



APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA LA OBTENCIÓN DE VELOCIDADES CRÍTICAS EN PROBLEMAS DE FLUTTER

L. J. Pigliacampo y A. T. Brewer

Departamento de Estructuras. F.C.E.F. y N.

Universidad Nacional de Córdoba.

Casilla de Correo 916. (5000) Córdoba-Argentina

RESUMEN

En este trabajo se utiliza la transformada de Fourier para resolver problemas de flutter. Su aplicación se muestra en modelos bidimensionales obtenidos por reducción de sistemas reales. La condición de inestabilidad puede ser detectada mediante el análisis de las amplitudes, frecuencias y amortiguamientos de la oscilación en función de la velocidad de la corriente de aire. La solución obtenida utilizando la transformada se compara con las obtenidas por otros métodos en la solución de un ejemplo obtenido de la literatura.

ABSTRACT

The Fourier transform is employed in this work to solve flutter problems. Real structural systems are reduced to two-dimensional problems to illustrate the procedure. The instability condition can be identified by means of an analysis of amplitudes, frequencies and damping of the vibration as a function of the velocity of the air stream. Comparisons between the present solution and other techniques in the literature are presented for one example.

Introducción

Flutter es la oscilación inestable de un cuerpo que se encuentra suspendido en una corriente de aire causada por la interacción de fuerzas aerodinámicas y estructurales que actúan sobre dicho cuerpo. El movimiento vincula tanto oscilaciones flexionales como torsionales que se vuelven inestables cuando las fuerzas aerodinámicas (que dependen de la velocidad del aire y de la frecuencia de oscilación) producen una modificación de las amplitudes de los desplazamientos y sus frecuencias características que llevan al sistema a absorber energía de la corriente fluida a la vez que todos los grados de libertad oscilan con la misma frecuencia.

El planteo del problema presentan dos aspectos básicos: uno *mecánico* y otro *aerodinámico*. El primero permite plantear las ecuaciones de equilibrio del sistema, en el cual las fuerzas aerodinámicas son consideradas como fuerzas externas. El segundo determina estas fuerzas de acuerdo a algún modelo y teoría determinados.

Este fenómeno se encuentra presente fundamentalmente en el campo de las estructuras aeronáuticas y aeroespaciales. Pero a su vez, es también importante en otros campos del diseño estructural como por ejemplo en ciertos tipos de estructuras civiles capaces de desarrollar fuerzas aerodinámicas; puede mencionarse en este aspecto p.e. el caso de largos puentes colgantes [1, 2].

Los métodos de solución que permiten determinar la condición crítica de inestabilidad, caracterizada a través de la velocidad crítica de la corriente de aire V_F (velocidad de flutter) y la frecuencia de oscilación del sistema en dicha condición ω_F (frecuencia de flutter), pueden agruparse, según su

modo de operación, en dos tipos: los que analizan los coeficientes de las ecuaciones de movimiento y los que resuelven dichas ecuaciones. Los primeros [3] se basan en la búsqueda de una solución no nula del sistema que requiere que el determinante de la matriz de coeficientes se anule, lo que lleva a resolver un problema de autovalores clásico. Los segundos investigan la estabilidad de la solución en un rango de velocidades para poder determinar si en él existe o no inestabilidad en el sistema. A este grupo pertenecen los métodos que integran las ecuaciones en el tiempo [4] o los que, como en este trabajo, trabajan en el dominio de la frecuencia: el procedimiento consiste en analizar en la frecuencia la respuesta del sistema oscilando libremente luego de haber sido apartado de la posición de equilibrio. El análisis se realiza para velocidades creciente de la corriente de aire. La condición de inestabilidad se detecta al analizar la evolución de los picos máximos de las funciones de transferencia (FT) de cada grado de libertad (GL) y las frecuencias correspondientes a dichos picos con el incremento de la velocidad.

Se presenta un ejemplo de aplicación por medio del cual se valida la posibilidad de emplear el análisis en frecuencia comparando el resultado obtenido con el que brinda la solución de las ecuaciones en el tiempo y el análisis de autovalores.

Las fuerzas aerodinámicas utilizadas han sido obtenidas por Smilg y Wasserman [5] a partir de una generalización de la Teoría de Placas de Theodorsen [6].

Análisis Teórico

En la Fig. 1 se muestra el modelo utilizado. Las coordenadas que describen el movimiento del sistema oscilando en una corriente de aire de velocidad v son: el desplazamiento flexional del eje elástico $h(x)$, el giro del elemento completo respecto del eje elástico $\alpha(x)$ y el giro del alerón respecto del eje de charnela $\beta(x)$.

Ecuaciones de Movimiento en el Dominio del Tiempo

Para obtener las ecuaciones de movimiento se emplean las ecuaciones de Lagrange en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_r \quad (1)$$

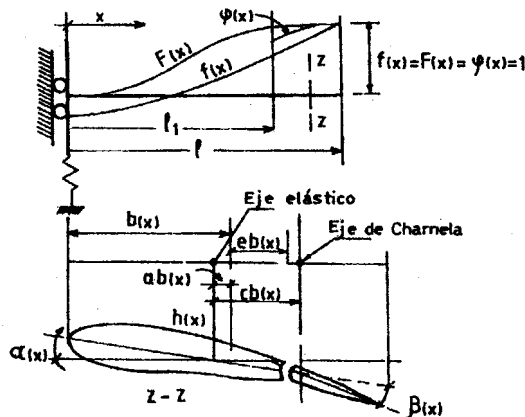


Figura 1 - Modelo empleado

Energía Cinética

La energía cinética del sistema se expresa como

$$T = \frac{1}{2}M \dot{h}^2 + \frac{1}{2}I_\alpha \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_\beta \dot{\beta}^2 + S_\beta \dot{h}\dot{\beta} + S_\alpha \dot{h}\dot{\alpha} + P_{\alpha\beta} \dot{\alpha}\dot{\beta} \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} M &= \int_0^l m(x)[f(x)]^2 dx & S_\alpha &= \int_0^l S_\alpha(x)f(x)F(x)dx \\ I_\alpha &= \int_0^l I_\alpha(x)[F(x)]^2 dx & S_\beta &= \int_{l_1}^l S_\beta(x)f(x)\varphi(x)dx \\ I_\beta &= \int_{l_1}^l I_\beta(x)[\varphi(x)]^2 dx & P_{\alpha\beta} &= \int_{l_1}^l \{S_\beta(x)[c(x) - a(x)]b(x) + I_\beta(x)\}F(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores pueden considerarse como los parámetros efectivos mecánicos de masa que representan al sistema tridimensional luego de haber utilizado los primeros modos de deformación como base para reducirlo [3].

Energía Potencial

La expresión de la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}K_h h^2 + \frac{1}{2}K_\alpha \alpha^2 + \frac{1}{2}K_\beta \beta^2 \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} K_h &= \int_0^l EI(x) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [f(x)] \right\}^2 dx \\ K_\alpha &= \int_0^l [GJ(x)]_\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [F(x)] \right\}^2 dx \\ K_\beta &= \int_{l_1}^l [GJ(x)]_\beta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(x)] \right\}^2 dx \end{aligned}$$

Función de Disipación

Se emplea la función de disipación de Rayleigh

$$D = \frac{1}{2}C_h \dot{h}^2 + \frac{1}{2}C_\alpha \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}C_\beta \dot{\beta}^2 \quad (4)$$

Fuerzas Aerodinámicas

Las fuerzas aerodinámicas asociadas a las coordenadas generalizadas del sistema oscilando alrededor de la posición de equilibrio en cada estación x a lo largo de la semienvigadura (ver Fig. 1) son:

$$\{Q_r\} = \begin{bmatrix} Q_h \\ Q_\alpha \\ Q_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^l L'(x)f(x)dx \\ \int_0^l M'(x)F(x)dx \\ \int_{l_1}^l T'(x)\varphi(x)dx \end{bmatrix} = -\{[M]\ddot{\mathbf{q}} + [C]\dot{\mathbf{q}} + [K]\mathbf{q}\}_Q \quad (5)$$

donde $\mathbf{q}^T(t) = [h(t) \ \alpha(t) \ \beta(t)]$ es el vector de los desplazamientos. Como se observa, el vector de fuerzas puede reescribirse utilizando tres submatrices $[M]_Q$, $[C]_Q$ y $[K]_Q$ que son funciones de la velocidad v , la frecuencia ω y la geometría del sistema, [7].

Obtención de las Ecuaciones de Movimiento

Si las expresiones (2), (3), (4) y (5) son llevadas a (1) se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento del sistema en el dominio del tiempo:

$$\{[M] + [M]_Q\} \ddot{\mathbf{q}} + \{[C] + [C]_Q\} \dot{\mathbf{q}} + \{[K] + [K]_Q\} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6)$$

donde

$$[M] = \begin{bmatrix} M & S_\alpha & S_\beta \\ S_\alpha & I_\alpha & [(c-a)bS_\beta + I_\beta] \\ S_\beta & [(c-a)bS_\beta + I_\beta] & I_\beta \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_h & 0 & 0 \\ 0 & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & C_\beta \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & K_\beta \end{bmatrix}$$

son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema. Las matrices con subíndice Q provienen de las acciones aerodinámicas.

Aplicación de la Transformada de Fourier para la Determinación de Velocidad Críticas

Sin entrar en detalles [7, 8] digamos que a la ec. (6) en el dominio del tiempo, le corresponde una ecuación en el dominio de la frecuencia que se escribe como

$$\{-\omega^2\{[M] + [M]_Q\} + i\omega\{[C] + [C]_Q\} + \{[K] + [K]_Q\}\} \mathbf{q}(\omega) = \mathbf{0} \quad (7)$$

en la que $\mathbf{q}(t)$ y $\mathbf{q}(\omega)$ están vinculadas por la transformada de Fourier $\mathbf{q}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}(t) e^{-i\omega t} dt$. El amortiguamiento lineal viscoso se reemplaza por el histerético o estructural en la ec. (7) haciendo la sustitución $i\omega[C] \rightarrow i\mathbf{g}^T[K]$ donde $\mathbf{g}^T = [g_h \ g_\alpha \ g_\beta]$ es el vector de los coeficientes de amortiguamiento de cada GL, los cuales deben adoptarse en correspondencia a la modelización que se desee realizar. De este modo, las fuerzas disipativas resultan proporcionales a las de restitución elástica y en fase con la velocidad. El sistema de ecuaciones de movimiento en el dominio de la frecuencia adopta la forma final

$$\{-\omega^2\{[M] + [M]_Q\} + i\{\omega[C]_Q + \mathbf{g}^T[K]\} + \{[K] + [K]_Q\}\} \mathbf{q}(\omega) = [A'(\omega)]\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{0} \quad (8)$$

De modo que puede obtenerse información del comportamiento oscilatorio del sistema en la frecuencia si se obtiene la matriz de transferencia $[H(\omega)]$ resolviendo

$$[A'(\omega)][H(\omega)] = [I] \quad (9)$$

donde $[I]$ es la matriz identidad. El elemento $H_{ij}(\omega)$ de la matriz de transferencia es la transformada de la respuesta $h_{ij}(t)$ que se obtiene en el GL i cuando a la estructura se le aplica un impulso unitario en el GL j . Es decir, se obtiene en la frecuencia el comportamiento del sistema vibrando libremente luego de que ha sido apartado de su condición de equilibrio por medio de una condición inicial de desplazamiento nulo y velocidad distinta de cero.

Para poder analizar la estabilidad del sistema será necesario analizar el comportamiento de las FT de los distintos GL del sistema a medida que aumenta la velocidad de la corriente de aire. En realidad, no resulta necesario obtener la matriz de transferencia completa, ya que analizando sólo alguna de las FT correspondiente a alguno de los GL que se excite suficientemente puede obtenerse la información necesaria para poder detectar si el sistema presenta inestabilidad para algún valor de la velocidad v . En la práctica, al operar computacionalmente, la obtención de la matriz de

transferencia completa no representa un aumento significativo del tiempo de cálculo y brinda mayor seguridad en el control de la estabilidad del sistema.

Para poder analizar numéricamente la estabilidad del sistema a partir de su respuesta en la frecuencia se propone el siguiente:

Algoritmo de Cálculo

- 1. Definir un intervalo de velocidades y determinar un Δv .
- 2. Adoptar un valor máximo de frecuencia y un $\Delta \omega$.
- 3. Para cada una de las velocidades definidas en 1. obtener la matriz de transferencia resolviendo

$$[A'(v)][H(\omega)] = [I]$$

para todos los valores de frecuencias adoptadas en 2.

- 4. Analizar el comportamiento de las FT de cada GL con el aumento de velocidad. Controlando la evolución de las amplitudes máximas de las FT y la frecuencia correspondiente a dicha amplitud máxima con la variación de v .
- 5. Analizar el comportamiento de las amplitudes máximas de las FT y sus frecuencias con la velocidad. Si las amplitudes máximas de cada FT presentan un pico para un valor determinado de v y las frecuencias correspondientes a dichos valores máximos son coincidentes, el valor de v es la *velocidad de flutter* V_F y la frecuencia es la *frecuencia de flutter* ω_F .

Ejemplo

Se presenta un ejemplo resuelto en el dominio del tiempo por Bell y Brotton [4] y mediante el análisis de autovalores y se comparan los resultados con los obtenidos por el MRF.

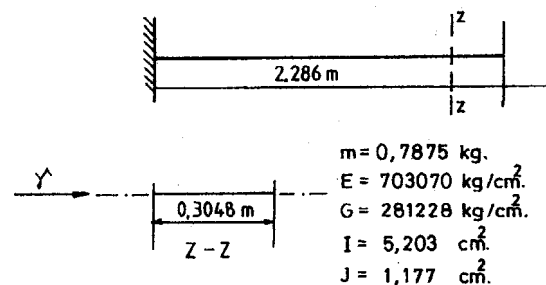


Figura 2 - Placa plana en cantilever

Se analiza el comportamiento de una placa plana en cantilever (Fig. 2), la cual ha sido discretizada según se indica en la Tabla 1. Los modos de vibrar y las frecuencias correspondientes se han obtenido utilizando el método de Stodola.

Elem.	$\Delta x(m)$	Masa(kg)	$I_{\alpha}(kgm^2)$	$f(x)$	$F(x)$
1	0.1143	0.1181	0.000923	0.0000	0.0000
2	0.2286	0.2362	0.001846	0.0167	0.1564
3	0.2286	0.2362	0.001846	0.0637	0.3090
4	0.2286	0.2362	0.001846	0.1362	0.4540
5	0.2286	0.2362	0.001846	0.2294	0.5878
6	0.2286	0.2362	0.001846	0.3389	0.7071
7	0.2286	0.2362	0.001846	0.4605	0.8090
8	0.2286	0.2362	0.001846	0.5902	0.8910
9	0.2286	0.2362	0.001846	0.7249	0.9510
10	0.2286	0.2362	-0.001846	0.8621	0.9877
11	0.1143	0.1181	0.000923	1.0000	1.0000

$$\omega_h = 12.6 \text{ rad/seg}; \omega_{\alpha} = 43.58 \text{ rad/seg}; g_h = g_{\alpha} = 0.0$$

$$a = 0.0 \text{ (cte.)}; b = 0.1524 \text{ m (cte.)}; S_{\alpha} = 0.0 \text{ (cte.)}$$

Tabla 1 - Discretización del sistema de la Fig. 2

Todos los elementos de la discretización poseen dos GL (h, α), de modo que la obtención de las matrices de transferencia se reduce a resolver sistemas de 2×2 de la forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \right\}_{v_i, \omega_j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con $i = 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, \dots, N-1$

La evolución de las amplitudes máximas de las FT de cada GL y las frecuencias correspondientes con la velocidad se han graficado en las Figs. 3 y 4 respectivamente. En la Fig. 3 se han graficado:

* $|H_{11}(\omega)|_{máx; v_j}$ indicado como GL h, y

* $|H_{22}(\omega)|_{máx; v_j}$ indicado como GL alfa.

En la Fig. 4 se han graficado la evolución de las frecuencias:

* Correspondiente a la posición de $|H_{11}(\omega)|_{máx; v_j}$, y

* Correspondiente a la posición de $|H_{22}(\omega)|_{máx; v_j}$.

Finalmente, en la Fig. 5 se ha graficado la evolución del amortiguamiento de los modos de flexión (h) y torsión (α) con la velocidad de la corriente obtenidos también a partir de las FT y el diagrama de Nyquist [9].

Método de Solución	V_F (m/seg)	ω_F (rad/seg)
Integración Numérica	36.85	23.3
Análisis de Autovalores	37.37	23.3
*Análisis en Frecuencia	37.39	23.25

Cuadro 1 - Condición de flutter del sistema

En el Cuadro 1 se han resumido los resultados obtenidos para la condición crítica de flutter del sistema y en el Cuadro 2 se presentan las diferencias porcentuales resultantes de comparar la solución en frecuencia con la obtenida por los otros dos métodos.

DIFERENCIAS PORCENTUALES	En la velocidad	En la frecuencia
Integración Numérica	1.4	0.2
Análisis de Autovalores	0.05	0.2

Cuadro 2 - Comparación de resultados

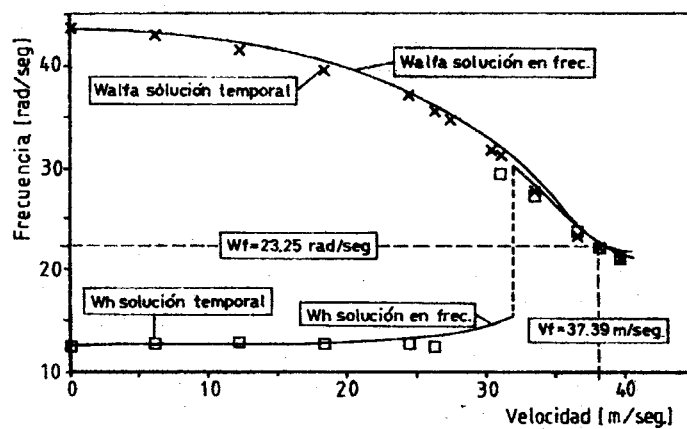


Figura 3 - Frecuencias de los picos máximos de las FT

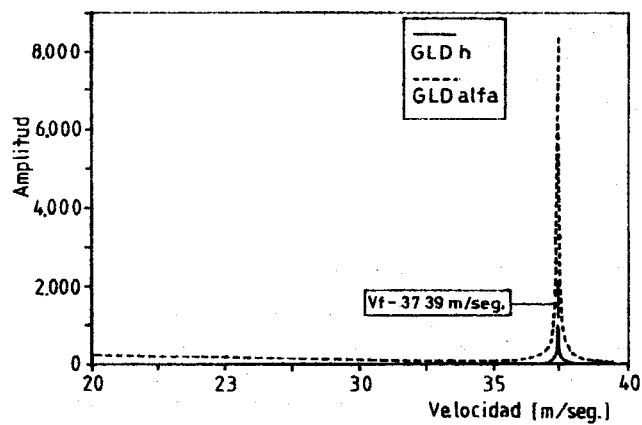


Figura 4 - Amplitudes de los picos máximos de las FT

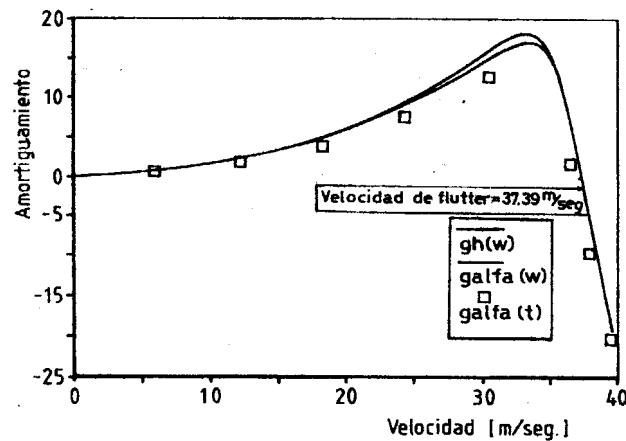


Figura 5 - Amortiguamiento de los modos

Al observar los Cuadros 1 y 2 puede comprobarse que la solución obtenida por medio del análisis en frecuencias resulta muy buena. La diferencia porcentual del resultado obtenido difiere en menos del 1% con la solución obtenida por análisis de autovalores, que impone matemáticamente la condición de equilibrio crítico en el sistema a través de la búsqueda de una solución no nula analizando si para alguna velocidad el determinante de la matriz de coeficientes $[A'(\omega)]$ se vuelve nulo. Al comparar con el método de integración numérica de las ecuaciones en el tiempo la diferencia se amplía levemente en la velocidad crítica y permanece igual en la frecuencia crítica.

Con respecto a las figuras, puede verse como la solución en frecuencias sigue un comportamiento muy similar al de la solución temporal para todo el rango de velocidades analizado, tanto para las frecuencias fundamentales (Fig. 3), como para el amortiguamiento (Fig. 5).

La obtención del amortiguamiento de los modos en función de la velocidad no resulta necesaria para detectar la existencia de flutter en el sistema, ya que el análisis de las amplitudes máximas de las FT y las frecuencias correspondientes brindan información suficiente como para poder detectar la condición crítica. Sin embargo, las curvas $g-v$ son típicas de este tipo de problemas y pueden ser obtenidas a partir de las FT.

Conclusiones

El MRF puede ser empleado para analizar numéricamente la estabilidad de sistemas lineales en los que pueda ocurrir flutter. Su empleo resulta relativamente sencillo y no requiere de ningún tipo de iteración de convergencia para lograr ajuste de frecuencias como debe realizarse al resolver las ecuaciones diferenciales en el tiempo[4]. En los problemas en que este tipo de fenómeno está presente se detectan la frecuencia (ω_F) y la velocidad (V_F) de flutter observando el comportamiento de los picos máximos de las FT y sus correspondientes frecuencias con el aumento de la velocidad de la corriente, detectándose la condición de inestabilidad cuando los máximos de las FT presentan un pico coincidente en la velocidad (V_F) y las frecuencias fundamentales resultan coincidentes (ω_F). El método descrito ha sido también utilizado para resolver ejemplos de sistemas con 3 CL (h, α, β) y estables, los que se describen en [7]. Para el caso de sistemas estables la evolución de las amplitudes máximas de las FT con la velocidad no presentan un pico notable como se aprecia en la Fig. 4, el

máximo se produce en $v = 0$ y las curvas resultan asintóticas, es decir decrecen permanentemente con el aumento de la velocidad. Por su parte, las frecuencias fundamentales no resultan coincidentes para ningún valor de la velocidad como ocurre en los sistemas inestables (Fig. 3).

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a los profesores Dr. Ing. José P. Tamagno del Departamento de Aeronáutica y al Ing. Julio C. Massa del Departamento de Estructuras de la F.C. E.F. y N. de la U.N.C. por sus consejos y aportes para la realización de este trabajo. El primer autor desea agradecer muy especialmente al Departamento de Estructuras por el espacio físico y el apoyo económico brindados.

Referencias

- [1] SACHS, P., *Wind Forcés in Engineering*, Pergamon Press LTD, Oxford, (1972).
- [2] SIMIU, E., *Wind Effects on Structures. An Introduction to Wind Engineering*, Wiley - Interscience, New York, (1978).
- [3] SCANLAN, R. H. and ROSENBAUM R., *An Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*, Macmillan, London, (1951).
- [4] BELL, A. J. and BROTTON, D. M., *A Numerical Integration Method for the Determination of Flutter Speeds*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 15, pp. 473 - 483, Pergamon Press, Great Britain, (1973).
- [5] SMILG, B. and WASSERMAN, L. S., *Application of Three-Dimensional Flutter Theory to Aircraft Structures*, AAF Tech. Rept. 4798, July (1942).
- [6] THEODORSEN, T., *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, NACA Rept. 496, (1935).
- [7] PIGLIACAMPO, L. J., *Aplicaciones de la Transformada de Fourier para la Obtención de Velocidades críticas en Problemas de Flutter*, Trabajo Final de la carrera Ing. Mec. Aeronáutica, F.C.E.F. y Nat., U.N.C., (1995).
- [8] PRATO, C., *Aplicaciones del Método de Respuesta en Frecuencia*, F.C.E.F. y Nat. Universidad Nacional de Córdoba, (1982).
- [9] EDWINS, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press LTD, Letchworth, Hertfordshire, England, (1986).

máximo se produce en $v = 0$ y las curvas resultan asintóticas, es decir decrecen permanentemente con el aumento de la velocidad. Por su parte, las frecuencias fundamentales no resultan coincidentes para ningún valor de la velocidad como ocurre en los sistemas inestables (Fig. 3).

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a los profesores Dr. Ing. José P. Tamagno del Departamento de Aeronáutica y al Ing. Julio C. Massa del Departamento de Estructuras de la F.C. E.F. y N. de la U.N.C. por sus consejos y aportes para la realización de este trabajo. El primer autor desea agradecer muy especialmente al Departamento de Estructuras por el espacio físico y el apoyo económico brindados.

Referencias

- [1] SACHS, P., *Wind Forces in Engineering*, Pergamon Press LTD, Oxford, (1972).
- [2] SIMIU, E., *Wind Effects on Structures. An Introduction to Wind Engineering*, Wiley - Interscience, New York, (1978).
- [3] SCANLAN, R. H. and ROSENBAUM R., *An Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*, Macmillan, London, (1951).
- [4] BELL, A. J. and BROTTON, D. M., *A Numerical Integration Method for the Determination of Flutter Speeds*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 15, pp. 473 - 483, Pergamon Press, Great Britain, (1973).
- [5] SMILG, B. and WASSERMAN, L. S., *Application of Three-Dimensional Flutter Theory to Aircraft Structures*, AAF Tech. Rept. 4798, July (1942).
- [6] THEODORSEN, T., *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, NACA Rept. 496, (1935).
- [7] PIGLIACAMPO, L. J., *Aplicaciones de la Transformada de Fourier para la Obtención de Velocidades críticas en Problemas de Flutter*, Trabajo Final de la carrera Ing. Mec. Aeronáutica, F.C.E.F. y Nat., U.N.C., (1995).
- [8] PRATO, C., *Aplicaciones del Método de Respuesta en Frecuencia*, F.C.E.F. y Nat. Universidad Nacional de Córdoba, (1982).
- [9] EDWINS, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press LTD, Letchworth, Hertfordshire, England, (1986).