)}} = q_X \qquad (35\ a)$$

$$M_Z^{(1)} - Q_Y + \rho\ I_Z\ \partial_2(\theta_Z) \underline{- Q_Y^0\ \zeta^{(1)} + \alpha\ M_X^0 \theta_Y{}^{(1)} - \left[(1+\alpha) M_X^0\ \theta_Y\right]^{(1)}} = m_Z \qquad (35b)$$

$$-Q_Y{}^{(1)} + \rho\ A\ \partial_2(\eta - z_0\phi) \underline{- \left(N^0 \eta^{\ (1)}\right)^{(1)} + \left[\left(M_Y^0 + N^0 z_0\right)\ \phi^{\ (1)}\right]^{(1)} + \left(Q_Z^0\ \phi\right)^{(1)}} = q_Y \qquad (35c)$$

$$M_Y^{(1)} - Q_Z + \rho\ I_Y\ \partial_2(\theta_Y) \underline{- Q_Z^0\ \zeta^{(1)} + (1+\alpha) M_X^0 \theta_Z{}^{(1)} - \left(\alpha\ M_X^0\ \theta_Z\right)^{(1)}} = m_Y \qquad (35\ d)$$

$$-Q_Z{}^{(1)} + \rho\ A\ \partial_2(\xi + y_0\phi) \underline{- \left(N^0 \xi^{\ (1)}\right)^{(1)} - \left[\left(M_Z^0 + N^0 y_0\right)\ \phi^{\ (1)}\right]^{(1)} - \left(Q_Y^0\ \phi\right)^{(1)}} = q_Z \qquad (35\ e)$$

$$-B^{(1)} - T_W + \rho\ C_W\ \partial_2(\theta) = b \qquad (35\ f)$$

$$\begin{aligned}
&-\left(T_W + T_{SV}\right)^{(1)} + \rho\ A\ \partial_2\left(\frac{I_S}{A}\ \phi\ - z_0\eta + y_0\xi\right) + \underline{\left[N^0\left(-\frac{I_S}{A}\phi^{\ (1)} - y_0\xi^{\ (1)} + z_0\eta^{\ (1)}\right)\right]^{(1)}} \\
&\underline{-\left[\left(M_Z^0\beta_Z + M_Y^0\beta_Y + B^0\beta_W\right)\phi^{\ (1)}\right]^{(1)} - \left(\ M_Z^0\xi^{\ (1)}\ \right)^{(1)} + \left(\ M_Y^0\eta^{\ (1)}\ \right)^{(1)}} \\
&\underline{+ Q_Y^0\left(\ y_0\phi^{\ (1)} + \xi^{(1)}\ \right) - \left(Q_Y^0 y_0\phi\right)^{(1)} + Q_Z^0\left(\ z_0\phi^{\ (1)} - \eta^{(1)}\ \right) - \left(Q_Z^0 z_0\phi\right)^{(1)}} = m_X \qquad (35\ g)
\end{aligned}$$

con las condiciones de contorno (en x=0 , L)

$$-M_Z + \underline{(1+\alpha) M_X^0} + \overline{M}_Z = 0 \quad \text{o} \quad \delta\theta_Z = 0 \quad ; -M_Y + \underline{\alpha M_X^0} + \overline{M}_Y = 0 \quad \text{o} \quad \delta\theta_Y = 0 \quad ;$$

$$N \underline{- Q_Y^0\ \theta_Z - Q_Z^0\ \theta_Y} - \overline{N} = 0 \quad \text{o} \quad \delta\zeta = 0 \quad ; \quad B - \overline{B} = 0 \quad \text{o} \quad \delta\theta = 0 \quad ;$$

$$Q_Y + \underline{N^0\eta^{(1)} + \left(M_Y^0 - N^0 z_0\right)\phi^{(1)} - Q_Z^0\phi} - \overline{Q}_Y = 0 \quad \text{o} \quad \delta\eta = 0 \quad ;$$

$$Q_Z + \underline{N^0\xi^{(1)} + \left(M_Z^0 + N^0 y_0\right)\phi^{(1)} + Q_Y^0\phi} - \overline{Q}_Z = 0 \quad \text{o} \quad \delta\xi = 0 \quad ;$$

$$\begin{aligned}
&M_X + \underline{N^0\left(\frac{I_S}{A}\phi^{(1)} + y_0\xi^{(1)} - z_0\eta^{(1)}\right) + M_Z^0\left(\beta_Z\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\right) + M_Y^0\left(\beta_Y\ \phi^{(1)} - \eta^{(1)}\right) + B^0\beta_W\phi^{(1)}} \\
&\underline{+\left(Q_Y^0 y_0 + Q_Z^0\ z_0\right)\phi} - \overline{M}_X = 0 \quad (\text{siendo } M_X = T_{SV} + T_W) \quad \text{o} \quad \delta\phi = 0 \qquad (36\ a\text{-}g)
\end{aligned}$$

Si se expresan los esfuerzos de acuerdo con las relaciones constitutivas (19), (27) y (29 b) ,éste resulta un sistema acoplado de 7 ecuaciones diferenciales cuyas incógnitas son los desplazamientos generalizados. Han sido subrayados los términos correspondientes al efecto del estado inicial de tensiones. Debe observarse que estas ecuaciones resultan válidas aproximadamente para vigas de sección transversal variable con tal de tomar los parámetros característicos de la sección como funciones de x. Estas ecuaciones constituyen uno de los sistemas más generales para el análisis dinámico lineal de VAPD, teniendo como casos particulares a los modelos correspondientes a las referencias [4,14,15,21] , complementando además en varios aspectos a las teorías propuestas en las referencias [18-20].

5.- CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo ha sido desarrollada una teoría general para el análisis dinámico de vigas no uniformes de sección abierta de pared delgada considerando efectos de corte, inercias rotatoria y de alabeo, y la influencia de una distribución arbitraria de tensiones iniciales. El presente enfoque ,basado en el principio de Reissner , ha permitido la derivación unificada de las ecuaciones de movimiento como así también de las relaciones constitutivas en función de los esfuerzos .

El sistema gobernante dado por (35)-(36) es de utilidad para la obtención de soluciones analíticas para ciertos casos particulares como también para la solución computacional mediante métodos basados en la formulación diferencial tales como el de cuadratura diferencial , el método de Ambrosini,Riera y Danesi [14] , etc. Por otra parte ha sido determinada una ecuación general de trabajos virtuales (ec.33) la cual puede ser empleada como base para una formulación de elementos finitos. Una simplificación del presente modelo consiste en despreciar los términos fuera de la diagonal de la matriz [A] en la expresión constitutiva (29). De todas maneras es necesario efectuar un análisis numérico a fin de dilucidar cual es el error cometido de esta manera . La presente teoría puede también ser utilizada para estudios de inestbilidad elástica.

AGRADECIMIENTOS : El presente estudio ha sido auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional.

REFERENCIAS

1.- S.P.Timoshenko 1945 Journal of the Franklin Institute 239 (3,4,5) : 201-219,248-268 , 343-361. Theory of Bending , Torsion and Buckling of Thin Walled Members of Open Cross Section.

2.- F.Bleich 1952 Buckling Strenght of Metal Structures Mc Graw Hill Book ,Inc. , New York , Toronto , London.

3.- J.N.Goodier 1941 Bulletin No 27 of Cornell University , Engineering Experiment Station. The Buckling of a Compressed Bar by Torsion and Flexure.

4.- V. Vlasov 1961 Thin Walled Elastic Beams . Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation.

5.- T.M.Roberts 1987 Journal of Engineering Mechanics (ASCE) 113 (10) , 1584- 1593 . Natural Frequencies of Thin Walled Beams of Open Cross Section.

6.- C.Mei 1970 International Journal of Mechanical Science 12, 883-891. Coupled Vibrations of Thin Walled Beams using the Finite Element Method.

7.- C.H.Yoo y J.P.Feherenbach 1981 Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE) 107(2) , 339-354. Natural Frequencies of Curved Girders.

8.- M.Eisenberger y R.Cohen 1995 Journal of Engineering Mechanics (ASCE) 121(2) , 244-254 . Flexural-Torsional Buckling of Variable and Open Cross Section Members.

9.- S.P.Timoshenko y D.H.Young 1955 Vibration Problems in Engineering , 3o edición , D. Van Nostrad Company Inc. , Princeton , N.J.

10.- R.E.D.Bishop y W.G.Price 1977 Journal of Sound and Vibration 50 (4) , 469-477. Coupled Bending and Twisting of a Timoshenko Beam.

11.- R.E.D.Bishop , W.G.Price y Z. Xi-Cheng 1985 Journal of Sound and Vibration 99 (2) , 155-167. A Note on the Dynamical Behaviour of Uniform Beams having Open Channel Section.

12.- S. Dubigeon y C.B.Kim 1982 Journal of Sound and Vibration 81(2) , 255-270 . A Finite Element for the Study of Coupled Bending- Prevented Torsion of a Straight Beam.

13.- A. Krishnan y V.K.Singh 1991 Journal of Sound and Vibration 149 (2) , 297-310. Some Studies on Vibration of Thin Walled Open Section Beams.

14.- R.D. Ambrosini , J.D.Riera y R.F.Danesi 1995 International Journal for Numerical Methods in Engineering 38 , 2867-2885 . Dynamic Analysis of Thin Walled and Variable Open Section Beams with Shear Flexibility.
15.- H.R. Aggarwall y E.T.Cranch 1967 Journal of Applied Mechanics , June , 337-343. A Theory of Torsional and Coupled Bending Torsional Waves in Thin-Walled Open Section Beams.
16.- S.Ali Hassan y A.D.S.Barr 1974 Journal of Sound and Vibration 32, 3-23. Linear Vibrations of Thin Walled Beams of Equal Angle Section .
17.- N.G.Stephen y P.J.Wang 1986 Journal of Sound and Vibration 109(1), 51-64. Web Flexibility and I-Beam Torsional Oscillation.
18.- P.Muller 1983 Journal of Sound and Vibration 87 (1) , 115-141 . Torsional -Flexural Waves in Thin Walled Open Beams
19.- A.S.Gendy y A.F.Saleeb 1994 Journal of Sound and Vibration 174 (2) , 261-274. Vibration Analysis of Coupled Extensional / Flexural / Torsional Modes of Curved Beams with Arbitrary Thin -Walled Sections.
20.- D.Capuani, M.Savoia y F.Laudiero 1992 Earthquake Engineering and Structural Dynamics ,21,859-879. A Generalization of the Timoshenko Beam Model for Coupled Vibration Analysis of Thin Walled Beams.
21.- V.H.Cortínez y R.E.Rossi 1996 Reporte Interno , Departamento de Ingeniería , Universidad Nacional del Sur , Bahía Blanca, Argentina. Dynamics of Thin Walled Open Beams. (propuesto para publicación).
22.- Y.C.Fung 1968 Foundations of Solid Mechanics . Prentice Hall of India Limited. New Delhi.
23.- W.D.Pilkey , U. Scharamm y W.Kang 1995 Proceedings of the IV Pan American Congress of Applied Mechanics (PACAM IV) , Buenos Aires , Argentina, Vol.I ,311-316. Consideration of Shear in Beams of Arbitrary Cross Section.
24.- G.Romano , L.Rosati y G. Ferro 1992 International Journal for Numerical Methods in Engineering , 35, 283-306. Shear Deformability of Thin Walled Beams with Arbitrary Cross Sections.

FIGURA 1. GEOMETRIA DEL ELEMENTO

S.C.:Centro de Corte
O:Centroide
η , ξ :Desplazamientos Laterales en SC
ϕ: Rotación Torsional
ζ : Desplazamiento Longitudinal en O